

Diplomarbeit

zur Erlangung des Grades eines Diplom-Ingenieurs

**Modellierung und numerische Simulation der Entstehung und
Ausbreitung von Schall durch Entropiewellen in beschleunigten
Rohrströmungen**

Technische Universität Berlin

Fakultät V (Verkehrs- und Maschinensysteme)
Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik

bei:

Prof. Dr.-Ing. Frank H. Thiele

vorgelegt von:

Christoph Schemel

Thorwaldsenstr. 22a, 12157 Berlin

Matrikelnummer: 182615

christoph.schemel@web.de

Berlin, den 3. November 2003

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	VI
1 Einleitung und Aufgabenstellung	1
2 Mathematische Modellierung	3
2.1 Die Grundgleichungen	4
2.1.1 Massenbilanz	4
2.1.2 Die Navier-Stokes-Gleichungen	5
2.1.3 Energiebilanz	5
2.2 Zylinderkoordinaten	7
2.3 Dimensionslose Größen	8
2.4 Linearisierung für kleine Störungen	10
2.4.1 Kontinuitätsgleichung	10
2.4.2 Impulsgleichungen	10
2.4.3 Energiegleichung als Druckschwankung	11
2.4.4 Energiegleichung als Entropieschwankung	12
2.4.5 Zusammenfassung	13
2.5 3D axialsymmetrische Grundgleichungen	14
3 Numerisches Verfahren	17
3.1 Diskretisierungsverfahren	18
3.1.1 Räumliche Diskretisierung	18
3.1.2 Zeitliche Diskretisierung	19
3.1.3 Künstliche, selektive Dämpfung	20
3.1.4 Parallelisierung	22
3.2 Physikalische Randbedingungen	23
3.2.1 Schallharte Wand	23
Indirekte Bestimmung	24
Direkte Bestimmung	25

3.2.2	Randbedingung an der Achse	26
3.3	Die Schallquelle	29
3.3.1	Akustische Wellen	29
	Drallfreie Strömung	32
	Verdrallte Strömung	32
3.3.2	Entropiewellen	33
3.3.3	Eingabe der Schallquelle	33
3.4	Nicht reflektierende Randbedingungen	35
3.4.1	Die Newton-Cooling/Friction (NC/F)-Randbedingung	35
3.4.2	Die Perfectly-Matched-Layer (PML)-Randbedingung	36
3.4.3	Die charakteristische Randbedingung von Giles	39
4	Entropiewellen und akustische Wellen	43
4.1	Eigenlösungen in homogener Grundströmung	44
4.2	Entropiewellen in einer beschleunigten Rohrströmung	46
4.2.1	Direkte Identifikation von Schallquellen	48
4.2.2	Theoretische Lösungen	48
4.3	Akustische Wellen in einer beschleunigten Rohrströmung	53
4.4	Zusammenfassung	55
5	Ergebnisse	56
5.1	Vergleich zwischen PML- und NC/F-Randbedingung	57
5.1.1	Größe des Dämpfungsgrades	58
5.1.2	Länge der Pufferzone	60
5.1.3	Optimale Pufferzone	62
5.2	Verifikation der Wand-Randbedingung	62
5.3	Verifikation für einfache Düsenströmungen	62
5.3.1	Entropiewellen	65
	Vergleich der Ergebnisse bei $M = 0.1$	67
	Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.2$	68
	Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.3$	69
	Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.4$	70
	Einfluss der gewählten Erregerfrequenz bei $M = 0.4$	70
	Verwendung der rotationsfreien Formulierung für $M = 0.4$	72
	Auswertung des Quellterms	72
5.3.2	Akustische Wellen	73
	Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.1$	73
	Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.2$	74
	Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.3$	75
	Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.4$	75
5.4	Anwendungsbeispiele	76

	III
5.4.1 Der gestörte Massenfluss als Quellmechanismus	76
5.4.2 Entropiewellen in einer subsonischen Laval-Düse	78
6 Diskussion	79
6.1 Vergleich der Randbedingungen	80
6.2 Validierung mit der Theorie	82
6.3 Ausblick	85
7 Zusammenfassung	86
Literaturverzeichnis	89
A Gleichungen der Störungsausbreitung	92
A.1 Vektorielle Schreibweise der vollständigen Modellgleichungen	93
A.2 Vektorielle Schreibweise der rotationsfreien Modellgleichungen	94
A.3 Vereinfachung für drallfreie isentrope Strömung	95
A.4 Zusammenstellung der Präprozessoroptionen	96
B Koeffizienten der Diskretisierungsverfahren	97
B.1 Räumliche Diskretisierung	98
B.1.1 Zentraler Differenzenstern	98
B.1.2 Einseitige Differenzensterne	98
B.2 Künstliche selektive Dämpfung	98
B.3 Zeitliche Diskretisierung	99
Index	100

Abbildungsverzeichnis

3.1	Verhalten der Bessel-Funktion 10. Ordnung an der Achse	20
3.2	Durch die künstliche, selektive Dämpfung verursachte Fehler	21
3.3	Der Normalenvektor an einer Wand entlang der i -Koordinaten Linie	23
3.4	Schematische Darstellung des Orientierungswechsels an der Achse	27
4.1	Schallquellen durch eine Brennkammer	47
4.2	Bezeichnungen entsprechend der Notation in Marble und Candel [18] am Beispiel einer Düse	49
4.3	Verhältnisse zwischen einlaufender nicht isentroper Dichteschwankung und ausgesandten Schalldruckschwankungen in einer Düse	51
4.4	Verhältnis zwischen einlaufender nicht isentroper Dichteschwankung und ausgesandten Schalldruckschwankungen in einem Diffuser	52
4.5	Reflexion und Transmission der stromab laufenden Schallwelle	53
5.1	Vergleich PML vs. NC/F: Momentane Druckkontur der betrachteten Extremfälle	57
5.2	Numerisches Beispiel (momentane Druckkontur) mit den Pufferzonen für den Vergleich zwischen PML- und NC/F-Randbedingung am Auslass (rechts im Bild) . .	58
5.3	Relativer Fehler des Drucks im inneres Rechengebiet	58
5.4	Vergleich PML vs. NC/F: ungerade Azimutalmode bei $\omega = 9.14$	59
5.5	Vergleich NC/F vs. PML: gerade Azimutalmode bei $\omega = 9.14$	60
5.6	Variation der Weite der Pufferzone im Vergleich zwischen PML- und NC/F-Randbedingung	61
5.7	Zum Rand hin gestrecktes Gitter	62
5.8	Vergleich PML vs. NC/F: ungerade Azimutalmode $m = 3$ bei $\omega = 20$	63
5.9	Verifikation der Wand-Randbedingung	63
5.10	Ein Rechengitter für den Vergleich mit der Theorie von Marble und Candel [18] .	64
5.11	Momentane Dichte-, Druck- und Geschwindigkeitsschwankung (von oben nach unten) für verschiedene Düsen	65
5.12	Übertragungsverhältnisse zwischen Druck und Dichte	66
5.13	Entropiewellen im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.1$)	68
5.14	Entropiewellen im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.2$)	68
5.15	Entropiewellen im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.3$)	69

5.16	Entropiewellen im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.4$)	70
5.17	Dimensionslose Übertragungsverhältnisse über der Erregerfrequenz	71
5.18	Dichteamplitude über Lauflänge für verschiedene Erregerfrequenzen	71
5.19	Dimensionslose Übertragungsverhältnisse berechnet mit der rotationsfreien Formulierung der Grundgleichungen	72
5.20	Quellterm durch die beschleunigte kompakte Dichteschwankung in verschiedenen Düsen	73
5.21	Transmission und Reflexion im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.1$)	74
5.22	Transmission und Reflexion im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.2$)	74
5.23	Transmission und Reflexion im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.3$)	75
5.24	Transmission und Reflexion im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.4$)	76
5.25	Vergleich zweier Formen für die Entropiewelle	77
5.26	Vergleich zweier Formen für die Entropiewelle	77
5.27	Schalldruckpegel in generischen Laval-Düsen bei Unterschallströmung ($M_1 = 0.1$)	78
6.1	Gemittelte Intensität für eine ausgewählte Mode	81
6.2	Potentialströmung in einem Diffuser bei ($M = 0.4$) im Ausströmkanal	83

Tabellenverzeichnis

2.1	Dimensionslose Größen und deren physikalische Einheiten	9
4.1	Zusammenfassung der angepassten Theorie von Marble und Candel [18] für die eindimensionale Wellenausbreitung in einer eindimensionalen isentropen kompressiblen Potentialströmung	55
5.1	Testmatrix zum Vergleich mit der Theorie von Marble und Candel [18]	65
A.1	Kombinationen der Präprozessoroptionen zur Auswahl der Differentialgleichung	96
B.1	Koeffizienten des zentralen Sieben-Punkte-DRP Schemas ($\eta = 1.1$), nach Tam und Webb [30]	98
B.2	Koeffizienten der asymmetrischen Sieben-Punkte-DRP Schemas ($\eta = \frac{\pi}{2}$), nach Tam [32]	98
B.3	Koeffizienten des symmetrischen Sieben-Punkte Dämpfungssterns, nach Tam u. a. [31]	98
B.4	Die Koeffizienten des alternierenden fünf-/sechststufigen Runge-Kutta Verfahrens vierter Ordnung nach Hu u. a. [11]	99

Kapitel 1

Einleitung und Aufgabenstellung

In den letzten Jahrzehnten hat die technische Entwicklung zu einer stetigen Zunahme des Energieverbrauchs geführt [3]. Insbesondere der Energieverbrauch für den Verkehr hat sich von 1970 bis 2000 verdoppelt [3]. Die Siedlungspolitik führt zu einer maximalen Ausnutzung der Lärmschutzzonen von Flughäfen, während gleichzeitig die Lärmschutzverordnungen seit 1971 nicht den neuen Gegebenheiten angepasst wurden [4]. Leistung, Produktivität und Lebensqualität sind durch Lärm stark beeinträchtigt. Bei Geräuscheinwirkungen, die dauerhaft über 65 dB(A) liegen, muss ein erhöhtes Risiko für Herz-Kreislauf-Erkrankungen befürchtet werden [2]. Die Nachtruhe, deren Schutz aus präventivmedizinischen Gründen ein besonders hoher Stellenwert zukommt, ist bereits bei Werten oberhalb von 55 dB(A) beeinträchtigt [2, 19]. Aufgrund dieser Tatsachen wurde von der Europäischen Union die Notwendigkeit einer Reduzierung des Lärms erkannt. Aus den Resultaten der Lärmwirkungsforschung lassen sich für den Bereich der Fluglärmimmissionen auf der Basis des energieäquivalenten Dauerschallpegels Grenzwerte für die Schutzzone 1 von 65 dB und für die Schutzzone 2 von 60 dB ableiten [4]. Die angestrebte Reduzierung des Lärmpegels laut Gesetzesvorlage für den Fluglärm beträgt somit 10 bis 12 dB.

Am Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik wurde ein Verfahren zur Berechnung der Schallausbreitung in Triebwerkseinläufen entwickelt. Die Simulation basiert auf einem für harmonische Schwankungen optimierten numerischen Verfahren (DRP). Bisher kann diese sogenannte CAA-Methode nur zur numerischen Simulation der Schallausbreitung und Abstrahlung im Triebwerkseinlauf angewendet werden, da das verwendete mathematische Modell auf drallfreie homentropen Strömungen in axialsymmetrischen Geometrien beschränkt ist.

Bei Vorgängen in der Brennkammer und Turbinenstufe von Flugtriebwerken genau wie in der Haustechnik spielen häufig Schallquellen eine Rolle, die durch ein strömendes Medium induziert sind. Es wird beispielsweise vermutet, dass ein wichtiger Teil des sogenannten Core-Noise eines Flugtriebwerks nicht direkt durch die Verbrennung verursacht wird, sondern in der nachfolgenden Turbine entsteht. Die Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit besteht darin, das CAA-Verfahren so zu erweitern, dass die Simulation der Ausbreitung von Entropiewellen und von deren Schallabstrahlung in einer Düse möglich ist. Zur Validierung der programmtechnischen Umsetzung wird die eindimensionale asymptotische Theorie von Marble und Candel [18] für kompakte Düsen herangezogen. In einer Brennkammer können Drallströmungen vorliegen, die beispielsweise durch einen Drallbrenner verursacht werden. Die Simulation soll daher auch eine verdrallte Strömung zulassen.

Ein wichtiger Punkt bei der Umsetzung der Aufgabe sind die Randbedingungen. Die nicht reflektierende Randbedingung, die bisher für das Verfahren verwendet wird, stellt eine Approximation dar [14]. Sie soll daher mit einer typgleichen, aber exakt hergeleiteten Perfectly-Matched-Layer (PML) Randbedingung verglichen werden. Die Überprüfung der Wand-Randbedingung und der Randbedingung an der Achse auf ihre Gültigkeit für die neue Problemstellung stellt eine weitere Aufgabenstellung dar. Das Ziel der Arbeit ist ein numerisches Verfahren zu erhalten, welches in der Lage ist die Schallabstrahlung von runden Kanälen im Anschluss an eine Brennkammer korrekt wiederzugeben. Damit besteht dann die Möglichkeit die Kanalgeometrie schon sehr früh in der Design-Phase so zu verändern, dass die Schallabstrahlung minimiert wird.

Kapitel 2

Mathematische Modellierung

In diesem Kapitel wird ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen ein mathematisches Modell zur Berechnung der Ausbreitung kleiner Störungen abgeleitet. Zur Beschreibung der Störungsausbreitung im Flugtriebwerk erweist sich die Formulierung in Zylinderkoordinaten als besonders sinnvoll. Im folgenden Abschnitt werden die Strömungsgrößen in eine dimensionslose Form gebracht. Der Vorteil dieses Vorgehens ist, dass die Größenordnung aller Variablen angeglichen wird. Gleichzeitig wird eine Reihe von ähnlichen Problemen erzeugt, die durch eine einzige Simulation zugänglich sind. Im nächsten Schritt werden kleine Abweichungen vom mittleren Zustand zugelassen, um Gleichungen für die Ausbreitung kleiner Störungen zu erhalten. Der mittlere Zustand (die Grundströmung) wird als eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen angenommen, daher lässt sich dieser Anteil abspalten. Unter der Annahme kleiner Störungen entfallen die Terme von höherer Ordnung in den Störgrößen. Das Ergebnis sind die linearisierten Eulergleichungen, wobei die Grundströmung eine stationäre Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit Wärmezufuhr oder -abfuhr ist. Die Annahme einer axialsymmetrischen Grundströmung ermöglicht im letzten Schritt eine Vereinfachung des dreidimensionalen Problems für die Schallausbreitung auf eine Reihe von Differential-Gleichungs-Systemen (DGLS) von zwei unabhängigen Variablen. In den entkoppelten zweidimensionalen Gleichungen ist die Winkelkoordinate φ als unabhängige Variable durch die Nummer der Azimutalmode m ersetzt. Durch die Nutzung der cut-off Bedingung wird am Ende das zu simulierende Problem auf den ausbreitungsfähigen Teil der Azimutalmoden eingegrenzt.

2.1 Die Grundgleichungen

Die Grundgleichungen werden hier entsprechend Spurk [27] und Rienstra und Hirschberg [25] als Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie am raumfesten Volumenelement aufgestellt.

2.1.1 Massenbilanz

Die Massenbilanz eines Fluidvolumens wird mit Hilfe von Dichte $\tilde{\rho}$, Druck \tilde{p} und dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{\mathbf{u}}$ wie folgt notiert (vgl. [27, 39]):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.1)$$

Die Tilde kennzeichnet physikalische Größen, die im Gegensatz zu den später eingeführten dimensionslosen Zustandsgrößen, aus einem Wert und der zugehörigen physikalischen Einheit zusammengesetzt sind. Zur weiteren Abkürzung der Schreibweise bei der Herleitung der Gleichungen für die Ausbreitung kleiner Störungen ist die Einführung der materiellen Ableitung sinnvoll:

$$\frac{\tilde{D}(\cdot)}{\tilde{D}t} := \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}(\cdot) \quad (2.2)$$

Gl. (2.1) lässt sich mit Hilfe der materiellen Ableitung wie folgt abgekürzt schreiben:

$$\frac{\tilde{D} \tilde{\rho}}{\tilde{D}t} + \tilde{\rho} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.3)$$

Damit ist die erste Gleichung gefunden, die Dichte und Geschwindigkeitskomponenten miteinander verknüpft.

2.1.2 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Die Impulsbilanz eines Fluidelements liefert drei weitere Differentialgleichungen zur Bestimmung der fünf unbekanntenen Strömungsgrößen, wobei bereits der Newtonsche Schubspannungsansatz als Materialgleichung eingesetzt wurde. Zusätzlich zu den bei der Notation der Massenbilanz eines Fluidelements eingeführten Termen, fließen in die Impulsbilanz der viskose Spannungstensor $\tilde{\tau}$ und die Volumenkräfte \underline{K} ein. Die Navier-Stokes-Gleichungen werden allgemein wie folgt notiert (vgl. [25]):

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\underline{u}}}{\partial t} + \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} \right) = \tilde{\rho} \underline{K} - \tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\tau} \quad (2.4)$$

Die Volumenkräfte \underline{K} werden vernachlässigt, da weder hydrostatische Effekte noch magnetische Volumenkräfte für die Strömung des Gases in Flugtriebwerken eine Rolle spielen. Die Oberflächenkräfte auf das Volumenelement wurden bereits in einen Anteil aus dem Druck normal zum Oberflächenelement und den dissipativen Anteil im Spannungstensor $\tilde{\tau}$ aufgespalten. Mit Hilfe der kinematischen Viskosität μ , der Volumenviskosität $\lambda = \frac{2}{3}\mu$ und des Einheitstensors \underline{E} unter Annahme einer konstanten Viskosität lautet die Ableitung des viskosen Spannungstensors:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\tau} &= \tilde{\nabla} \cdot \left(\mu (\tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} + \tilde{\underline{u}} \tilde{\nabla}) - \lambda \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} \underline{E} \right) \\ &= \tilde{\nabla} \times [\mu (\tilde{\nabla} \times \tilde{\underline{u}})] + \frac{4}{3} \tilde{\nabla} (\mu \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}}) \\ &= -\mu [\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}}) - \Delta \tilde{\underline{u}}] + \frac{4}{3} \mu \tilde{\nabla} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der Spannungstensor $\tilde{\tau}$ wird hier nur der Vollständigkeit halber mit angegeben, jedoch für die Störungsausbreitung später vernachlässigt. Mit der materiellen Ableitung wird die Impulsbilanz daher wie folgt geschrieben:

$$\frac{\tilde{D} \tilde{\underline{u}}}{\tilde{D} \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \tilde{p} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\tau} \quad (2.6)$$

2.1.3 Energiebilanz

Die allgemeine Form der Bilanzgleichung der Energie eines Fluidelements liefert einen Zusammenhang zwischen der spezifischen Gesamtenergie \tilde{e} und dem Wärmefluss $\tilde{\underline{q}}$, sowie den dissipativen Termen (vgl. [25]).

$$\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} + \tilde{\rho} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{e} \tilde{\underline{u}}) = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}} - \tilde{\nabla} \cdot (p \tilde{\underline{u}}) + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\tau} \cdot \tilde{\underline{u}}) \quad (2.7)$$

Die spezifische Enthalpie ist gegeben durch:

$$\tilde{h} = \tilde{e} - \frac{1}{2} \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\underline{u}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \quad (2.8)$$

Die Ausbreitung der bei der Verbrennung entstehenden Schallwellen und Entropieschwankungen wird durch den zweiten Hauptsatz in reversibler Form beschrieben. Für die Verbrennung selbst kann dieses Modell nicht eingesetzt werden. Die spezifische Entropie, erweist sich damit

als besonders geeignete Größe zur Beschreibung der Ausbreitung kleiner Störungen. Sie ist durch die Gibbs-Gleichung für einen reversiblen thermodynamischen Prozess gegeben:

$$T d\tilde{s} = d\tilde{h} - \frac{d\tilde{p}}{\tilde{\varrho}} \quad (2.9)$$

Gl. (2.9) bedeutet scheinbar eine Einschränkung auf einen reversiblen Prozess für das gesamte Strömungsfeld. Diese Einschränkung lässt sich aufheben, wenn man die Entropieproduktion auf die Grundströmung beschränkt. Daraus folgt für das totale Differential der spezifischen Gesamtenergie:

$$d\tilde{e} = T d\tilde{s} - \tilde{u} \cdot d\tilde{u} - \tilde{p} d\tilde{\varrho}^{-1} \quad (2.10)$$

Die Gleichung (2.10) wird benutzt um in Gl. (2.7) die Gesamtenergie zu eliminieren. Nach dem Einsetzen der Gln. (2.1) und (2.4) folgt (vgl. [25]):

$$\varrho T \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{s} \right) = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{q} + \tilde{\tau} : \tilde{\nabla} \tilde{u} \quad (2.11)$$

Die Differentialgleichung für die spezifische Entropie wird mit der materiellen Ableitung wie folgt notiert:

$$\varrho T \frac{\tilde{D} \tilde{s}}{\tilde{D} \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{q} + \tilde{\tau} : \tilde{\nabla} \tilde{u} \quad (2.12)$$

Darüber hinaus wird das Fluid als zweiatomiges ideales Gas angenähert, so dass die Entropie mit Hilfe von Gl. (2.9) und den thermodynamischen Beziehungen aus Müller [21] durch Druck und Dichte ersetzt werden kann. Im Folgenden bezeichnen C_p und C_v die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck bzw. bei konstantem Volumen. Die Umschreibung benötigt die spezifische Gaskonstante \mathcal{R} und den Adiabatenexponenten γ , gebildet als Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten. Für ein ideales Gas sind C_p und C_v konstant. Für zweiatomige ideale Gase mit fünf Freiheitsgraden ($f = 5$) ergeben sich diese Konstanten zu:

$$C_v = \frac{f}{2} \mathcal{R} = \frac{5}{2} \mathcal{R} \quad (2.13)$$

$$C_p = \left(1 + \frac{f}{2} \right) \mathcal{R} = \frac{7}{2} \mathcal{R} \quad (2.14)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{2}{f} = \frac{7}{5} \quad (2.15)$$

Mit dem totalen Differential der Enthalpie und der idealen Gasgleichung

$$d\tilde{h} = C_p dT \quad (2.16)$$

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{\varrho}} = \mathcal{R} T \quad (2.17)$$

$$\text{für Luft: } \mathcal{R} = C_p - C_v = 286.73 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \quad (2.18)$$

lässt sich die Gibbs-Gleichung (2.9) nun umschreiben zu:

$$d\tilde{s} = C_v \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}} - C_p \frac{d\tilde{\varrho}}{\tilde{\varrho}} \quad (2.19)$$

Bis hierhin entsprechen die Ableitungen dem Vorgehen in Rienstra und Hirschberg [25]. Die Gleichung (2.12) wird nun weiter umgeformt, um eine Differentialgleichung für die Zeitableitung des Drucks zu erhalten. Einsetzen der Massenbilanz (2.3) liefert die gesuchte Beziehung:

$$\rho T \frac{C_v}{p} \left(\frac{\tilde{D}\tilde{p}}{\tilde{D}\tilde{t}} - \gamma \underbrace{\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\tilde{D}\tilde{\rho}}{\tilde{D}\tilde{t}} \right)}_{=-\tilde{\rho}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}}} \right) = -\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\tau} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{u}} \quad (2.20)$$

Unter Berücksichtigung aller Vereinfachungen ergibt sich:

$$\rho T \frac{C_v}{p} \left(\frac{\tilde{D}\tilde{p}}{\tilde{D}\tilde{t}} + \gamma \tilde{p} \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}} \right) = -\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\tau} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{u}} \quad (2.21)$$

Die Gleichung (2.21) ist der Massenbilanz (2.3) sehr ähnlich. Bei Vernachlässigung der Reibung und Wärmeleitung ergibt sich eine Gleichung für den Druck, die sich nur im Adiabatenexponenten vor der Geschwindigkeitsdivergenz von einer Kontinuitätsgleichung unterscheidet, in der $\tilde{\rho}$ durch \tilde{p} ersetzt wurde.

2.2 Zylinderkoordinaten

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen für ein um die x -Achse mitrotierendes Koordinatensystem spezifiziert. Die Lage eines Punktes im Raum sei durch das Koordinaten-Tripel (x, r, φ) in Zylinderkoordinaten eindeutig bestimmt. Das mitbewegte Koordinatensystem führt dazu, dass die Ableitungen der Einheitsvektoren nicht verschwinden. Es gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r \quad (2.23)$$

Für $r \rightarrow 0$ wird dieses Koordinatensystem singulär, was bei der späteren Umsetzung noch beachtet werden muss. Die Divergenz eines Skalares in Zylinderkoordinaten entspricht der in kartesischen Koordinaten:

$$\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{p}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\varphi}} \quad (2.24)$$

Die Divergenz eines Vektors in Zylinderkoordinaten ist unter Beachtung der Koordinatenableitungen wie folgt gegeben (vgl. [27]):

$$\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r}\tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\varphi}} \quad (2.25)$$

Der Gradient eines Skalares in Zylinderkoordinaten entspricht dem in kartesischen Koordinaten:

$$\tilde{\nabla}\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} \mathbf{e}_r + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\varphi}} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.26)$$

Der Gradient eines Vektors in Zylinderkoordinaten ergibt unter Beachtung der Koordinatenableitungen den folgenden Tensor zweiter Stufe (vgl. [27]):

$$\tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} & \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}} & \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\varphi}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j} \quad (2.27)$$

Die Rotation des Vektors $\tilde{\underline{u}}$ berechnet sich in Zylinderkoordinaten wie folgt:

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\underline{u}} = \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}}, \quad \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right)^T \quad (2.28)$$

Die zweite Vektorform wird benutzt, um die Rotation und damit die Wirbel abzuspalten.

$$\tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} = -\tilde{\underline{u}} \times (\tilde{\nabla} \times \tilde{\underline{u}}) + \tilde{\nabla} \frac{\tilde{u}^2}{2} \quad (2.29)$$

Der Laplace Operator des Vektors $\tilde{\underline{u}}$ ist in Zylinderkoordinaten folgendermaßen definiert:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} = \left(\Delta \tilde{u}, \quad \Delta \tilde{v} - \frac{1}{\tilde{r}^2} [\tilde{v} + 2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\varphi}}], \quad \Delta \tilde{w} - \frac{1}{\tilde{r}^2} [\tilde{w} - 2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}}] \right)^T \quad (2.30)$$

Die speziellen Ableitungen in Zylinderkoordinaten werden erst später benötigt, wenn das Modell von der symbolischen Schreibweise in die im Programm verwendete Index-Schreibweise umgewandelt wird. Die symbolische Schreibweise wird für die Ableitungen wegen der Kürze bevorzugt.

2.3 Dimensionslose Größen

Die Einheitsgrößen werden als globale d. h. zeitliche und räumliche Konstanten eingeführt, so dass ihre Ableitungen nach den unabhängigen Variablen verschwinden. Die dimensionsbehafteten Größen sowie die entsprechende Einheitsgröße sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt.

Die Kontinuitätsgleichung (2.3), die Impulsgleichungen (2.6) und Gl. (2.21) werden auf die dimensionslosen Größen ohne Tilde umgeschrieben. Der Nabla-Operator wird mit der räumlichen Einheitsgröße R entdimensionalisiert. Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{D} \tilde{\varrho}}{\tilde{D} \tilde{t}} + \tilde{\varrho} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} \\ &= \frac{a_\infty}{R} \frac{D \varrho_\infty \varrho}{D t} + \frac{1}{R} \varrho_\infty \varrho \nabla \cdot (a_\infty \underline{u}) \\ &= \frac{a_\infty \varrho_\infty}{R} \left(\frac{D \varrho}{D t} + \varrho \nabla \cdot \underline{u} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Impulsgleichung (2.6) wird umgeformt, indem die gesamte Gleichung mit $\frac{a_\infty^2}{R}$ dimensionslos gemacht wird. Diese Größe hat die Einheit einer Beschleunigung.

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{D} \tilde{\underline{u}}}{\tilde{D} \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{\varrho}} \nabla \tilde{p} \\ &= \frac{a_\infty^2}{R} \left(\frac{D \underline{u}}{D t} + \frac{1}{\varrho} \nabla p \right) = \frac{a_\infty^2}{R} \left(\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \underline{\tau} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Aus der dimensionslosen Druckgleichung wird die Druckgleichung für dimensionsbehaftete Größen (2.21) wieder gewonnen, indem sie mit $\frac{\varrho_\infty a_\infty^3}{R}$ multipliziert wird. Zuvor wird die Temperatur mit Hilfe der idealen Gasgleichung (2.17) durch Druck und Dichte ersetzt. Diese Größe hat die Einheit $N \frac{m}{s}$ und entspricht damit einer Leistung.

$$\frac{5}{2} \frac{\varrho_\infty a_\infty^3}{R} \left(\frac{D p}{D t} + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} \right) = \frac{\varrho_\infty a_\infty^3}{R} \left(-\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \nabla \underline{u} \right) \quad (2.33)$$

Tabelle 2.1: Dimensionslose Größen und deren physikalische Einheiten

Größe	Physikalische Einheitsgröße	SI-Einheit	Beschreibung	Maß
\tilde{x}, \tilde{r}	R	m	Rohrradius an der Schallquelle	Längenmaß
\tilde{c}, \tilde{u}	a_∞	$\frac{m}{s}$	Schallgeschwindigkeit in der Außenströmung	Geschwindigkeitsmaß
$\tilde{\rho}$	ρ_∞	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte des Fluids in der Außenströmung	Dichtemaß
\tilde{t}	$\frac{R}{a_\infty}$	s		Zeitmaß
$\tilde{f}, \tilde{\omega}$	$\frac{a_\infty}{R}$	s		Frequenzmaß
\tilde{p}	$\rho_\infty a_\infty^2$	Pa		Druckmaß
$\tilde{\mu}$	$a_\infty R$	$\frac{m^2}{s}$		Maß für die Viskosität

Die Einheitsgrößen wurden konstant für das gesamte Strömungsfeld definiert. Damit die Entdimensionalisierung sinnvolle Ergebnisse liefert, müssen die Einheitsgrößen von Null verschieden sein. Mit diesen Annahmen ist es möglich aus dem Differentialgleichungssystem für die dimensionsbehafteten Größen ein entsprechendes dimensionsloses System abzuleiten.

$$\frac{D \varrho}{Dt} + \varrho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{D \underline{u}}{Dt} + \frac{1}{\varrho} \underline{\nabla} p = \frac{1}{\varrho} \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} \quad (2.35)$$

$$\frac{D p}{Dt} + \gamma p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{\nabla} \underline{u} \quad (2.36)$$

Die Aussagen für die dimensionslosen Strömungsgrößen in den Gleichungen (2.34) – (2.36) entsprechen exakt den in den Gleichungen (2.3), (2.6) und (2.21) dargestellten Zusammenhängen.

Die Normierung wird rückgängig gemacht und damit physikalische Größen gewonnen, indem die dimensionslosen Größen mit der entsprechenden Einheitsgröße multipliziert werden. Die dimensionslosen Differentialgleichungen haben den Vorteil, dass eine Reihe von ähnlichen Problemen, die sich nur durch ihre Normierung voneinander unterscheiden, geschaffen wird. Diese Ähnlichkeit macht zusätzliche Berechnungen überflüssig, wenn sich nur die Skalierung ändert.

2.4 Linearisierung für kleine Störungen

Die fünf verbliebenen Größen zur Beschreibung des Strömungszustands werden zunächst in einen Gleich- und einen Schwankungsanteil aufgespalten.

$$\text{z. B. } \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (2.37)$$

Die mittlere Zustandsgröße ist mit einem Überstrich gekennzeichnet. Eine kleine Abweichung von der mittleren Größe wird durch die gestrichene Notation markiert. Die Störgröße wird als klein angenommen, so dass die Terme höherer Ordnung in den Störgrößen vernachlässigbar gegenüber den Produkten aus mittleren Größen und Störgrößen sind. Der Spannungstensor enthält als Vorfaktor die inverse Reynoldszahl gebildet mit der Schallgeschwindigkeit und dem Rohrradius. Bei niedrigen Frequenzen ist der dissipative Anteil der Störgrößen daher von quadratischer Ordnung, und die Terme der Störgrößen in $\underline{\tau}$ werden vernachlässigt.

Die Schreibweise mit der materiellen Ableitung wird problematisch, da \underline{u} sowohl einen Gleichanteil als auch einen Schwankungsanteil beinhaltet. Die materielle Ableitung wird daher nur als materielle Ableitung mit dem Gleichanteil der Geschwindigkeit definiert.

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \bar{\underline{U}} \cdot \nabla(\cdot) \quad (2.38)$$

2.4.1 Linearisierung der Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung (2.34) wird damit wie folgt aufgespalten, wobei der fehlende Term der materiellen Ableitung berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned} & \frac{D\bar{\rho} + \rho'}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla(\bar{\rho} + \rho') + (\bar{\rho} + \rho') \nabla \cdot (\bar{\underline{U}} + \underline{u}') \\ = & \underbrace{\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \nabla \cdot \bar{\underline{U}}}_{=0 \text{ (Kontinuität)}} + \frac{D\rho'}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \underline{u}' + \rho' \nabla \cdot \bar{\underline{U}} + \underbrace{\underline{u}' \cdot \nabla \rho' + \rho' \nabla \cdot \underline{u}'}_{\approx 0 \text{ (2. Ordnung)}} = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.4.2 Linearisierung der Impulsgleichungen

Die Impulsgleichungen (2.35) werden mit $\tau' \approx 0$ und $\bar{\tau} = \tau$ vereinfacht.

$$\frac{D(\bar{\underline{U}} + \underline{u}')}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla(\bar{\underline{U}} + \underline{u}') + \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \nabla(\bar{p} + p') = \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (2.40)$$

Das Ergebnis ist eine reibungsfreie Formulierung der Impulsgleichungen, die auch als linearisierte Eulergleichung bezeichnet wird (z. B. [8, 13, 33]).

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\bar{\varrho} \frac{D\bar{U}}{Dt} + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \underline{\tau} + \bar{\varrho} \frac{D\underline{u}'}{Dt} + \varrho' \frac{D\bar{U}}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{U} + \nabla p'}_{=0 \text{ (Impuls)}} \\
 & \quad + \underbrace{\varrho' \frac{D\underline{u}'}{Dt} + \varrho' \frac{D\underline{u}'}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla \underline{u}' + \nabla p'}_{\approx 0 \text{ (2. Ordnung)}} \approx 0
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Stationarität der Grundströmung ($\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0$) die Impulsgleichung für die Störgrößen:

$$\frac{D\underline{u}'}{Dt} + \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{U} + \frac{1}{\bar{\varrho}} \nabla p' = 0 \tag{2.42}$$

Die Linearisierung der aus der Energiegleichung entstandenen Beziehung kann auf zweierlei Art geschehen. Einerseits kann die Bilanzgleichung für die Entropie (2.12) linearisiert werden, wobei die linearisierte Entropie durch eine Reihenentwicklung von Druck und Dichte ersetzt wird. Andererseits kann die Differentialgleichung für den Druck (2.36) für kleine Störungen linearisiert werden. Da der Fehler bei der Linearisierung von zweiter Ordnung in den Störgrößen ist, muss der Unterschied der auf verschiedenen Linearisierungen ebenfalls von zweiter Ordnung sein.

2.4.3 Linearisierung der Druckschwankung

Die Linearisierung von Gl. (2.36) erfolgt direkt durch Einsetzen und Vernachlässigen der rechten Seite bei der Störungsausbreitung. Die dissipativen Anteile werden bei der Linearisierung der Impulserhaltung diskutiert. Aus dem dissipativen Term in der Energiegleichung ergibt sich zusätzlich noch ein Produkt aus der doppelten Überschiebung vom Spannungstensor mit dem Gradienten der Geschwindigkeitsschwankung. Dieses Produkt wird als klein angenommen, da die sowohl dissipativen Anteile der mittleren Energiegleichung als auch die Schwankungsgeschwindigkeit klein sind. Die relativ langsam wirkende Wärmeleitung ist vernachlässigbar, sofern die Vorgänge ausreichend schnell ablaufen. Bei Schallwellen, die sich im mit der Strömung bewegten Bezugssystem mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, ist diese Bedingung erfüllt. Ein anderes Bild ergibt sich bei Entropiewellen und Wirbeln, die mit Strömungsgeschwindigkeit konvektiert werden. Daher wird mit dieser Annahme die Strömungsgeschwindigkeit für die Ausbreitung von Entropiewellen und Wirbeln nach unten beschränkt.

$$\underbrace{\frac{D\bar{p}}{Dt} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \bar{U}}_{\text{Grundströmung}} + \frac{Dp'}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{P} + \gamma \bar{p} \nabla \cdot \underline{u}' + \gamma p' \nabla \cdot \bar{U} = \underbrace{-\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \nabla \bar{U}}_{\text{Grundströmung}} \tag{2.43}$$

Nach Abspaltung der Grundströmung ergibt sich also:

$$\frac{Dp'}{Dt} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{P} + \gamma \bar{p} \nabla \cdot \underline{u}' + \gamma p' \nabla \cdot \bar{U} = 0 \tag{2.44}$$

Die Gleichung (2.44) entspricht nahezu einer Massenbilanz in der ϱ vollständig durch p ersetzt und die Ableitungen der Geschwindigkeit mit dem Adiabatenexponenten multipliziert wurden.

2.4.4 Linearisierung der Entropieschwankung

Die zweite Möglichkeit, wie sie in Rienstra und Hirschberg [25] herangezogen wurde, ist eine Linearisierung der Entropie selbst. Die Differentialgleichung für die Entropie wird zunächst linearisiert. Dann wird ein Ansatz für die Schwankung der Entropie und die mittlere Entropie gemacht. Da eine Entdimensionalisierung nicht notwendig ist und auf eine zusätzliche Einheitsgröße definiert werden müsste, wird die Ableitung für die physikalischen Größen ausgeführt und erst am Ende eine dimensionslose Form gewählt.

Die Entropiegleichung (2.12) wird unter der Annahme, dass die viskosen Terme und die Wärmeleitung vernachlässigbare Schwankungen zeigen, in der gleichen Weise aufgespalten. Die Wärmeflüsse ($\tilde{\underline{q}} \approx \tilde{\underline{q}}$) und viskosen Spannungen ($\tilde{\underline{\tau}} \approx \tilde{\underline{\tau}}$) der Grundströmung werden den momentanen Werten gleichgesetzt, wie es im vorhergehenden Abschnitt bei der Linearisierung der Druckgleichung geschehen ist. Ausgangspunkt ist Gl. (2.12), die in physikalischen Größen notiert wird:

$$\varrho T \left(\underbrace{\frac{\tilde{D} \tilde{s}'}{\tilde{D} \tilde{t}} + \tilde{\underline{u}}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{S}}_{\text{Grundströmung}} + \underbrace{\tilde{\underline{U}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{S}}_{\text{Höhere Ordnung}} + \underbrace{\tilde{\underline{u}}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{s}'}_{\text{Grundströmung}} \right) = \underbrace{-\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}} + \tilde{\underline{\tau}} : \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}}}_{\text{Grundströmung}} \quad (2.45)$$

Das führt auf die folgende Gleichung für die Erhaltung der Entropie:

$$\frac{D \tilde{s}'}{D t} + \tilde{\underline{u}}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{S} = 0 \quad (2.46)$$

Eine Änderung der Entropie der Grundströmung führt zu einer Störung der Entropie proportional zur Schwankung der Geschwindigkeit. Gl. (2.19), welche Druck und Dichte im idealen Gas mit der Entropie verknüpft, wird in eine Taylor-Reihe entwickelt, wobei die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden.

$$\tilde{s} \approx C_v \ln \tilde{p} - C_p \ln \tilde{\varrho} + C_v \frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}} - C_p \frac{\tilde{\varrho}'}{\tilde{\varrho}} \quad (2.47)$$

$$\tilde{S} = C_v \ln \tilde{p} - C_p \ln \tilde{\varrho} \quad (2.48)$$

$$\tilde{s}' = C_v \frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}} - C_p \frac{\tilde{\varrho}'}{\tilde{\varrho}} \quad (2.49)$$

Das Ergebnis wird in Gl. (2.46) eingesetzt und die Kontinuitätsgleichung (2.3) in dimensionsbehafteter Form abgezogen.

$$\begin{aligned} & \frac{C_v}{\tilde{P}} \frac{D \tilde{p}'}{D \tilde{t}} - \frac{C_p}{\tilde{\varrho}} \frac{D \tilde{\varrho}'}{D \tilde{t}} \\ & - \frac{C_v}{\tilde{P}^2} \tilde{p}' \tilde{\underline{U}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{C_p}{\tilde{\varrho}^2} \tilde{\varrho}' \tilde{\underline{U}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\varrho} + \frac{C_v}{\tilde{P}} \tilde{\underline{u}}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{P} - \frac{C_p}{\tilde{\varrho}} \tilde{\underline{u}}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\varrho} = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Diese Gleichung wird mit dem Adiabatenexponenten γ weiter umgeformt.

$$\begin{aligned} & \frac{D \tilde{p}'}{D \tilde{t}} - \gamma \frac{\tilde{P}}{\tilde{\varrho}} \underbrace{\left(\frac{D \tilde{\varrho}'}{D \tilde{t}} + \tilde{\underline{u}}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\varrho} + \tilde{\varrho} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}}' \right)}_{\text{Kontinuität}} + \gamma \frac{\tilde{P}}{\tilde{\varrho}} \tilde{\varrho}' \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}}' \\ & - \frac{1}{\tilde{P}} \tilde{p}' \tilde{\underline{U}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{P} + \gamma \frac{\tilde{P}}{\tilde{\varrho}^2} \tilde{\varrho}' \tilde{\underline{U}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\varrho} + \tilde{\underline{u}}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{P} = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

In die dimensionslose Form umgeschrieben ergibt sich eine Gleichung für die Druckstörung:

$$\begin{aligned} \frac{D p'}{D t} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \underline{u}' + \left(\underline{u}' - \frac{p'}{\bar{P}} \bar{\underline{U}} \right) \cdot \nabla \bar{P} \\ + \gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\varrho}} \left(\frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \underbrace{\bar{\underline{U}} \cdot \nabla \bar{\varrho}}_{=-\bar{\varrho} \nabla \cdot \bar{\underline{U}}} + \varrho' \nabla \cdot \bar{\underline{U}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Diese Gleichung entspricht genau wie Gl. (2.44) einer modifizierten linearisierten Massenbilanz, in der die Dichte durch den Druck ersetzt ist. Die Gln. (2.44) und (2.52) unterscheiden sich in einem Term der Ableitung der Grundströmung. Der Unterschied ist plausibel, da bei der Linearisierung der Entropie andere Annahmen gemacht wurden, als bei der Linearisierung des Drucks. Gl. (2.52) entspricht der Formulierung in [25]. Bei konstanter Grundströmung liefern beide Gleichungen das gleiche Ergebnis. Die Linearisierung der Entropie liefert einen Term mit dem Druckgradienten der Grundströmung, während die Linearisierung des Drucks einen Term mit der Geschwindigkeitsdivergenz liefert. Das Ergebnis der beiden Linearisierungen ist bei Vorliegen einer isentropen Grundströmung, wie mit Hilfe der Massenbilanz (2.3) gezeigt wird, gleich.

$$-\frac{p'}{\bar{P}} \bar{\underline{U}} \cdot \nabla \bar{P} = -\frac{p'}{\bar{P}} \bar{\underline{U}} \cdot \gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\varrho}} \nabla \bar{\varrho} = \gamma p' \nabla \cdot \bar{\underline{U}} \quad (2.53)$$

Im Fall einer nicht isentropen Grundströmung sind jedoch Unterschiede von höherer Ordnung zu erwarten. Zum zukünftigen Vergleich beider Theorien wurden beide Varianten der Linearisierung implementiert.

2.4.5 Zusammenfassung der linearisierten Grundgleichungen

Bisher wurden die linearisierten Euler-Gleichungen in dimensionsloser Form abgeleitet und eine Spezialisierung der Ableitungen für Zylinderkoordinaten vorgenommen. Die Grundströmung unterliegt, wie gezeigt wurde, nahezu keinen Einschränkungen. Die einzige wichtige Einschränkung ist bisher, dass die Grundströmung zeitlich konstant, also stationär sein muss. Zur späteren Umsetzung wird angenommen, dass die Grundströmung gegeben ist. Die mittlere Strömung kann beispielsweise durch eine stationäre Strömungssimulation der Euler-Gleichungen, oder eine RANS-Simulation gewonnen werden. Die linearisierten Störungen des mittleren Strömungszustands sind bereits unter der Annahme, dass sowohl die Wärmeleitung, als auch die dissipativen Anteile vernachlässigbare Beiträge liefern, vereinfacht. Das entstehende Gleichungssystem für die Ausbreitung kleiner Störungen im konvektiven Medium ist zusammengefasst:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{D \varrho'}{D t} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{\varrho} + \bar{\varrho} \nabla \cdot \underline{u}' + \varrho' \nabla \cdot \bar{\underline{U}} = 0 \quad (2.54)$$

Impulsgleichungen

$$\frac{D \underline{u}'}{D t} + \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \bar{\underline{U}} \cdot \nabla \bar{\underline{U}} + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{\underline{U}} + \frac{1}{\bar{\varrho}} \nabla p' = 0 \quad (2.55)$$

Druckgleichungen

$$\frac{Dp'}{Dt} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \underline{u}' + \left(\underline{u}' - \frac{p'}{\bar{P}} \bar{\underline{U}} \right) \cdot \nabla \bar{P} = 0 \quad (2.56)$$

bzw.

$$\frac{Dp'}{Dt} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \underline{u}' + \underline{u}' \cdot \nabla \bar{P} + \gamma p' \nabla \cdot \bar{\underline{U}} = 0 \quad (2.57)$$

Die Druckgleichungen unterscheiden sich aufgrund der unterschiedlichen Linearisierung im letzten Term. Im Fall einer homentropen Grundströmung lassen sich die beiden Terme ineinander überführen, so dass sich kein Unterschied ergibt. In einer nicht isentropen Grundströmung liefern beide Arten der Linearisierung unterschiedliche Ergebnisse.

In der Literatur werden meist die linearisierten Eulergleichungen in isentroper Form verwendet. In den wenigen Veröffentlichungen (z. B. [8, 33]), die sich mit nicht isentropen Strömungen beschäftigen, sind meistens Vereinfachungen getroffen worden, so dass der entscheidende Term nicht mehr auftaucht. Es muss daher auch untersucht werden, wie groß die Unterschiede zwischen den beiden Formulierungen sind.

2.5 Dreidimensional axialsymmetrische Form der Grundgleichungen

Im folgenden Abschnitt wird zusätzlich eine axialsymmetrische Geometrie entlang der x -Achse des verwendeten Koordinatensystems angenommen. Die Grundströmung wird ebenfalls axialsymmetrisch angenommen. Beide Vereinfachungen stellen eine starke Abstraktion von der Realität dar, da Flugtriebwerke meist nicht exakt rotationssymmetrisch sind. Selbst bei symmetrischer Geometrie kann nicht zwingend von einer symmetrischen Grundströmung ausgegangen werden, viel mehr ist in den meisten Flug-Situationen eine leichte Schräganströmung zu erwarten.

In einer Laval-Düse hinter der Brennkammer, die Ziel dieser Untersuchung ist, ist eine ausreichend axialsymmetrische Strömung zu erwarten, die die Vereinfachungen rechtfertigt. Die Geometrie der anschließenden Turbinenstufen ist, baulich bedingt, wenigstens näherungsweise axialsymmetrisch. Nicht zuletzt ist die Reduktion des Aufwands zu nennen, der eine solche Vereinfachung sinnvoll macht. Wie im folgenden Abschnitt 2.5 gezeigt wird, sinkt der Aufwand für eine einzelne Simulation extrem. Ein vollständiges dreidimensionales Schallfeld kann, abhängig von der Anzahl der erregten und ausbreitungsfähigen Moden, mit vergleichsweise geringem Aufwand erzeugt werden. Ein weiterer Vorteil der zweidimensionalen Simulation ist die schnelle Verfügbarkeit der Ergebnisse. Während der Entwicklungsphase können somit schnell Entscheidungen getroffen werden. Der Übertragung der Ergebnisse in eine dreidimensionale Simulation steht hier nichts im Wege. Die Formulierung des Systems in kartesischen Koordinaten vereinfacht die Grundgleichungen sogar.

Für eine beliebige Größe $\theta(x, r, \varphi, t)$ sieht der Fourier-Reihenansatz wie folgt aus:

$$\theta(x, r, \varphi, t) = \sum_{m=-M}^M \theta_m(x, r, t) e^{-im\varphi} \quad (2.58)$$

Dieser Ansatz wird für alle Störgrößen des Strömungsfeldes in den Gln. (2.54) - (2.56) verwendet. Für die Dichte ist der Ansatz hier exemplarisch ausgeschrieben:

$$\varrho'(t, x, r, \varphi) = \sum_{m=-M}^M \varrho'_m(t, x, r) e^{-i m \varphi} \quad (2.59)$$

Die Abhängigkeit von der Umfangskoordinate φ wird damit durch die Azimutalmode m ersetzt, ähnlich wie bei einer Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich die Zeit t durch die Kreisfrequenz ω ersetzt wird.

Das Minus bedeutet, dass für positive m die Moden in positiver φ -Richtung laufen, wenn die Zeit der $e^{+i\omega t}$ Konvention folgt. $\theta^m = \theta_{\Re, m} + i \theta_{\Im, m}$ ist die komplexe Amplitude der jeweiligen Größe, die sowohl die Amplitude, als auch die Phaseninformation beinhaltet. Die eigentliche Lösung der Gleichungen ist der Realteil von $\theta_m e^{-i m \varphi}$. Die Grundströmung wird als konstant in der Winkelkoordinate φ angenommen, so dass die Ableitungen nach dem Winkel verschwinden.

$$\theta(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^M [\theta_{\Re, m}(r, z, t) \cos(m\varphi) + \theta_{\Im, m}(r, z, t) \sin(m\varphi)] \quad (2.60)$$

Sowohl Realteil, als auch Imaginärteil müssen einzeln die Differentialgleichungen erfüllen. Bisher wurde das Problem nur von einer differentiellen Abhängigkeit von der Variable φ auf eine unendliche Reihenentwicklung übertragen. Da Sinus und Kosinus orthogonale Funktionen sind, sind die Glieder der Reihenentwicklung entkoppelt, so dass die Berechnung für jedes Reihenglied einzeln möglich ist. Die unendliche Reihe bedeutet bis zu diesem Punkt noch keinen Vorteil bei der Berechnung. Nimmt man die im Kapitel 3 hergeleitete analytische Lösung zur Hilfe, reduziert sich die Zahl der ausbreitungsfähigen (cut-on) Moden bei einer gegebenen Frequenz drastisch. Für den tonalen Anteil des Schalls ist dadurch eine starke Verringerung des numerischen Aufwands erreicht worden.

Der Nabla-Operator für die Schwankungsgrößen wird also durch eine zweidimensionale räumliche Ableitung und einen der Ableitung in φ entsprechenden Zusatzterm ersetzt. Bei den mittleren Strömungsgrößen verschwindet der Zusatzterm. Bei den Schwankungsgrößen wird die φ -Ableitung durch $-i m$ ersetzt. Der Nabla-Operator für die Schwankungsgrößen wird wie folgt identifiziert:

$$\nabla(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{i m}{r}(\cdot) =: \nabla_{x,r}(\cdot) - \frac{i m}{r}(\cdot) \quad (2.61)$$

Spätestens hier wird der Übergang auf die Index-Schreibweise sinnvoll. Die Ableitungen der Einheitsvektoren des mitrotierenden Koordinatensystems (x, r, φ) im Inertialsystem müssen wie im Abschnitt 2.2 dargelegt, beachtet werden, obwohl keine explizite Ableitung nach φ mehr in der neuen Definition vorhanden ist. Das Einsetzen der Definitionsgleichungen für die symbolische Schreibweise liefert die vollständigen Gleichungen, wie sie in der Computational-Aeroacoustic (CAA)-Methode, die im nächsten Kapitel 3 vorgestellt wird, verwendet werden. Die vollständig ausgeschrieben Gleichungen sind dem Anhang A zu entnehmen. Durch Ordnen der Ableitungen nach den unabhängigen Variablen folgt die im Programm umgesetzte Matrix-Vektor-Form

der Grundgleichungen im Anhang A.1. Durch die Abspaltung der Wirbelstärke aus den linearisierten Eulergleichungen wird ein Ausschluss von instabilen physikalischen Lösungen erreicht [6]. Bei der Verwendung der Acoustic-Perturbation-Equations (APE)-Gleichungen wird nur die Rotation der Störungen Null gesetzt, während die Grundströmung nicht verschwindet. Die rotationsfreien Grundgleichungen werden entsprechend Ewert und Schröder [6] notiert:

$$(\bar{U} \cdot \nabla) \underline{u}' + (\underline{u} \cdot \nabla) \bar{U} = \nabla (\bar{U} \cdot \underline{u}') + \underline{u}' \times (\nabla \times \bar{U}) \quad (2.62)$$

Die abgespaltenen Terme werden in [6] als Quellterme betrachtet und aus einer numerischen Simulation der vollen Navier-Stokes-Gleichungen im Quellgebiet gewonnen.

Die mit der zweiten Vektorform unter Vernachlässigung der Rotation der Störungsgeschwindigkeit gewonnene Formulierung der Grundgleichungen ist dem Abschnitt A.2 zu entnehmen. Die abgespaltene Wirbelstärke-Störung wird, im Gegensatz zu der Quellformulierung [6], hier Null gesetzt. Die rotationsfreie Formulierung der Grundgleichungen spaltet auf diese Art die Ausbreitung von instabilen Scherschichten vollständig ab.

Durch die verschiedenen Formulierungen ergibt sich eine Reihe von möglichen Gleichungen zur Modellierung von verschiedenen Problemen. Weiterhin besteht die Möglichkeit die Entropie der Grundströmung als homogen anzunehmen. Die Störungsausbreitung wird damit isentrop in einer homentropen Grundströmung modelliert. Homentropie der Grundströmung bedeutet, das gesamte Strömungsfeld ist isentrop. Die Annahme schließt die Modellierung von Entropiewellen aus, wurde aber zu Vergleichszwecken und für die Rückwärtskompatibilität im Programm belassen. Im Anhang A.3 sind die vereinfachten, für Real- und Imaginärteil vollständig entkoppelbaren, Gleichungen im Falle fehlenden Dralles und konstanter Entropie wiedergegeben.

Bei der Erstellung eines ausführbaren Programms wird der CAA-Code zunächst entsprechend der eingestellten Präprozessoroptionen angepasst und dann übersetzt und zu einem ausführbaren Programm gelinkt. Dieser Mechanismus wurde verwendet, um ohne Einbußen bei der Leistungsfähigkeit die verschiedenen Annahmen bei der Modellierung verfügbar zu machen. In Tabelle A.1 im Anhang sind die Optionen und ihre Kombinationsmöglichkeiten zusammengestellt.

Kapitel 3

Numerisches Verfahren

In diesem Kapitel werden zunächst die numerischen Methoden und Diskretisierungsverfahren, auf denen die CAA-Methode basiert, vorgestellt. Danach werden die problemangepassten Randbedingungen hergeleitet. Die Randbedingung für die schallharte Wand wird überprüft und auf das vorliegende Problem erweitert. Da die abgeleitete Formulierung zu fehleranfällig und kompliziert ist, wird ein stark vereinfachter Weg zur Implementierung gefunden. Im folgenden Abschnitt werden die physikalischen Randbedingungen an schallharten Wänden, der Symmetrieachse und der Schallquelle zusammengestellt. Am Ende des Kapitels werden einige Randbedingungen vorgestellt, die zum reflexionsfreien Abschluss des Rechengebiets führen. Dabei liegt ein besonderer Schwerpunkt auf der Perfectly-Matched-Layer (PML)-Randbedingung.

3.1 Diskretisierungsverfahren

Die verwendeten Diskretisierungsverfahren und -methoden sind bereits in der Diplomarbeit von Schönwald [26] ausführlich diskutiert worden. Im folgenden Abschnitt werden daher nur die Änderungen gegenüber dem dort beschriebenen Vorgehen erläutert. Außerdem sind Referenzen zu den verwendeten grundlegenden numerischen Methoden und dazu kurze Erläuterungen enthalten.

3.1.1 Räumliche Diskretisierung

Die räumliche Diskretisierung basiert auf dem zentralen Sieben-Punkte-Differenzenstern 4. Ordnung aus Tam und Webb [30]. Dieser Differenzenstern ist zur Berechnung der räumlichen Ableitungen von harmonischen Funktionen in kartesischen Koordinaten bei orthogonalen Gittern optimiert worden. Der freie Optimierungskoeffizient ist entsprechend Tam und Shen [29] $\eta = 1.1$ gesetzt, um eine hohe Genauigkeit schon bei einer geringen Auflösung von theoretisch 5.4 Punkten pro Wellenlänge (PPW) zu erreichen [26]. Dadurch verringert sich gleichzeitig der theoretische Rechenaufwand um 10 % gegenüber dem Standard Schema mit $\eta = \frac{\pi}{2}$ [26]. Die zum Erreichen einer ausreichenden Genauigkeit notwendige Auflösung liegt bei etwa zwölf PPW.

Um die Symmetrieeigenschaften des zentralen Differenzensterns besser zu nutzen wird abweichend von der bisherigen Implementierung die Reihenfolge der Berechnung geändert. Folgende Gleichung beschreibt dann beispielsweise die eindimensionale Ableitung des Drucks:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \doteq \sum_{i=1}^3 a_i (p_i - p_{-i}) \quad (3.1)$$

Der Vorteil einer solchen symmetrischen Implementierung zeigt sich insbesondere an der Achse der verwendeten Zylinderkoordinaten. Es treten keine numerischen Fehler mehr auf, die einen von Null verschiedenen Wert der Störgrößen für höhere m -Moden an der Achse verursachen. Die ursprüngliche Berechnungsmethode begünstigt dagegen Rundungsfehler, die in den Zwischenergebnissen der Summation in Gl. (3.1) auftreten und eine exakte Aufhebung trotz Symmetrie der Eingangsdaten verhindern.

An den Rändern werden einseitige Differenzensterne verwendet, wie sie in Tam [32] zu finden sind. Die Auflösung an der Wand wird im Allgemeinen etwas höher sein, daher werden hier

mit $\eta = \frac{\pi}{2}$ optimierte Differenzensterne verwendet. Die Optimierung für größere Wellenlängen wirkt sich stabilisierend auf das Verfahren aus, was insbesondere bei der Formulierung der nicht reflektierenden Randbedingung und der Terminierung der Pufferzonen mit Wänden eine Rolle spielt.

Da am Rand keine spezielle Routine verwendet werden soll, um die räumlichen Ableitungen zu bestimmen, wird die Gl. (3.1) bei der Implementierung um entsprechende Korrekturterme erweitert:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \doteq \sum_{i=1}^3 (a_i (p_i - p_{-i}) - (a_{-i} - a_i) p_{-i}) + a_0 p_0 \quad (3.2)$$

Bei der Berechnung der räumlichen Ableitungen nach Gl. (3.2) ergeben sich vier zusätzliche Multiplikationen. Es kann jedoch eine Abfrage gespart werden, die für eine Unterscheidung zwischen zentralem und einseitigem Differenzenstern notwendig wäre. Die allgemeine Form Gl. (3.2) ist nicht wesentlich aufwändiger als die bisher verwendete schrittweise Berechnung und wird daher zur Bestimmung aller räumlichen Ableitungen im CAA-Code benutzt.

Eine Übersicht über verschiedene Diskretisierungsmethoden und deren Vergleich kann Hu u. a. [11], Lele [16] sowie Tang und Baeder [35] entnommen werden. Die gewählte räumliche Diskretisierung stellt den besten Kompromiss zwischen der Anzahl der Punkte, die zur Berechnung notwendig sind und der Genauigkeit des Verfahrens dar. Die Idee dabei ist, dass die Sonderbehandlung an Rändern und die Ungenauigkeiten durch räumliche Gitter bei größeren Differenzensternen die theoretisch erhöhte Genauigkeit bei technischen Anwendungen nicht nutzbar machen. Der in Genauigkeit und Ausdehnung überlegene kompakte Fünf-Punkte-Differenzenstern von Lele [16] wird nicht ausgewählt, da ein entsprechendes dreidimensionales Gegenstück fehlt. Die Entwicklung wäre damit auf zweidimensionale Probleme beschränkt. Die im CAA-Programm verwendeten Koeffizienten der räumlichen Diskretisierung sind im Anhang B.1 tabellarisch zusammengestellt.

3.1.2 Zeitliche Diskretisierung

Die zeitliche Diskretisierung verwendet alternierend zwei fünf- bzw. sechsstufige explizite Runge-Kutta-Verfahren, wie es in Hu u. a. [11] vorgeschlagen wird. Diese Runge Kutta-Verfahren sind optimiert für geringe Dispersion und geringe Dissipation und werden daher als Low-Dissipation Low-Dispersion Runge-Kutta Verfahren (LDDRK) bezeichnet. Wegen der Erhaltung der Dispersionsrelation wird das gesamte Verfahren in Verbindung mit der räumlichen Diskretisierung auch "Dispersion-Relation-Preserving" oder auch kurz DRP genannt. Beide Verfahren der Zeintegration und damit auch das gesamte Verfahren, sind von 4. Ordnung genau. Der Vorteil der alternierenden Methode ist, dass systematische Fehler des einen Verfahrens durch die Diskretisierung sich nicht über die Zeit summieren können. Im Allgemeinen ist daher eine größere Stabilität und Genauigkeit zu erwarten, als bei einem Einzelverfahren der gleichen Ordnung [11].

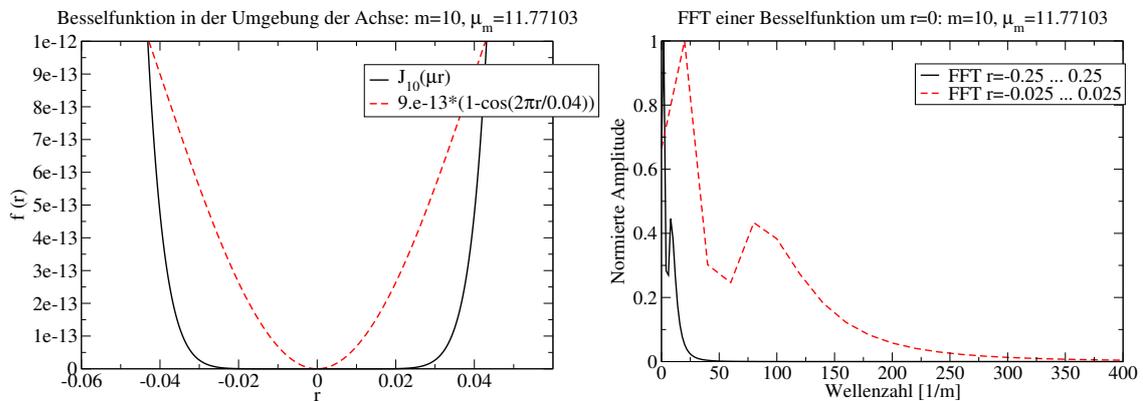
Die Implementierung des LDDRK erfolgt "2N-Storage-Form", um den Arbeitsspeicher optimal zu nutzen [28]. Die Implementierung wird den Gegebenheiten des alternierenden Runge-Kutta-Verfahrens insbesondere durch eine Einsparung von Variablen gerecht. Dafür müssen al-

lerdings die Koeffizienten a_i , b_i und c_i , wie sie im Abschnitt B.3 gegeben sind, entsprechend Stanescu und Habashi [28] angepasst werden.

Eine vergleichende Übersicht der verschiedenen DRP-Verfahren kann Hu u. a. [11] entnommen werden. Das alternierend fünf- bzw. sechsstufige (5/6)-LDDRK zeigt bei einem Vergleich mit anderen optimierten einstufigen und mehrstufigen Verfahren das höchste Genauigkeitslimit [11]. Das bedeutet, dass die Zeitschrittweite größer als bei anderen Verfahren gewählt werden kann und damit der etwas höhere Rechenaufwand für die zusätzlichen Stufen mehr als ausgeglichen wird. Für nichtlineare Probleme gibt Stanescu und Habashi [28] eine minimale Auflösung von 261 Zeitschritten je Periode an. Ein Vergleich mit verschiedenen anderen Verfahren ist in Tang und Baeder [35] zu finden.

3.1.3 Künstliche, selektive Dämpfung (SAD)

Die diskretisierte Differentialgleichung erlaubt unphysikalische Lösungen, die sich als Gitterschwingungen, sogenannte spurious waves, ausbreiten [31]. Problematisch für die Stabilität des Runge-Kutta-Verfahrens (LDDRK) sind diese Wellen vor allem deshalb, weil sie sich mit mehrfacher Schallgeschwindigkeit ausbreiten [34]. Zur Verringerung dieser Gitterschwingungen wird eine selektive Dämpfungsfunktion eingeführt, die speziell kurzwellige Anteile mit einer der Gitterweite entsprechenden Wellenlänge entlang einer Gitterlinie herausfiltert und bedämpft.



links: Im Vergleich mit einer angepassten Kosinus Funktion

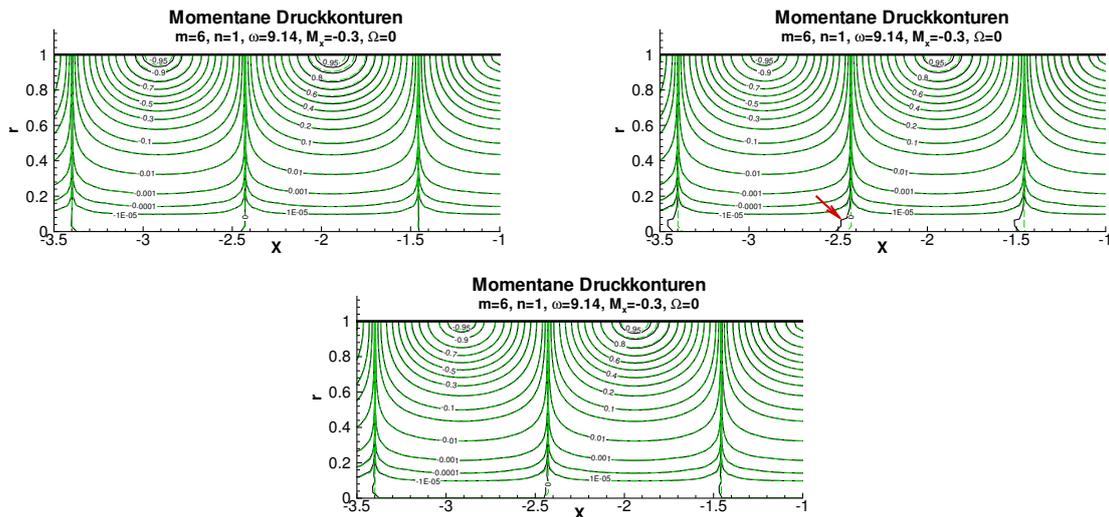
rechts: räumliche FFT für verschiedene Ausschnitte von $J_{10}(\mu r)$ symmetrisch zu $r = 0$

Abbildung 3.1: Verhalten der Bessel-Funktion 10. Ordnung an der Achse

Tam u. a. [31] schlagen vor, eine Gauß-Verteilung als Vorlage für kurzwellige Schwankungen zu benutzen. Diese Vorlage wird dann in eine Fourier-Reihe entwickelt, wobei die Anzahl der Fourier-Koeffizienten auf drei beschränkt wird. Die Summe der Fourier-Koeffizienten verschwindet, so dass langwellige Störungen nicht bedämpft werden. Da die Gitterschwingungen maximal die halbe Wellenlänge des Differenzensterns haben können, wird die Gauß-Verteilung mit π normiert und um 1 zentriert. Die freien Parameter sind damit die Standardabweichung σ der Gauß-Verteilung und die Integrationsgrenze β bei der Fourier-Transformation. Die Standardabweichung wird in Anlehnung an Tam u. a. [31] mit 0.2π bzw. 0.3π angenommen. Die

Integrationsgrenze ist genau wie in [31] zu 0.65π gewählt worden. Die sich ergebenden Dämpfungskoeffizienten sind im Anhang B.2 abgedruckt.

Die Annahmen, unter denen die künstliche, selektive Dämpfung hergeleitet wird, treffen nicht auf die Eigenlösungen in Zylinderkoordinaten zu. Die Achse ($r = 0$) der Zylinderkoordinaten lässt Lösungen zu, die speziell bei höheren Azimutalmoden eine Mischung aus vielen verschiedenen Fourier-Reihengliedern darstellen (vgl. Abbildung 3.1). Die Dämpfungsfunktion filtert die kurzwelligen Anteile heraus und die restlichen langwelligen Anteile erfüllen die Differentialgleichung an der Achse nicht mehr. Das Problem kann offensichtlich auch nicht durch eine Gitterverfeinerung gelöst werden, da dann noch mehr Reihenglieder abgeschnitten werden (vgl. Abbildung 3.1). Obwohl der Funktionswert der Bessel-Funktion kleiner wird, steigt der relative Abschneidefehler stark an, wenn das Gitter entlang der Achse verfeinert wird. Die für das DRP-Schema unoptimale Lösung ist auch dafür verantwortlich, dass ein Unterschreiten der maximal möglichen Zeitschrittweite sich zuerst durch Instabilitäten an der Achse der Zylinderkoordinaten zeigt.



Numerische Beispiele (Volllinie) im Vergleich mit der analytischen Lösung (gestrichelte Linie)

(links oben: ohne SAD rechts oben: mit SAD $\sigma = 0.2$
 unten: an der Achse ($r < 0.1$) keine SAD, sonst $\sigma = 0.2$)

Abbildung 3.2: Durch die künstliche, selektive Dämpfung verursachte Fehler

Dieses Problem kann leider nicht allgemein gelöst werden, da die künstliche, selektive Dämpfung bei verzerrten und gestauchten Gittern unvermeidlich auch an der Achse angewendet werden muss. Eine mögliche Lösung des Problems kann durch die im Abschnitt 3.2.2 später vorgestellte Interpolation erreicht werden. Für Testfälle, bei denen das Gitter an der Achse nahezu ungestreckt und orthogonal ist, kann die künstliche, selektive Dämpfung nahe der Achse in radialer Richtung auch entfallen vgl. Abbildung 3.2.

3.1.4 Parallelisierung

Das CAA-Verfahren verwendet strukturierte Gitter, die sich besonders einfach in logische Blöcke aufspalten lassen. Daher wird eine blockorientierte Parallelisierung gewählt. Da der zentrale Sieben-Punkte-Differenzenstern an den Blockgrenzen verwendet wird um Fehler zu minimieren, müssen sechs Punkte zwischen den jeweils benachbarten Multiblocken ausgetauscht werden. Der Austausch erfolgt unter Verwendung der Bibliotheken von LAM/MPI, welche derzeit unter dem Copyright der Indiana University stehen [37]. Die logische Organisation und Aufteilung des blockorientierten körperangepassten Gitters basiert, bis auf den Wechsel der verwendeten Software, unverändert auf den in Schönwald [26] beschriebenen Methoden.

Die Beschreibung der Randbedingungen nutzt die Blockstruktur, so dass beim Übergang von Randbedingungen ein neuer Block eingeführt werden muss. Jeder Block wird in neun Teilblöcke aufgeteilt, wobei jeweils vier Kanten und vier Eckvolumen entstehen. Die Kanten erhalten eine Randbedingung zugewiesen. Rand- und Eckvolumen haben mit Ausnahme einer Wand-Randbedingung eine Ausdehnung von drei Gitterzellen normal zum Rand. Die Wand-Randbedingung erfordert eine Schicht von virtuellen Punkten hinter der Wand zur Beschreibung des Drucks, und ist daher vier Gitterlinien hoch.

Die Ecken müssen je zwei Randbedingungen haben. Es war bisher immer möglich, die Ecke mit Hilfe einer Randbedingung vollständig zu beschreiben. Diese Beschreibung impliziert jedoch, dass die jeweils andere Randbedingung keine Sonderbehandlung verlangt. Da diese Annahme für reale Konfigurationen eine sehr starke Einschränkung bedeutet, sollte die Beschreibung der Eckvolumen in Zukunft um eine unabhängige Beschreibung aller Ränder und Ecken erweitert werden.

Bei der Generierung des Gitters und der Aufstellung der Austauschlogik ergeben sich Sonderfälle, wenn die Wand eines Kegels an der Achse endet. Das vordere Achsende im Triebwerkeinlauf ist ein Beispiel für einen Übergang zwischen zwei Randbedingungen, nämlich der Wand-Randbedingung und der Symmetrie-Randbedingung, an der Blockgrenze. Ein solcher Übergang liefert eine Differenz in der Anzahl der Punkte im jeweiligen Block. Die Differenz lässt sich beheben, da die Symmetrie-Randbedingung die gespiegelten Punkte aus den inneren Punkten berechnen kann. Die jeweiligen Randbedingungen stellen auch Bedingungen an das Gitter, die bereits bei der Gittergenerierung beachtet werden müssen. So muss an der Achse beispielsweise sichergestellt werden, dass die drei Gitterlinien unterhalb der Achse exakt den an der Achse gespiegelten letzten drei Gitterlinien oberhalb der Achse entsprechen.

3.2 Physikalische Randbedingungen

3.2.1 Schallharte Wand

An einer schallharten Wand wird die an das Störungsfeld gestellte Bedingung mit Hilfe von virtuellen Punkten in der Wand, sogenannten Ghostpoints, eingebracht. Verfahren höherer Ordnung verlangen einen weiteren Freiheitsgrad an der Wand, um die Nichtdurchströmungsbedingung zu erfüllen [34]. Üblicherweise wird nur der Druck im Ghostpoint zur Einbringung des Freiheitsgrades benutzt [34]. Zur Erfüllung einer Haftbedingung wäre ein weiterer Freiheitsgrad notwendig [34]. Ein solcher virtueller Punkt in der Wand ist in Abbildung 3.3 zu erkennen. Die zur Berechnung dieser virtuellen Punkte möglichen Konzepte werden im folgenden Abschnitt erläutert.

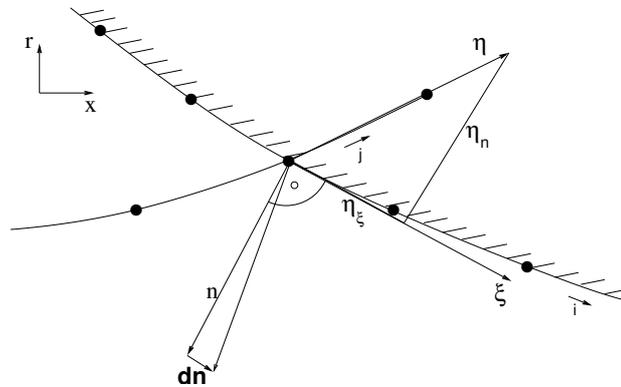


Abbildung 3.3: Der Normalenvektor an einer Wand entlang der i -Koordinaten Linie

Die ideal schallharte Wand ist nicht durchströmt und ändert unter der Einwirkung des Schalldrucks ihre Position nicht. Die Nachgiebigkeit der Wand ist Null. Die Normalenkomponente des Geschwindigkeitsvektors muss an der Wand verschwinden, um eine unendlich starre nicht durchströmte Wand zu modellieren.

$$\underline{n} \cdot \underline{u}' = 0 \quad (3.3)$$

Die Grundströmung darf bei korrekter Modellierung ebenfalls keine Normalenkomponente der Geschwindigkeit an der Wand zulassen. Sie kann, wie im Kapitel 2 gezeigt wurde, im Allgemeinen reinbungsbehaftet sein. Zusätzlich kann das Verschwinden des Geschwindigkeitsvektors der Grundströmung an der Wand gefordert werden, wenn die Reibungsterme in der Grundströmung berücksichtigt werden. Die Modellierung der Störungsausbreitung vernachlässigt solche Reibungseffekte, daher gilt für die Geschwindigkeitskomponenten der Störung nur die Nichtdurchströmungsbedingung (Slip-Wall).

Im Allgemeinen liegt die Koordinatenrichtung, in der der Ghostpoint eingebracht wird, nicht senkrecht zur Wand, wie es in Abbildung (3.3) schematisch dargestellt ist. Die bisherige Implementierung der Wand-Randbedingung ging jedoch von einer solchen orthogonalen Konfiguration aus. Zusätzlich wurde die Änderung des Normalenvektors entlang der Wand (dn in Abbildung 3.3) und etwaige Gradienten der Grundströmung, beispielsweise in einem Staupunkt,

vernachlässigt. Im folgenden Abschnitt wird die Formulierung der Wand-Randbedingung um die ursprünglich vernachlässigten Terme erweitert.

Indirekte Bestimmung

Das mittlere Strömungsfeld muss eine verschwindende Normalenkomponente der Geschwindigkeit an der Wand haben. Anderenfalls muss eine kleine Störung der mittleren Geschwindigkeit einen Gleichanteil beinhalten. Das steht im Widerspruch zur Definition der beiden Anteile. Daher muss sowohl der Gleichanteil als auch der Schwankungsanteil einzeln die Wand-Randbedingung erfüllen. Die Impulsbilanz (2.55), multipliziert mit dem Normalenvektor der Wand, liefert eine Bedingung an den Gradienten der Druckstörung in Richtung des Normalenvektors.

$$\underline{n} \cdot \left(\frac{D \underline{u}'}{Dt} \right) + \underline{n} \cdot \left(\frac{\rho'}{\rho} \bar{\underline{U}} \cdot \underline{\nabla} \bar{\underline{U}} \right) + \underline{n} \cdot (\underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \bar{\underline{U}}) + \underline{n} \cdot \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p' = 0 \quad (3.4)$$

Die Wand soll ideal starr sein, daher ändert sich der Normalenvektor nicht mit der Zeit. Der Normalenvektor kann in die Zeitableitung gezogen werden. Außerdem wird die Abkürzung $\underline{\nabla}_n := \underline{n} \cdot \underline{\nabla}$ für die Normalenableitung eingeführt. Die Zeitableitung der Normalengeschwindigkeit verschwindet an der nicht durchströmten Wand. Die Bedingung, die an die Normalenableitung der Druckschwankung gestellt werden muss, lautet also:

$$\underline{\nabla}_n p' = -\bar{\rho} \bar{\underline{U}} \cdot \underline{\nabla} \underline{u}' \cdot \underline{n} - \rho' \bar{\underline{U}} \cdot \underline{\nabla} \bar{\underline{U}} \cdot \underline{n} - \bar{\rho} \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \bar{\underline{U}} \cdot \underline{n} \quad (3.5)$$

Das ist bereits das Ergebnis, wenn die Information, dass die Größen der mittleren Strömung die Randbedingung erfüllen, nicht benutzt werden soll. Die Normalenableitung des Drucks ist als Funktion von Ableitungen der Schwankungsgrößen und der Grundströmung gegeben. Da diese Größen alle bekannt sind, ist damit eine Berechnung des Drucks in einem virtuellen Punkt hinter der Wand möglich, der für eine Erfüllung der Randbedingung im nächsten Zeitschritt sorgt.

Im Gegensatz zu der normalerweise verwendeten Randbedingungen wird die Krümmung der Wand in Form der Änderung des Normalenvektors berücksichtigt. Die Ableitung des Normalenvektors $d\underline{n}$ ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Die Berechnung erfolgt entlang der Wand, die einer Koordinatenlinie im körperangepassten Gitter entspricht. Die Lage der entsprechenden ko- und kontravarianten Koordinaten des Rechengebiets sind ebenfalls dargestellt. Da im Allgemeinen das Gitter nicht orthogonal zur Wand gelegt werden kann, wird der errechnete Druckwert um die Komponente parallel zum Gitter korrigiert. Die Korrektur addiert die Ableitung des Drucks entlang der Wand zu dem errechneten Wert der Ableitung des gestörten Drucks, um einen Wert in der Position des virtuellen Punktes zu erhalten. Die Ableitung wird in der natürlichen Basis des Rechengitters vorgenommen. Die Darstellung lautet für die Normalenableitung von p' wie folgt:

$$\underline{\nabla}_n p' = \underline{n} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Umgestellt nach der Ableitung nach η oder ξ ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den Druck im virtuellen Punkt in der Wand.

$$\frac{\partial p'}{\partial \eta} = \frac{1}{(n_x \eta_x + n_r \eta_r)} \left[\nabla_n p' - (n_x \xi_x + n_r \xi_r) \frac{\partial p'}{\partial \xi} \right] \quad (3.7)$$

Der Normalen-Einheitsvektor \underline{n} steht senkrecht zur Koordinatenlinie der Wand, wobei die Orientierung des Normalenvektors in der oben gegebenen Formulierung keine Rolle spielt. Er kann aus der kovarianten Basis bestimmt werden. Danach wird die räumliche Diskretisierung rückwärts angewendet, um einen Druck im Ghostpoint zu berechnen. Es ergibt sich folgende Gleichung für den Wandpunkt mit dem Index w :

$$p'_w = \frac{\partial p'}{\partial \eta} - \frac{1}{a_1} \sum_{i=w+1}^{w+7} a_i p'_i \quad (3.8)$$

Der indirekte Weg zur Bestimmung des Drucks im Ghostpoint ist kompliziert. Zusätzlich zu jeder Option bei der Auswahl der Differentialgleichung für die Geschwindigkeiten (vgl. Tab. A.1) ist eine Implementierung für den virtuellen Punkt notwendig, wenn der indirekte Weg zur Bestimmung gewählt wird. Die schrittweise Bestimmung der Normalenableitung und der Ableitung der Geschwindigkeitskomponenten nach der Zeit auf dem indirekten Weg ist anfällig gegen Rundungsfehler. Die Berücksichtigung der künstlichen Dämpfung im Feld und im Bereich der nicht reflektierenden Pufferzonen würde das System noch wesentlich komplizierter machen. Bleiben die Terme unberücksichtigt, ergibt sich ein Fehler, der zu einer Inkonsistenz der Randbedingung führt. Daher ist diese Art der Randbedingung nur stabil, wenn vor jedem Zeitschritt die Normalengeschwindigkeit auf Null zurückgesetzt wird, wie es in Tam und Dong [34] beschrieben ist. Außerdem ist eine Sonderbehandlung der Wand bei der Implementierung der künstlichen, selektiven Dämpfung (SAD) notwendig. Da der Aufwand und das Ergebnis bei dieser Form der Implementierung nicht zufriedenstellend in Einklang zu bringen sind, wurde eine bessere Implementierung der Wand-Randbedingung gesucht.

Direkte Bestimmung

Mit dem Ziel eine einfache und gleichzeitig generelle Formulierung für die Wand-Randbedingung zu finden, wurde die Bestimmungsgleichung für den virtuellen Wandpunkt nochmals untersucht. Maßgeblich ist dabei die Berücksichtigung der künstlichen Dämpfung, wie auch der veränderten Differentialgleichung durch die nicht reflektierenden Randbedingungen. Dabei sollen möglichst viele der bereits implementierten Funktionen benutzt werden, um den Rundungsfehler durch unterschiedliche Wege der Berechnung möglichst gering zu halten. Gleichzeitig sinkt der Aufwand und die Fehleranfälligkeit bei einer Änderung an der Differentialgleichung. Die im Programm gelöste Differentialgleichung wird durch die physikalischen und numerischen Flussterme wie folgt dargestellt:

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = \underline{F}_{phys.}(\underline{q}) + \underline{F}_{Rand}(\underline{q}) + \underline{F}_{SAD}(\underline{q}) \quad (3.9)$$

$\underline{F}_{Rand}(\underline{q})$ und $\underline{F}_{SAD}(\underline{q})$ kennzeichnen dabei die zusätzlichen Flussterme in der künstlichen Pufferzone, die als Randbedingung am offenen Ende verwendet wird, und durch die SAD. Die

Randbedingung soll für die numerische Lösung auch in einer gedämpften Randzone erfüllt werden. Daher muss die gleiche Bedingung wie bei der indirekten Bestimmung (Gl. (3.4)) für die numerisch bestimmte Zeitableitung gelten. Der einfachste Weg zur Bestimmung ist den vorherigen Druck für den virtuellen Wandpunkt zunächst beizubehalten und die Zeitableitungen an der Wand zu bestimmen. Der aktuelle Druck im Ghostpoint kann dann im Anschluss aus dem errechneten Fehler bestimmt werden. Die mit dem vorherigen Druck im Ghostpoint (mit \hat{p}'_w) bestimmte Zeitableitung von u' und v' wird benutzt, um den neuen Druck im virtuellen Punkt zu bestimmen. Dazu wird der Differenzenstern einmalig umgekehrt angewendet:

$$p'_w = \hat{p}'_w - \frac{\bar{\varrho} (n_x \frac{\partial \hat{u}'}{\partial t} + n_r \frac{\partial \hat{v}'}{\partial t})}{a_w (n_x \eta_x + n_r \eta_r)} \quad (3.10)$$

Das Ziel ist möglichst viele bereits implementierte Routinen zu benutzen. Es kann erreicht werden, indem die fehlerbehaftete Zeitableitung mit der bereits implementierten Routine zur Berechnung der Flüsse bestimmt wird. Damit diese nicht doppelt aufgerufen werden muss, wird nach der Korrektur des virtuellen Wendepunkts, die gesamte Wandschicht mit vier Punkten korrigiert. Dazu müssen nur die Differentialgleichungen in x - und r -Richtung nochmals aufgerufen werden. Dabei wird aber nur mit der Änderung der Ableitung des Drucks durch den Korrekturdruck p'_k eingegeben und die anderen Ableitungen Null gesetzt.

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_k = \frac{a_j}{a_w} \eta_x \frac{\bar{\varrho} (n_x \frac{\partial \hat{u}'}{\partial t} + n_r \frac{\partial \hat{v}'}{\partial t})}{(n_x \eta_x + n_r \eta_r)} \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial r} \right)_k = \frac{a_j}{a_w} \eta_r \frac{\bar{\varrho} (n_x \frac{\partial \hat{u}'}{\partial t} + n_r \frac{\partial \hat{v}'}{\partial t})}{(n_x \eta_x + n_r \eta_r)} \quad (3.12)$$

Die direkte Bestimmung des Drucks im Ghostpoint bietet weiterhin den Vorteil, dass das Koordinatennetz nicht orthogonal zur Wand sein muss. Bei der Bestimmung des Normalenvektors zur Wand muss lokal die Richtung einer Tangente an die Wand gebildet werden. Der Normalenvektor wird anschließend aus der Tangente durch Drehung um 90° gewonnen. Im dreidimensionalen Fall lässt sich das gleiche Resultat mit Hilfe des Kreuzprodukts erzielen. Die Formulierung für den virtuellen Punkt ist richtungsunabhängig und stellt die gleichen Anforderungen an das Gitter wie das innere Feld. Insbesondere entspricht die Wand-Randbedingung in dieser Form exakt dem in Tam und Dong [34] vorgeschlagenen Vorgehen.

3.2.2 Randbedingung an der Achse

Die Achse stellt eine Berandung des Rechengebiets dar, an der physikalische Randbedingungen angegeben werden können. Dabei handelt es sich um Symmetrie- bzw. Antimetriebedingungen die ausschließlich von der Nummer der Azimutalmode m abhängen. Zur Einbringung der axialen Randbedingung werden drei Gitterlinien unterhalb der Achse hinzugefügt. Dadurch kann zur Berechnung der Ableitungen auf und oberhalb der Achse ein symmetrischer Differenzenstern verwendet werden, der der Symmetrie oder Antimetrie an der Achse insbesondere gerecht wird. Für die Implementierung der axialen Randbedingung wird davon ausgegangen, dass die

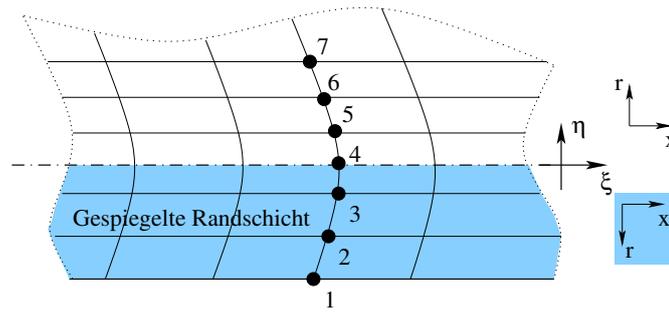


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung des Orientierungswechsels an der Achse

Randpunkte außerhalb des inneren Rechengebiets an der Achse gespiegelte Bildpunkte der drei Gitterlinien oberhalb der Achse sind.

Die Randbedingung an der Symmetrieachse ergibt sich aus dem Ansatz (2.58), wenn die Winkelkoordinate $\varphi = \pi$ gesetzt wird. Dabei ist zu beachten, dass die Geschwindigkeitskomponenten unterhalb der Achse dadurch in einem um 180° um die x -Achse gedrehten Koordinatensystem notiert werden. Die j -Koordinate des Rechengitters bezieht sich auf die über der Achse verwendete Orientierung. Dadurch ergibt sich ein Orientierungswechsel zwischen der natürlichen Basis $(\underline{\eta}, \underline{\xi})$ des Rechengitters und der Basis der Zylinderkoordinaten $(\underline{e}_x, \underline{e}_r, \underline{e}_\varphi)$. Die Verhältnisse sind in Abbildung 3.4 dargestellt, wobei die \underline{e}_φ -Richtung jeweils ein Rechtssystem mit den beiden anderen Vektoren bildet. Das ist die Ursache dafür, dass r unterhalb der Achse negativ eingegeben wird. Die radiale und azimutale Geschwindigkeit sind durch den Orientierungswechsel ebenfalls mit einem Vorzeichenwechsel behaftet. Insgesamt ergeben sich folgende Gleichungen für die axiale Randbedingung, wenn $j = 4$ auf der Achse gilt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho'_j &= (-1)^m \varrho'_{8-j} \\ u'_j &= (-1)^m u'_{8-j} \\ v'_j &= -(-1)^m v'_{8-j} \\ w'_j &= -(-1)^m w'_{8-j} \\ p'_j &= (-1)^m p'_{8-j} \end{aligned} \right\} \text{ mit } j = 1, \dots, 3 \quad (3.13)$$

Die Achse ($r = 0$) stellt eine Singularität der verwendeten Zylinderkoordinaten dar. Die radiale Koordinate r verschwindet und damit wird die Ableitung in azimutaler Richtung $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ singular. Diese singuläre Linie erfordert somit eine Sonderbehandlung, die im vorliegenden Programm wahlweise in Form einer Interpolation (Präprozessoroption „CAA_INTERPOL“) oder standardmäßig in Form einer Berechnung mit Hilfe der Definition des Differenzenquotienten umgesetzt wird. Da die radiale Koordinate bei kleiner Gitterweite auch schon vor Erreichen von $r = 0$ zu starken Fehlern und damit Instabilitäten führen kann, ist im Programm eine Variable ε vorgesehen, die die Sonderbehandlung für kleine Radien einschaltet.

Die Singularitätsbehandlung, wie sie bisher im CAA-Programm angewendet wurde, bezieht sich ausschließlich auf die Ableitung in φ . Unter der Annahme, dass die Werte an der Achse

verschwinden, werden die aus der azimuthalen Ableitung hervorgehenden, mit $\frac{1}{r}$ multiplizierten Terme ersetzt [17]. Dazu wird die Definition des Differenzenquotienten benutzt:

$$\frac{dp'}{dr} := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{p'(r) - p'(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{p'(r)}{r} \quad (3.14)$$

Dieses Vorgehen liefert falsche Ergebnisse, wenn der Wert auf der Achse nicht exakt Null ist, daher ist vor jedem Zeitschritt eine Interpolation notwendig. Die Näherung versagt vollständig, wenn ein Punkt außerhalb der Achse damit berechnet wird, da hier weder r noch der Wert der Störgröße verschwindet. Außerdem gehen für die $m = 0$ Mode und die $m = 1$ Mode einige Terme nur gemeinsam gegen Null, so dass zwischenzeitlich unendliche Werte vorliegen können [17].

Im vorliegenden Programm wurde daher eine Interpolationsroutine eingeführt, die unter Berücksichtigung der physikalischen Eigenschaften der jeweiligen Mode einen Wert auf der Achse und gegebenenfalls auch nahe der Achse bestimmen kann. Es wird dazu angenommen, dass Druck, Dichte und die axiale Geschwindigkeit sich an der Achse wie die Bessel-Funktionen m -ter Ordnung verhalten. Die radiale und azimuthale Geschwindigkeit verhalten sich wie Bessel-Funktionen $(m - 1)$ -ter Ordnung. Mit der Näherung $J_m(r) \sim r^m$ aus Rienstra und Hirschberg [25] für das Verhalten von Bessel-Funktionen bei $r \rightarrow 0$ kann der Wert auf der Achse berechnet werden.

$$p'(r_1) \approx \frac{p(r_0)}{r_0^m} r_1^m \quad (3.15)$$

Die Gleichung (3.15) gilt exakt für $r_1 = 0$. Wenn der zu interpolierende Punkt nicht auf der Achse liegt, stellt Gl. (3.15) eine Näherung dar. Die Näherung (3.15) ist im Gegensatz zu Gl. (3.14) auch in der Nähe der Achse zulässig.

3.3 Die Schallquelle

Bei Rohrströmungen ist die Schallquelle meist in einem Abschnitt stromauf bzw. stromab des CAA-Rechengebiets angesiedelt. Die Schallquelle kann z. B. eine Rotor-Stator Kombination oder die Flamme in der Brennkammer sein. Der Begriff der Schallquelle muss gegenüber der bisherigen Formulierung noch um die Entropiewellen erweitert werden, die durch instationäre Verbrennungsvorgänge entstehen. Der Drall in der Grundströmung muss ebenfalls in der Formulierung der Schallquelle ergänzt werden, da bisher nur drallfreie Strömungen untersucht wurden. Die Schallquelle wird als ein Gebiet angenommen, in dem die linearisierten Gleichungen nicht gelten. Numerisch ist eine solche reale Schallquelle beispielsweise durch eine Large-Eddy-Simulation (LES) oder Direkte-Numerische-Simulation (DNS) zugänglich. Zur direkten Kopplung der CAA-Methode an diese Schallquelle ist eine Fourier-Zerlegung in Umfangsrichtung notwendig, wie sie im Abschnitt 2.5 beschrieben wird (vgl. Gl. 2.58).

Zur Verifizierung und zur physikalisch korrekten Beschreibung der Schallquelle ist es notwendig analytische Eigenlösungen der Störungsausbreitung im Rohr zu kennen. In einer homogenen Strömung, welche die bei der Herleitung gestellten Bedingungen erfüllt, breiten sich solche Störungen ungehindert aus. Die Anwendung solcher Eigenlösungen auf CFD-Daten, als Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen, liefert eine Aufspaltung in ausbreitungsfähige Moden und solche, die nicht berücksichtigt werden müssen. Die numerischen Daten für die Schwankungsgrößen aus einer LES oder DNS sind im Allgemeinen eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Die Linearisierten-Eulergleichungen, auf denen die CAA-Methode basiert, vernachlässigen eine Reihe von Termen. Daher kann es bei direkter Eingabe der Fourier-transformierten CFD-Daten zu einer Fehlanpassung kommen, die sich durch eine Reihenentwicklung in Moden beheben lässt. Dazu wird die Schallquelle als Reihe von Eigenlösungen ausgedrückt. Die Eigenlösungen müssen die reale Grundströmung berücksichtigen. Solche Lösungen können im Falle einer variablen Geometrie durch eine asymptotische Analyse, wie sie z. B. in Rienstra und Hirschberg [25] beschrieben wird, gewonnen werden. Bei konstantem Querschnitt in zylindrischen Rohren mit und ohne zylindrischen Zentralkörper können die Lösungen entsprechend Neise und Michel [23] entwickelt werden. Dazu muss der mittlere Strömungszustand stark vereinfacht werden. Die Formulierung des Quellterms für Ausbreitung von Entropiewellen wird am Ende des Abschnitts ohne Herleitung angegeben, da im Abschnitt 3.4.3 und im Abschnitt 4.1 die Herleitung kurz umrissen wird.

3.3.1 Akustische Wellen

In diesem Abschnitt werden die Lösungen der Gln. (2.54) – (2.56) unter der Annahme einer homogenen inkompressiblen rotierenden Grundströmung mit konstanter axialer Geschwindigkeit \bar{U} und konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω unter Erweiterung der Ableitungen in Neise und Michel [23] angegeben. Diese Lösungen dienen als Eingabe und als analytische Lösung zur Verifizierung

der Randbedingungen. Die vereinfachte Grundströmung setzt sich wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= M_x; & \bar{V} &= 0; & \bar{W} &= \Omega r \\ \bar{\varrho} &= 1; & \bar{p} &= \frac{a^2}{\gamma} \bar{\varrho} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mit Hilfe dieser Annahmen lässt sich folgendes System von Gleichungen aus Gln. (2.54) – (2.56) ableiten, wenn zunächst ein adiabater Zusammenhang zwischen Druck und Dichte angenommen wird.

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + M_x \frac{\partial p'}{\partial x} + \Omega \frac{\partial p'}{\partial \varphi} \right) + \bar{\varrho} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\varrho} \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{1}{r} \bar{\varrho} v' + \frac{1}{r} \bar{\varrho} \frac{\partial w'}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + M_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \Omega \frac{\partial u'}{\partial \varphi} + \frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + M_x \frac{\partial v'}{\partial x} + \Omega \frac{\partial v'}{\partial \varphi} + \frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial p'}{\partial r} - 2\Omega w' - \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \Omega^2 r = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + M_x \frac{\partial w'}{\partial x} + \Omega \frac{\partial w'}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \bar{\varrho}} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} + 2\Omega v' = 0 \quad (3.20)$$

Die Schallgeschwindigkeit wird konstant über die Schallquelle angenommen. In Gl. (3.20) wird die Coriolis-Kraft $\frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \Omega^2 r$ vernachlässigt. Diese Annahme liefert eine gute Näherung für eine inkompressible Strömung mit Starrkörperrotation bei geringer Winkelgeschwindigkeit, so dass der Term mit Ω^2 klein gegen die Terme mit Ω ist. Zur Abkürzung wird der Differentialoperator $D[\cdot]$ eingeführt.

$$D[\cdot] := \frac{\partial \cdot}{\partial t} + M_x \frac{\partial \cdot}{\partial x} + \Omega \frac{\partial \cdot}{\partial r} \quad (3.21)$$

$$D^2[\cdot] := \left(\frac{\partial \cdot}{\partial t} + M_x \frac{\partial \cdot}{\partial x} + \Omega \frac{\partial \cdot}{\partial r} \right)^2 \quad (3.22)$$

$$= \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} + M_x^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \Omega^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial r^2} + M_x \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t \partial x} + \Omega \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t \partial \varphi} + \Omega M_x \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x \partial \varphi} \quad (3.23)$$

Der Operator $D[\cdot]$ wird auf Gleichung (3.17) angewendet, während Gl. (3.18) nach x abgeleitet wird.

$$\frac{1}{a} D^2[p'] - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + D\left[\frac{1}{r} \bar{\varrho} \frac{\partial r v'}{\partial r} + \frac{1}{r} \bar{\varrho} \frac{\partial w'}{\partial \varphi}\right] = 0 \quad (3.24)$$

Die Symmetrie in Gln. (3.19) – (3.20) kann benutzt werden um die restlichen Geschwindigkeitskomponenten in Gl. (3.17) zu eliminieren. Der Operator $D[\cdot]$ wird auf eine der Gleichungen (3.19) – (3.20) angewendet, während die andere mit 2Ω multipliziert und abgezogen oder zu der jeweils anderen Gleichung addiert wird. Damit ergibt sich folgende Gleichung für die radiale Geschwindigkeit:

$$\bar{\varrho} (D^2[v'] + 4\Omega^2 v') = -D\left[\frac{\partial p'}{\partial r}\right] - 2\Omega \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} \quad (3.25)$$

Die azimutale Geschwindigkeitsstörung wird über die folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$\bar{\varrho} (D^2[w'] + 4\Omega^2 w') = -D\left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \varphi}\right] + 2\Omega \frac{\partial p'}{\partial r} \quad (3.26)$$

Damit die beiden Gleichungen (3.25) und (3.26) eingesetzt werden können, muss Gl. (3.17) wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} D^4[p'] + \frac{1}{a} 4\Omega^2 D^2[p'] - D^2\left[\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}\right] \\ + D\left[D^2\left[\frac{1}{r} \bar{\varrho} \frac{\partial r v'}{\partial r}\right] + 4\Omega^2 \frac{1}{r} \bar{\varrho} \frac{\partial r v'}{\partial r} + D^2\left[\frac{1}{r} \bar{\varrho} \frac{\partial w'}{\partial \varphi}\right] + 4\Omega^2 \frac{1}{r} \bar{\varrho} \frac{\partial w'}{\partial \varphi}\right] = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Mit dem neu definierten Operator $G[\cdot]$

$$G[\cdot] := D^2[\cdot] + 4\Omega^2 \cdot \quad (3.28)$$

ergibt sich folgende Wellengleichung für den ruhenden Beobachter:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} G[D^2[p']] - G\left[\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}\right] \\ - D^2\left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \varphi^2}\right] = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ein harmonischer Ansatz für den Druck liefert zunächst die Lösung der radialen Abhängigkeit der gesuchten Lösungen für den Druck bei einem ruhenden Beobachter.

$$\hat{p}'(t, x, r, \varphi) := f(r) \exp[i(\omega t - m\varphi - kx)] \quad (3.30)$$

Durch den harmonischen Ansatz wird in radialer Richtung die Besselsche Differentialgleichung gefunden.

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} - \frac{m^2}{r^2} p'\right] = -\mu^2 p' \quad (3.31)$$

Es wird angenommen, dass es sich um eine axialsymmetrische Rohrströmung mit einer schallharten, zylindrischen Außenwand, mit oder ohne zylindrischen, schallharten Innenkörper handelt. Die bekannte Lösung der Besselschen Differentialgleichung kann an die Randbedingungen an der Achse und der festen Wand bzw. den festen Wänden angepasst werden, indem als Argument der Bessel- und Neumannfunktion die Variable $s = \mu r$ eingeführt wird. Die Lösung setzt sich aus Bessel-Funktionen und Neumann-Funktionen zusammen.

$$f(r) = N J_m(\mu r) + M Y_m(\mu r) \quad (3.32)$$

Der Eigenwert μ ist die Lösung des Eigenwert-Problems der Bessel-Funktionen bei gegebenen Randbedingungen.

$$\frac{M}{N} = \frac{-J'_m(\mu_{mn} r_i)}{Y'_m(\mu_{mn} r_i)} \quad (3.33)$$

Zuletzt wird die Dispersionsrelation zur Bestimmung der axialen Wellenzahl k benutzt. Der vollständige Ansatz für den Druck wird in Gl. (3.29) eingesetzt und liefert eine Bedingung für die axiale Wellenzahl k .

$$p'(t, x, r, \varphi) = \tilde{p}' f(r) \exp[i(\omega t - k x - m \varphi)] \quad (3.34)$$

Der Differentialoperator $D[\cdot]$ wird mit Hilfe des Ansatzes (3.34) durch D ersetzt.

$$\begin{aligned} D^2 &= -(\omega - M_x k^2 - \Omega m)^2 \\ G &= D^2 + 4\Omega^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Überprüfung für drallfreie Strömungen ($\Omega = 0$)

Für verschwindende Starrkörperrotation ergibt sich die bekannte Lösung für k , welche z. B. in Neise und Michel [23] gegeben ist:

$$k_{1,2} = -\frac{M_x \omega \pm \sqrt{\omega^2 - (1 - M_x^2) \mu^2}}{1 - M_x^2} \quad (3.36)$$

Zusätzlich zu den physikalischen Eigenwerten ergibt sich ein doppelter Eigenwert bei $k = \frac{\omega}{M_x}$. Mit der Abkürzung

$$d := (\omega - M_x k) \quad (3.37)$$

kann das eingesetzte Störungsfeld an der Schallquelle in komplexer Form wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \varrho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{pmatrix}_{mn} = \Re \left\{ \begin{pmatrix} f(r) \\ \frac{k}{\bar{\varrho} d} f(r) \\ \frac{i}{\bar{\varrho} (-d^2)} d f'(r) \\ \frac{1}{\bar{\varrho} (-d^2)} \frac{dm}{r} f(r) \\ f(r) \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - m\varphi - kx)] \right\} \quad (3.38)$$

Die radiale Abhängigkeit der Lösung $f(r)$ ist Gl. 3.32 zu entnehmen.

Vollständige Lösung für verdrehte Strömungen

Die vollständige Lösung für Strömungen mit aufgeprägtem Starrkörperdrall bei vernachlässigbarer Coriolis-Kraft ist wie folgt gegeben:

$$\begin{pmatrix} \varrho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{pmatrix}_{mn} = \Re \left\{ \begin{pmatrix} f(r) \\ \frac{k}{\bar{\varrho} d} f(r) \\ \frac{i}{\bar{\varrho} (-d^2 + 4\Omega^2)} [d f'(r) - \frac{2\Omega m}{r} f(r)] \\ \frac{1}{\bar{\varrho} (-d^2 + 4\Omega^2)} [-2\Omega f'(r) + \frac{dm}{r} f(r)] \\ f(r) \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - m\varphi - kx)] \right\} \quad (3.39)$$

Dabei ist die Abkürzung d um den Starrkörperdrall erweitert worden.

$$d := (\omega - M_x k - \Omega m) \quad (3.40)$$

Die axiale Wellenzahl wird als numerische Lösung des Gleichungssystems

$$(D^2 + 4\Omega^2)\left(\frac{1}{a}D^2 + k^2\right) + D^2\mu^2 = 0 \quad (3.41)$$

$$D^2 := -(\omega - M_x k - \Omega m)^2 \quad (3.42)$$

iterativ mittels eines Newton-Verfahrens ermittelt. Als Startwert wird ein Punkt in der Nähe der Nullstelle für fehlenden Drall, der durch schrittweise Berechnung der Funktionswerte bestimmt wird, benutzt. Es gibt vier Lösungen der Dispersionsrelation. Zwei Lösungen gehören zu den stromauf und stromab laufenden akustischen Wellen. Die beiden zusätzlichen Eigenwerte gehören zu mathematischen Lösungen, die sich mit der Geschwindigkeit der Strömung ausbreiten.

3.3.2 Entropiewellen

Die Lösung in diesem Abschnitt stellt einen Vorgriff auf die Betrachtungen im Kapitel 4 dar. Die Ausbreitung von Entropiewellen in einer axialsymmetrischen Rohrströmung erfolgt rein konvektiv. Eine beliebig geformte Entropiestörung kann wie folgt als Störung der Isentropie eingegeben werden, indem sie in eine Reihe von Eigenlösungen entwickelt wird. Dabei muss davon ausgegangen werden, dass die Ableitung der Entropiewelle an der Wand verschwindet. Als Lösung für die Entropiewelle kann unter diesen Voraussetzungen angesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} \varrho' \\ u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{pmatrix}_{mn} = \Re \left\{ \begin{pmatrix} f(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - m\varphi - kx)] \right\} \quad (3.43)$$

Die radiale Variation ist für die Entropiewelle beliebig wählbar. Da die Bessel-Funktionen ein System von Eigenlösungen zur Verfügung stellen, wird die oben gegebene Darstellung gewählt.

3.3.3 Eingabe der Schallquelle

Die im vorherigen Abschnitt abgeleiteten Eigenwerte und Eigenvektoren für die Ausbreitung von akustischen Wellen und von Entropiewellen in einer verdrallten Rohrströmung dienen als Eingabe für das CAA-Programm auf drei Gitterlinien am offenen Ende der Schallquelle. Da der ausgedehnte Sieben-Punkte-Differenzenstern zu Gitterschwingungen führt, wenn Sprünge oder Unstetigkeiten auftreten, muss eine stetige Anbindung der Schallquelle an das Rechengelände gefunden werden. Dazu wird der Bereich der Schallquelle um einige Gitterlinien erweitert, in denen die Eigenlösungen als Vorgabe dienen.

Diese Vorgabe wird weich an die Differentialgleichungen angekoppelt. Räumlich geschieht das durch die Verwendung der Newton-Cooling/Friction-Randbedingung aus Abschnitt 3.4.1, die gleichzeitig Reflexionen vom offenen Ende verringert. Zeitlich wurde eine Initialisierung des inneren Rechengeländes im Anschluss an die Schallquelle gewählt. Für beide Verfahren ist die

Kenntnis der Schallquelle in einem Teil des inneren Gebiets notwendig. Die Initialisierung geschieht mit der analytischen Lösung multipliziert mit einer Fensterfunktion in Form der Verteilung $\frac{1}{2}(1 + \cos(x))$, mit $x = 0, \dots, \pi$ zu Beginn ($t = 0$).

3.4 Nicht reflektierende, künstliche, numerische Randbedingungen

Bei der numerischen Simulation kann immer nur ein Ausschnitt der Natur modelliert werden. Bei Rohrströmungen sind es beispielsweise die Enden eines unendlich fortgesetzten Rohres, die korrekt modelliert werden müssen, um die korrekte Lösung im Rohr zu erhalten. Daher ist es notwendig Randbedingungen anzugeben, die einen Abschluss des Rechengebiets am offenen Ende eines gedachten unendlich langen Rohrs schaffen. An diesem Abschluss setzt sich das Strömungsfeld, als auch das Störungsfeld ins Unendliche fort, und es treten keine Reflexionen auf. Dabei wird angenommen, dass sich keine Schallquellen außerhalb dieses Randes befinden. Da die Differentialgleichungen eine Ausbreitung von Störungen ins Rechengebiet ermöglichen, müssen die Ränder reflexionsfrei bzw. möglichst reflektionsarm gemacht werden.

In diesem Abschnitt wird das im CAA-Code bereits implementierte und verwendete Verfahren einer Pufferzone, in der die Differentialgleichungen um einen Dämpfungsterm erweitert werden, vorgestellt. Weiterhin wird eine verbesserte Technik für diese Pufferzone herangezogen. Diese verbesserte Randbedingung wird zur Verringerung von Reflexionen in den CAA-Code implementiert und im folgenden Kapitel validiert und auf ihre Vorteile geprüft.

Die Beiden oben genannten Randbedingungen vereint das Konzept, die Störungen vor Erreichen der Berandung des Rechengebiets auf Null zu bringen. Dabei ist die PML-Randbedingung speziell darauf optimiert möglichst wenige Störungen zu erzeugen, die als unphysikalische Reflexionen die Lösung verschmutzen. Am Ende des Abschnitts wird eine Randbedingung vorgestellt, die die Physik der Lösungen der Eulergleichungen berücksichtigt, um eine nicht reflektierende Randbedingung zu entwerfen. Die Annahmen, die bei der Ableitung getroffen wurden, machen die Randbedingung unbrauchbar, wenn sich keine ebenen Wellen ausbreiten. Die Randbedingung hat sich in früheren Versuchen als instabil bei Langzeitintegration erwiesen und wurde daher durch die Pufferzone ersetzt.

3.4.1 Die Newton-Cooling/Friction (NC/F)-Randbedingung

Die Pufferzone vom Typ Newton-Cooling/Friction (NC/F) stellt eine sehr stabile und gleichzeitig einfach handhabbare Randbedingung dar. Sie kann sowohl an der Schallquelle, als auch als Ein- bzw. Ausström-Randbedingung verwendet werden. Die Differentialgleichung wird entsprechend Israeli und Orszag [14] um einen Dämpfungsterm erweitert und so eine Näherung für eine nicht reflektierende Randbedingung gewonnen.

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = -\underline{F}_{phys.}(\underline{q}) - R_d(x, r) (\underline{q} - \underline{q}_0) \quad (3.44)$$

Der Dämpfungskoeffizient $R_d(x, r)$ ist räumlich Gaußverteilt mit dem Maximum am Rand des Rechengebiets. Dadurch ergibt sich eine räumliche, zum Rand hin stetig zunehmende Verteilung des Dämpfungskoeffizienten. Um nicht das gesamte Rechengebiet zu bedämpfen muss die Gauß-Verteilung ab einem bestimmten Wert im inneren Feld abgebrochen werden. Dieser

Schwellenwert wird so gewählt, dass das Produkt aus der Ableitung und der Gitterweite gerade dem Wert von R_d entspricht, um möglichst wenige Gitterschwingungen zu erzeugen, die gewöhnlich an Unstetigkeitsstellen entstehen (Gibbs-Phänomen). Die Anzahl der Gitterpunkte n_P , für die eine geänderte Differentialgleichung angenommen wird, kann vorgegeben werden. Der Abstand d_{BC} wird mit der Breite $\Delta x_{NC/F}$ der Pufferzone ins Verhältnis gesetzt und quadriert, um einen Faktor zur Steuerung der Breite der Gauß-Verteilung zu gewinnen.

$$R_d(x, r) = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{1}{2} n_P \frac{d_{BC}^2}{\Delta x_{NC/F}^2} \right\} & , \quad d_{BC} < \Delta x_{NC/F} \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.45)$$

mit

$$\begin{aligned} d_{BC} &= \sqrt{(x - x_o)^2 + (r - r_o)^2} \\ x_{NC/F} &= \sqrt{(x_e - x_o)^2 + (r_e - r_o)^2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Der Vektor \underline{q}_0 stellt einen vorgegebenen Zustand dar. Dieser Zustand kann zur Eingabe der Schallquelle auf zusätzlichen Gitterlinien genutzt werden. Die Schallquelle wird dadurch als weiche Vorgabe \underline{q}_0 in einer frei wählbaren Zone vor dem Rand eingebracht. Auf diese Weise werden Abweichungen vom vorgegebenen Zustand mit sinkendem Abstand zur Schallquelle graduell verringert. An der Schallquelle herrscht bei geeigneter Einstellung der Dämpfung der vorgegebene Zustand, wodurch Gitterschwingungen und Sprünge vermieden werden.

Die einfache Randbedingung ist besonders an der Schallquelle geeignet. Die mit dieser Randbedingung erzielten Ergebnisse zeigten im Allgemeinen in der Vergangenheit gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung bzw. nur geringe Reflexionen. Da die NC/F-Randbedingung nur die Näherung einer nicht reflektierenden Randbedingung darstellt, wird sie an dem Rand des Rechengebiets an dem der Schall austritt durch eine verbesserte Randbedingung vom ähnlichen Typ ersetzt. Diese so genannte Perfectly-Matched-Layer (PML)-Randbedingung stellt theoretisch eine exakt nicht reflektierende Randbedingung dar. Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der beiden Randbedingungen anhand numerischer Resultate miteinander verglichen.

3.4.2 Die Perfectly-Matched-Layer (PML)-Randbedingung

Die Perfectly-Matched-Layer-Randbedingung (PML) geht ursprünglich auf Berenger [1] zurück. Die initial gegebene Randbedingung bezieht sich auf die Maxwell'schen Gleichungen und spaltet diese unphysikalisch auf. Genau wie bei der NC/F-Randbedingung werden zusätzliche dissipative Terme am Rand des Rechengebiets hinzugefügt, wobei als Nebendebingung die Dispersionsrelation nicht verändert werden soll [9]. Entsprechende Formulierungen wurden wenig später auch zur numerischen Berechnung der linearisierten Euler-Gleichungen vorgestellt [9, 12, 33]. Die unphysikalisch aufgespaltene Formulierung der Differentialgleichungen in der PML-Zone wird auch als "Split-PML" bezeichnet.

Die ursprüngliche PML-Randbedingung von Berenger formuliert ein nur schwach korrekt gestelltes Problem. Beim Vorliegen einiger kurzweiliger Störungen kommt es daher zu Instabi-

litäten. Die generelle Eigenschaft der PML-Randbedingung, Schwankungen unter jedem Einfallswinkel und bei jeder Frequenz nahezu reflexionsfrei dämpfen zu können, ist für technische Anwendungen von großem Interesse. Daher wurde die Idee weiter verfolgt und die anfänglichen Schwierigkeiten in der elektrodynamischen Simulation beseitigt [9]. Die Split-PML hat den Nachteil, dass sich die Anzahl der Gleichungen in der Pufferzone im zweidimensionalen Fall verdoppelt und die Technik sich nicht ohne weiteres in die bestehenden Gleichungen einfügt.

Die Anwendung der PML auf strömungsakustische Probleme unterscheidet sich vor allem durch die konvektiven Anteile in den Störungsgleichungen von den ursprünglichen elektrodynamischen Problemen. Tam [33] konnte bei der Untersuchung der von Hu [12] vorgestellten Split-PML für die Eulergleichungen eine systematische Instabilität in Anwesenheit einer mittleren Strömung zeigen. Die gezeigte Instabilität resultiert aus den zusätzlichen Eigenwerten der Dispersionsrelation durch die konvektiven Terme. Zur Lösung dieses Problems schlägt Tam [33] eine Erhöhung der künstlichen, selektiven Dämpfung (SAD) des DRP-Schemas vor. Die gegebene Lösung führt in einem Rohr nicht zum gewünschten Resultat, stattdessen kommt es zu einer Verstärkung langwelliger Störungen. Die PML-Randbedingung wird im durchströmten Rohr instabil [33]. Hesthaven [9] schlägt zur Lösung vor, die Grundströmung abklingen zu lassen, was zu einer Änderung der Dispersionsrelation führen muss. Damit ist die Idee der PML-Randbedingung grundlegend verletzt.

Neuere Veröffentlichungen aus der Elektrodynamik verwenden eine PML-Randbedingung, für die die Aufspaltung der Variablen nicht mehr notwendig ist [13]. Stattdessen wird eine Hilfsvariable eingeführt, die nur in der Pufferzone abgespeichert werden muss. Im Folgenden wird entsprechend der Formulierung von Hu [13] eine PML-Randbedingung für zylindrische Koordinaten entwickelt. Den Ausgangspunkt bilden dabei die linearisierten Euler-Gleichungen (2.54), (2.55) und (2.56), die in Matrix-Vektor Form umgeschrieben werden müssen:

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = -\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} - \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial r} - \frac{1}{r} \underline{C} \cdot \underline{q} - \underline{D} \cdot \underline{q} \quad (3.47)$$

Die genaue Form der Matrizen ist dem Anhang A.1, Gleichungen (A.3–A.7) zu entnehmen. Der Vektor \underline{q} setzt sich wie folgt aus den Störgrößen zusammen.

$$\underline{q} = \left(\varrho', \quad u', \quad v', \quad w', \quad p' \right) \quad (3.48)$$

Bei der Ableitung der PML-Randbedingung werden zunächst alle Größen in solche Anteile, die mit x variieren und solche, die mit r variieren aufgespalten. Die gesamte Herleitung wird zunächst nur für eine einzelne Frequenz (Helmholtzzahl ω) durchgeführt. Daher kann die Zeitableitung durch eine Multiplikation mit $-i\omega$ ersetzt werden. Zusätzlich wird ein Dämpfungsterm eingeführt, der ausschließlich in einer der Koordinatenrichtungen (x oder r) wirken soll. Dieses Vorgehen entspricht einer Streckung der Koordinate in der komplexen Ebene. In vektorieller Schreibweise kann der Ausgangspunkt für die PML-Formulierung sehr kurz dargestellt werden. Die mit Dächern versehenen Größen kennzeichnen, dass die Lösung innerhalb der PML nicht der Lösung der ursprünglichen Gleichungen entspricht. Die komplexe Streckung von r führt dazu,

dass auch die eigentlich aus der Ableitung nach φ stammenden Terme mit einem neuen r skaliert werden.

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{q}_x + \sigma_x \hat{q}_x &= -\underline{A} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} \\ -i\omega \hat{q}_r + \sigma_r \hat{q}_r &= -\underline{B} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial r} - \frac{1}{\hat{r}} \underline{C} \cdot \hat{q} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Die Formulierung der PML-Randbedingung beruht auf der Annahme, dass die der Grundströmung im Bereich der PML überhaupt nicht mit den Koordinaten variiert, da sonst zusätzliche akustische Quellterme entstehen. Aus diesem Grund werden die Ableitungen der Grundströmung bei der Formulierung der zusätzlichen Dämpfung in der Pufferzone weggelassen. Sie liefern einen Term q_m für die Zeitableitung, der nicht verändert wird. Durch Multiplikation mit $1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}$ bzw. $1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}$ und nachfolgende Addition wird die Aufspaltung der Variablen aufgehoben (vgl. Hu [13]).

$$\begin{aligned} -i\omega \left(1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}\right) \left(1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}\right) \left(1 + \frac{i\sigma_\varphi}{\omega}\right) \hat{q}_x &= -\left(1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}\right) \left(1 + \frac{i\sigma_\varphi}{\omega}\right) \underline{A} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} \\ -i\omega \left(1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}\right) \left(1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}\right) \left(1 + \frac{i\sigma_\varphi}{\omega}\right) \hat{q}_r &= -\left(1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}\right) \left(1 + \frac{i\sigma_\varphi}{\omega}\right) \underline{B} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial r} \\ &\quad - \left(1 + \frac{i\sigma_r}{\omega}\right) \left(1 + \frac{i\sigma_x}{\omega}\right) \frac{1}{\hat{r}} \underline{C} \cdot \hat{q} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Es wird keine Dämpfung in φ eingeführt, da in Umfangsrichtung ein analytischer Ansatz gemacht wurde. Dennoch wird durch die Streckung in r eine neue Variable \hat{r} eingeführt, die eine Dämpfung in den nach φ abgeleiteten Termen bedeutet [36].

$$\begin{aligned} \hat{r} &:= 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_\varphi \\ \sigma_\varphi &= \int_0^R \frac{\sigma_r}{r} dr \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ausmultiplizieren und Sortieren nach den Potenzen von ω liefert ein Gleichungssystem für eine Frequenz. Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt durch Ersetzung der Terme mit $-i\omega$ durch Zeitableitungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} &= \underbrace{-\underline{A} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \underline{B} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial r} - \frac{1}{\hat{r}} \underline{C} \cdot \hat{q} - \underline{D} \cdot \hat{q}}_{\text{Euler Gleichungen}} \\ &\quad - \underbrace{(\sigma_x + \sigma_r + \sigma_\varphi) \hat{q} - (\sigma_x \sigma_r + (\sigma_x + \sigma_r) \sigma_\varphi) q_1 - (\sigma_x \sigma_r \sigma_\varphi) q_2}_{\text{NC/F}} \\ &\quad - (\sigma_r + \sigma_\varphi) \underline{A} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x} - (\sigma_x + \sigma_\varphi) \underline{B} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial r} - (\sigma_x + \sigma_r) \frac{1}{\hat{r}} \underline{C} \cdot q_1 \\ &\quad - (\sigma_r \sigma_\varphi) \underline{A} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x} - (\sigma_x \sigma_\varphi) \underline{B} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial r} - (\sigma_x \sigma_r) \frac{1}{\hat{r}} \underline{C} \cdot q_2 \\ &\quad - \frac{M_x}{1 - M_x^2} \underline{A} \cdot [(\sigma_x + \sigma_r + \sigma_\varphi) \hat{q} - (\sigma_x \sigma_r + (\sigma_x + \sigma_r) \sigma_\varphi) q_1 - (\sigma_x \sigma_r \sigma_\varphi) q_2] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Die Terme mit $\frac{i}{\omega}$ und $-\frac{1}{\omega^2}$ werden durch die Hilfsvariablen \underline{q}_1 und \underline{q}_2 ersetzt und entsprechen den Zeitintegralen der ursprünglichen Größen. Diese Hilfsvariablen müssen in der Pufferzone mit bestimmt werden. Sie sind als die Integrale der ursprünglichen Variablen in der Zeit definiert.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{q}_1}{\partial t} &:= \hat{q} \\ \frac{\partial \underline{q}_2}{\partial t} &:= \underline{q}_1\end{aligned}\tag{3.53}$$

Die Dämpfungsparameter σ_x und σ_r werden entsprechend Gl. (3.45) berechnet, wobei nur der Abstand in x - bzw. r -Richtung zur Definition verwendet wird. In den Ecken des Rechengebiets ergibt sich eine starke Dämpfung, die in beiden Koordinatenrichtungen wirkt. Da die nicht aufgespaltene PML-Formulierung (“Unsplit-PML”) instabil werden kann, wenn beide Koordinatenrichtungen bedämpft werden, wird in den Ecken der der Wand nähere Dämpfungsparameter zugunsten des Entfernteren bevorzugt. Das entspricht einer Normierung. In vektorieller Schreibweise mit $\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_r)$ ergibt sich folgende Gleichung:

$$\underline{\sigma} = \underline{n}_\sigma \|\underline{\sigma}\|\tag{3.54}$$

Wobei \underline{n}_σ der Gradientvektor der Dämpfungsverteilung nach Gl. (3.45) ist.

Da es trotz der theoretischen Stabilität der PML zu explodierenden Lösungen in Anwesenheit von Drallströmungen kommt, wurde die azimutale Komponente der mittleren Strömungsgeschwindigkeit in der PML-Zone Null gesetzt. Es konnte kein anderer Weg gefunden werden, als einen ähnlichen Verstoß gegen die Annahmen der PML zu begehen, wie Hesthaven [9]. Die Ergebnisse der Validierung und des Vergleichs mit anderen Randbedingungen sind dem nächsten Kapitel zu entnehmen.

3.4.3 Die charakteristische Randbedingung von Giles

Die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Randbedingungen sind alle vom Typ einer Pufferzone. Wellen, die das Rechengebiet zu verlassen drohen, werden gedämpft. Am Rand tritt keine Reflexion auf, da der Wert der Störgrößen Null ist. Es gibt wesentlich elegantere Möglichkeiten Randbedingungen zu formulieren, wenn die Eigenschaften der sich ausbreitenden Wellen, die Charakteristiken, benutzt werden. In diesem Abschnitt wird, stellvertretend für eine ganze Klasse von solchen physikalisch abgeleiteten Randbedingungen, die Giles Randbedingung vorgestellt. Sie beruht auf einer Analyse der Lösungen der Euler-Gleichungen in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten. Die gewonnenen Informationen über die Lösungseigenschaften der linearisierten Euler-Gleichungen werden im nächsten Abschnitt zur Untersuchung der Entropiewellen verwendet.

Für die physikalisch korrekte Formulierung solcher Randbedingungen, die entweder auf Charakteristiken oder auf Eigenlösungen beruhen, ist die Kenntnis solcher Eigenlösungen der Eulergleichungen in vereinfachter Form Voraussetzung. Die Ableitung der Lösungen erfolgt unter der

Annahme einer uniformen Grundströmung aus den Eulergleichungen in Matrix-Vektor Form.

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} + \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial r} = \underline{0} \quad (3.55)$$

mit

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} \varrho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix}; \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{\varrho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & 0 & \frac{1}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & \bar{U} & 0 \\ 0 & \gamma \bar{P} & 0 & \bar{U} \end{pmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} \bar{V} & \bar{\varrho}' & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V} & \frac{1}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & \gamma \bar{P} & \bar{V} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Die Differentialgleichung ist hyperbolisch, daher kann ein Ansatz für wellenförmige Lösungen gemacht werden. Die komplexe Exponentialfunktion mit den Wellenzahlen k_x und k_y sowie der Kreisfrequenz ω stellt eine Basis für solche Eigenlösungen dar. Eingesetzt in die Differentialgleichung (3.55) liefert der Ansatz zunächst eine Bedingung für die Wellenzahlen in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz. Diese Beziehung wird auch Dispersionsrelation genannt:

$$\det(-\omega \underline{E} + k_x \underline{A} + k_y \underline{B}) = 0 \quad (3.57)$$

Weiterhin lässt sich eine räumliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (Gruppengeschwindigkeit) daraus ablesen, wenn die Eigenwerte bekannt sind:

$$\underline{v}_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Durch diesen Ansatz wird durch Vorgabe der Kreisfrequenz und der zweiten Wellenzahl k_y die Wellenzahl k_x berechenbar. Vor dem nächsten Schritt wird das System mit der mittleren Dichte $\bar{\varrho}$ und der Schallgeschwindigkeit a_∞ , z. B. in der ungestörten Anströmung, dimensionslos gemacht. Die Entdimensionalisierung wird im Abschnitt 2.3 beschrieben. Im Allgemeinen hat das Gleichungssystem vier unabhängige Eigenwerte für k_x und vier zugehörige Eigenvektoren, die im gegebenen Fall mit

$$D = \sqrt{1 - \frac{(1 - \bar{U}^2)k_y^2}{(\omega - \bar{V}k_y)^2}} \quad (3.59)$$

in dimensionsloser Form wie folgt angegeben werden [8]:

$$k_{1,2} = \frac{\omega - \bar{V}k_y}{\bar{U}} \quad (3.60)$$

$$k_3 = \frac{(\omega - \bar{V}k_y)(-\bar{U} + D)}{1 - \bar{U}^2} \quad (3.61)$$

$$k_4 = \frac{(\omega - \bar{V}k_y)(-\bar{U} - D)}{1 - \bar{U}^2} \quad (3.62)$$

Die ersten beiden Eigenwerte sind gleich und gehören zur sogenannten Entropie-Welle und Wirbelstärke-Welle. Die beiden letzten Eigenwerte gehören zu der stromauf bzw. stromab laufenden akustischen Welle. Die Gruppengeschwindigkeit der Entropieschwankung wie auch der Wirbelstärkeschwankung ist \bar{U} . Die Ausbreitung dieser Störungen ist also rein konvektiv, während sich die akustischen Wellen mit Schallgeschwindigkeit im mitbewegten Bezugssystem ausbreiten.

Die zugehörigen dimensionslosen rechten Eigenvektoren sind in der Literatur wie folgt gegeben [8, 13]:

$$\underline{q}_{1: \text{Entropie}}^R = (-1, 0, 0, 0)^T \quad (3.63)$$

$$\underline{q}_{2: \text{Wirbelstärke}}^R = \left(0, \frac{u k_y}{\omega}, 1 - \frac{v k_y}{\omega}, 0\right)^T \quad (3.64)$$

$$\underline{q}_{3: \text{stromab akustisch}}^R = \frac{1 + \bar{U}}{2\omega} \left(\omega - \bar{U} k_3 - \bar{V} k_y, k_3, k_y, \omega - \bar{U} k_3 - \bar{V} k_y\right)^T \quad (3.65)$$

$$\underline{q}_{4: \text{stromauf akustisch}}^R = \frac{1 + \bar{U}}{2\omega} \left(\omega - \bar{U} k_4 - \bar{V} k_y, k_4, k_y, \omega - \bar{U} k_4 - \bar{V} k_y\right)^T \quad (3.66)$$

Die kontravarianten linken Eigenvektoren sind:

$$\underline{q}_1^L = (-1, 0, 0, 1)^T \quad (3.67)$$

$$\underline{q}_2^L = \left(0, \frac{u k_y}{\omega}, 1 - \frac{v k_y}{\omega}, -\frac{k_y}{\omega}\right)^T \quad (3.68)$$

$$\underline{q}_3^L = \left(0, (1 - \bar{V} \frac{k_y}{\omega}), \bar{U} \frac{k_y}{\omega}, (1 - \bar{V} \frac{k_y}{\omega}) D\right)^T \quad (3.69)$$

$$\underline{q}_4^L = \left(0, -(1 - \bar{V} \frac{k_y}{\omega}), -\bar{U} \frac{k_y}{\omega}, (1 - \bar{V} \frac{k_y}{\omega}) D\right)^T \quad (3.70)$$

Diese Eigenwerte liefern die folgende Approximation vierter Ordnung für eine nichtreflektierende Randbedingung in einem kartesischen Gitter mit der lokalen Schallgeschwindigkeit a [8]:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V} & \frac{1}{2}(a + \bar{U}) & \frac{1}{2}(a - \bar{U}) \\ 0 & \frac{1}{2}(a - \bar{U}) & \bar{V} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Dabei werden die charakteristischen Variablen (c_1, c_2, c_3, c_4) aus den Eigenwerten wie folgt bestimmt [8]:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} a & 0 \\ 0 & \bar{\rho} a & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{\rho} a & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

Die Rücktransformation ist wie folgt gegeben [8]:

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\rho}a} & -\frac{1}{2\bar{\rho}a} \\ 0 & \frac{1}{2\bar{\rho}a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

Die nicht reflektierende Randbedingung von Giles stellt eine auf Charakteristiken und Eigenlösungen beruhende Terminierung des Rechengebiets dar. Sie funktioniert optimal, wenn

ebene Wellen in einem kartesischen Gitter normal auf die Wand treffen. Je stärker die reale Welle von diesen Annahmen abweicht, um so mehr Reflexionen treten auf. Zusätzlich gibt es das Problem der Langzeitstabilität. Die Randbedingung von Giles [8] zeigt häufig Instabilitäten bei Langzeitintegration. Aus diesen Gründen wurde auf die Verwendung von charakteristischen Randbedingungen zu Gunsten einer künstlichen Pufferzone, die in den vorherigen Abschnitten beschrieben ist, verzichtet.

Kapitel 4

Entropiewellen und akustische Wellen

In diesem Kapitel werden die Auswirkungen von Entropiewellen in einer beschleunigten Rohrströmung theoretisch untersucht. Dazu sind die Eigenlösungen der linearisierten Eulergleichungen in einer homogenen Strömung Voraussetzung. Diese Eigenlösungen wurden im Abschnitt 3.4.3 entsprechend Pierce [24], Morse [20] und Giles [8] näher erläutert und hergeleitet. Diese Eigenlösungen dienen hier zur Einführung und Diskussion des Begriffs Entropiewelle. Im zweiten Teil dieses Kapitels wird der Einfluss einer beschleunigten Grundströmung betrachtet. Dafür stehen eine Reihe von Veröffentlichungen zur Verfügung, die sich mit dem Thema Entropiewellen beschäftigen [5, 7, 10, 18]. Am Ende des Kapitels wird die analytische Näherung von Marble und Candel [18] zur Vorhersage der Schallentstehung und Reflexion in der beschleunigten Grundströmung vorgestellt und diskutiert.

4.1 Eigenlösungen in homogener Grundströmung

Die Lösungen der Eulergleichungen in eindimensionaler, homogener Grundströmung sind entsprechend der Herleitung im Abschnitt 3.4.3 Entropieschwankungen, Scherschichten und akustische Wellen. Aus dem gekoppelten Gleichungssystem (2.54) – (2.56) können für diesen Spezialfall entkoppelte Wellengleichungen für die einzelnen Größen abgeleitet werden:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Gleichung für die Entropiewelle} \\
 \frac{\partial s'}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla s' = 0 \\
 \text{Gleichung für die Wirbelstärkeschwankung} \\
 \frac{\partial u'_v}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla u'_v = 0 \\
 \text{Wellengleichung z. B. für den Druck} \\
 \frac{\tilde{D}^2 p'_a}{\tilde{D} t^2} - \underbrace{\gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}}_{=a^2} \Delta p'_a = 0
 \end{array} \right\} \text{vollständig entkoppelt bei konstanter Strömung}$$
(4.1)

Die ersten beiden Gleichungen werden trivial, d. h. die entsprechenden Lösungen sind nicht ausbreitungsfähig, wenn keine Grundströmung vorhanden ist.

Die zugehörigen dimensionslosen rechten Eigenvektoren können für rechteckige Kanäle und zweidimensionale homogene Strömungen aus der Literatur [8, 13] entnommen werden (vgl. Gl. (3.63)). Entsprechende Lösungen lassen sich auch in Zylinderkoordinaten für runde Kanäle mit und ohne Zentralkörper, wie sie den in dieser Arbeit vorausgesetzten, technisch relevanten Aufgabenstellungen entsprechen, angeben [25, 23]. Eine solche Lösung wird im Abschnitt 3.3 für einen Spezialfall hergeleitet und zur Eingabe der Schallquelle verwendet. Als Lösungsansatz dient dabei eine Bessel-Fourier Reihe. Die Betrachtungen über Eigenwerte und Eigenvektoren gelten unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem. Die Aufspaltung in Wirbelstärke-Welle und akustische Wellen wird z. B. von Tam [33] für die Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten vollzogen. Bei verschwindender Grundströmung spielt die im Kapitel 2 vernachlässigte Wär-

meileitung eine Rolle, so dass die Modellierung in diesem Fall um eine Wärmeleitungsgleichung erweitert werden muss. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass die Strömungsgeschwindigkeit in der Brennkammer so hoch ist, dass die Wärmeleitung keine Rolle spielt.

Die Einführung der Entkoppelung in akustische, Entropie- und Wirbelstärke-Welle wird in Pierce [24] zurückgehend auf Kovasznay [15] aufgrund der Lösungsstruktur der Eulergleichungen vorgeschlagen. Durch einen harmonischen Ansatz wird eine Dispersionsrelation mit vier Lösungen gewonnen. Ein doppelter Eigenwert gehört zu den mit der Strömungsgeschwindigkeit bewegten Wirbelstärke- und Entropie-Wellen. Zwei weitere Eigenwerte beschreiben die akustische Wellenausbreitung, die mit Schallgeschwindigkeit erfolgt (vgl. Gln. (4.1)). Die vollständige Lösung für die Störungsausbreitung ist aus den Einzelkomponenten superponierbar. Sofern die Grundströmung homogen ist, sind die Eigenlösungen, wie die Gln. (4.1) zeigen, vollständig entkoppelt. Aufgrund der Aufhebung der Instabilität in den Eulergleichungen, wird die Aufspaltung in Wirbelstärke- und akustische Wellen z. B. in den sogenannten APE-Gleichungen verwendet [6] und damit die entsprechende Lösungsstruktur der Grundgleichungen ausgenutzt.

Giles [8], wie auch Pierce [24], begründen die Bezeichnung der Einzelkomponenten mit den Eigenschaften der Eigenvektoren bzw. Eigenlösungen. Die von Giles [8] unter Vernachlässigung der viskosen und wärmeübertragenden Effekte abgeleitete Lösung für die zweidimensionale Wellenausbreitung, liefert folgende Schwankung der Entropie, wenn die rechten Eigenvektoren aus Gl. (3.63) als Lösung in Gl. (2.56) oder Gl. (2.57) eingesetzt werden.

$$s'_1 = C_v \left(\frac{p'_1}{\bar{p}} - \gamma \frac{\varrho'_1}{\bar{\varrho}} \right) = C_p \frac{1}{\bar{\varrho}} \quad (4.2)$$

$$s'_2 = 0 \quad (4.3)$$

$$s'_3 = s'_4 = C_v \frac{(1 + \bar{U})(\omega - \bar{U} k_{3,4} - \bar{V} k_y)}{2\omega} \left(\frac{1}{\bar{p}} - \gamma \frac{1}{\bar{\varrho}} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Die Entropie-Welle trägt im Gegensatz zu akustischer und Wirbelstärke-Welle die gesamte Störung der Isentropie [24]. Die Wirbelstärke-Welle beinhaltet die Rotation des gestörten Geschwindigkeitsvektors [24]. Die akustischen Wellen haben eine Sonderstellung, da mehrere Größen, nämlich das rotationsfreie Geschwindigkeitsfeld und dessen Potential sowie Druck, Dichte und Temperatur des Strömungsfeldes, schwanken. Sie wird durch die Ausbreitung mit Schallgeschwindigkeit relativ zum strömenden Medium identifiziert. Eine Bezeichnung der Entropieschwankung als Dichteschwankung, oder Temperaturschwankung wäre missverständlich, da beides auch für die akustische Welle zutrifft.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass eine inhomogene Strömung die Entkoppelung aufhebt. In diesem Fall erscheint die Verwendung der Eigenvektoren und deren Bezeichnung willkürlich. Diese scheinbare Willkür lässt sich beheben, wenn der beschleunigte oder abgebremste Teil der Strömung aus der Analyse ausgeschlossen wird und nur die sich in der homogenen Strömung ausbreitenden Wellen betrachtet werden.

4.2 Entropiewellen in einer beschleunigten Rohrströmung

Im vorhergehenden Abschnitt wurde eine räumlich homogene Grundströmung zugrunde gelegt. Dadurch lassen sich vollständig entkoppelte Lösungen der Eulergleichungen finden, die die Ausbreitung von akustischen Wellen, Entropie- und Wirbelstärke-Störungen beschreiben. In diesem Abschnitt werden die Konsequenzen einer beschleunigten Grundströmung auf eine Entropieschwankung erörtert. Der Abschnitt bildet die Grundlage für die Auswahl der theoretisch zugänglichen Sonderfälle, anhand derer der dreidimensional axialsymmetrische CAA-Code im nächsten Kapitel validiert wird. Am Ende des Abschnitts wird die Theorie von Marble und Candel [18] vorgestellt und in eine angepasste Form gebracht, anhand derer die Validierung erfolgt.

Die inhomogene Grundströmung bildet in Verbindung mit einer nicht isentropen Schwankung der Strömungsgrößen (Entropiewelle) einen akustischen Quellterm [7, 18]. Infolge der räumlich inhomogenen Grundströmung ist die zuvor beschriebene Entkoppelung der Lösungen nicht möglich. Die Superponierbarkeit bleibt erhalten, da immer noch das linearisierte Gleichungssystem der Modellierung zugrunde liegt. Durch die inhomogene Rohrströmung kommt es zum Energieaustausch zwischen den einzelnen Lösungen der Eulergleichungen. Eine detaillierte Analyse der Koppelung auf Grundlage einer inkompressiblen, inhomogenen Strömung bei kleinen Machzahlen ist Ffowcs Williams und Howe [7] und Howe [10] zu entnehmen.

Liegt eine nicht homentropische Strömung beispielsweise in einem heißen Freistrahler vor, ist keine Erhaltung der akustischen Energie gegeben. Es kommt zu einer Verschiebung von Energie aus der Grundströmung in die akustische Energie und umgekehrt [22]. Howe [10] bezeichnet den zum Wirbellärm zusätzlichen Schall beim heißen Freistrahler als "excess jet noise". Eine detaillierte Analyse einer akustischen Energiegleichung und ihrer Quellterme in nicht homentropischen Grundströmungen ist [5] zu entnehmen.

Aus den Ableitungen in [5, 7, 10] lassen sich folgende grundlegende Quellmechanismen zusammenstellen:

- Wirbellärm
- Beschleunigung einer Entropiefluktuation („akustische Bremsstrahlung“)
- Einwirkung einer Scherschicht oder Mediengrenze („excess jet noise“)
- Fluktuation der Wärmezufuhr („Thermoakustische Oszillation“).

Prinzipiell ist auch eine Rückkopplung mit der Quelle der Entropieschwankungen möglich. Dabei regen die durch die instationäre Verbrennung verursachten Entropiewellen die Schallproduktion in der Düse an. Die stromauf laufenden Schallwellen steuern in dieser Rückkopplungsschleife die Wärmeproduktion bei der Verbrennung. Die Instabilität wird im Allgemeinen durch die Form und Länge des Rohres begünstigt. Ein mögliches Szenario ist z. B. eine stehende Welle im Rohr, die starke Druckschwankungen in der Verbrennungszone verursacht und damit die Entstehung von Entropiewellen triggert. Solche Rückkopplungseffekte führen häufig auch zu Verbrennungsinstabilitäten, wie sie in [5] beschrieben werden.

Eine Rückkopplung mit der Verbrennung kann bei linearen Eigenschaften der verwendeten Gleichungen, mit Hilfe einer Übertragungsfunktion zwischen Entropieschwankung und stromauf in die Verbrennungszone zurück laufender Schallwelle für einzelne relevante Moden in das Flammmodell integriert werden. Die lineare Ausbreitungsrechnung liefert eine nur von Grundströmung und Geometrie abhängige Übertragungsfunktion, so dass die hier gemachten Betrachtungen vollständig gültig bleiben.

Dieses Vorgehen ist scheitert bei praktischen Anwendungen, wenn keine Linearität mehr vorausgesetzt werden kann. Rückkopplungen verursachen häufig Instabilitäten, die durch nicht-lineare Effekte begrenzt werden. Nichtlineare Lösungen sind amplitudenabhängig, womit die Übertragungsfunktion der Düse von der Amplitude der eintretenden Welle abhängt. Die Anwendung der entkoppelten Betrachtung von Schallausbreitung und Flamme macht wegen der beschriebenen Probleme bei der Untersuchung von solchen Instabilitäten keinen Sinn. Die Schallabstrahlung der Brennkammer wird bei bekannter Entropieschwankung und Schallproduktion des Brenners durch das entkoppelte Verfahren gut beschrieben. Zum grundlegenden Verständnis der Schallabstrahlung durch Entropiewellen und zur Optimierung einer Düse ist der gegebene Ansatz damit gut geeignet.

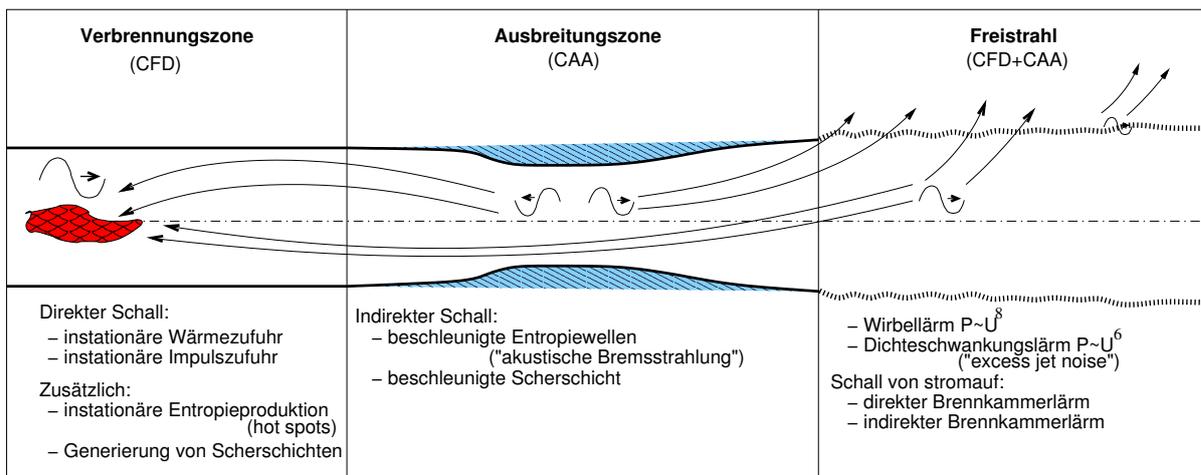


Abbildung 4.1: Schallquellen durch eine Brennkammer

Abbildung 4.1 fasst die Schallquellen in der Brennkammer und in deren Nachlauf zusammen. Mögliche Rückkopplungen sind durch auf die Flamme gerichtete Pfeile schematisch gekennzeichnet, um sie als Fehlerquelle für die dargestellte Modellierung im Blickfeld zu behalten. In erster Linie sind die instationäre Wärmezufuhr und die beschleunigt transportierte Dichteschwankung (Entropiewelle) hinter der Verbrennungszone wichtige Schallquellen. Die Schallerzeugung durch Wirbel oder Scherschichten wird im Folgenden nicht weiter betrachtet, stellt aber einen ähnlich wichtigen Quellmechanismus an Hinterkanten und in Spalten ("trailing edge noise") dar. Im Nachlauf einer Brennkammer entsteht ein heißer Freistrah, der Wirbellärm, aber auch Lärm aufgrund von beschleunigten Entropiewellen, erzeugt. An der Grenze zwischen heißem und kaltem Medium kommt es zur Brechung und Transmission von akustischen Wellen von stromauf, sowie

zur Generierung von Schall aus Entropieschwankungen. Das Verständnis dieser Grenzschicht ist daher sehr wichtig für die Vorhersage der Schallabstrahlung einer Brennkammer ins Fernfeld.

4.2.1 Direkte Identifikation von Schallquellen

Die Quellterme für die Eulergleichungen lassen sich direkt aus dem mathematischen Modell für die CAA-Simulation identifizieren. Mit Hilfe einer solchen Analyse können in einem numerisch simulierten Strömungsfeld Quellgebiete für die durch Entropiewellen induzierten akustischen Wellen gefunden werden. Wird eine nicht isentrope Dichteschwankung durch eine Verengung im Rohrquerschnitt beschleunigt, entsteht in den vorgestellten linearisierten Eulergleichungen eine Druckschwankung mit der gleichen Frequenz. Gleichung (2.46) liefert für den Fall, dass die Druck- und Dichteänderung der akustischen Wellen vernachlässigbar ist, die folgende gestörte Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}^2 p'}{\tilde{D} t^2} - \gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \Delta p' = & - \frac{\tilde{D}}{\tilde{D} t} \left[\left(\underline{u}' - \frac{p'}{\bar{P}} \bar{\underline{U}} \right) \cdot \nabla \bar{P} + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \underline{u}' \right] \\ & + \gamma \bar{P} \nabla \cdot \left[\frac{D \underline{u}'}{D t} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \bar{\underline{U}} \cdot \nabla \bar{\underline{U}} + \bar{\rho} \underline{u}' \cdot \nabla \bar{\underline{U}} \right] - \gamma \bar{P} \left(\nabla \frac{1}{\bar{\rho}} \right) \cdot \nabla p' \end{aligned} \quad (4.5)$$

Diese Wellengleichung entspricht einer Lighthill Formulierung für den Druck, wobei die Quellterme ebenfalls linearisiert wurden. Die Formulierung ist nicht auf kleine Machzahlen beschränkt. Der akustisch relevante Quellterm bei der Ausbreitung von Entropieschwankungen mit der Strömung ist der aus der Impulsbilanz stammende Term mit ρ' . Ausschreiben der Ableitungen aus Gl. (4.5) liefert die Quellterme in einer dreidimensionalen Strömung.

$$\begin{aligned} \gamma \bar{P} \nabla \cdot \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \bar{\underline{U}} \cdot \nabla \bar{\underline{U}} = \\ \gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \rho' \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \rho' \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Auswertung kann in einer bekannten Strömung die Quellgebiete identifizieren. Die Formulierung gilt lokal und liefert keine globale Aussage für den abgestrahlten Schall. Im folgenden Abschnitt werden daher verschiedene Theorien vorgestellt, die unter starken Vereinfachungen Vorhersagen für den aus einer Düse abgestrahlten Schall von Entropiewellen und Schallwellen treffen.

4.2.2 Theoretische Lösungen

Dowling [5] und Ffowcs Williams und Howe [7] sagen voraus, dass eine beschleunigte Entropiewelle Schall erzeugt. Wie im Abschnitt 3.3 und Abschnitt 3.4.3 gezeigt wurde, kann eine Entropiewelle als nicht adiabate Schwankung der Dichte realisiert werden. Die theoretischen Analysen beschränken sich in der Regel auf Sonderfälle wie kleine Machzahlen oder die Annahme einer kompakten Düse. Eine kompakte Düse liegt dann vor, wenn der gesamte thermodynamische Zustand, der sich aus mittlerer Größe und der zugehörigen Schwankung zusammensetzt, konstant über die Düse angenommen werden kann. Die Wellenlänge der Störungen in axialer Richtung muss dazu viel größer als die Länge der Düse sein.

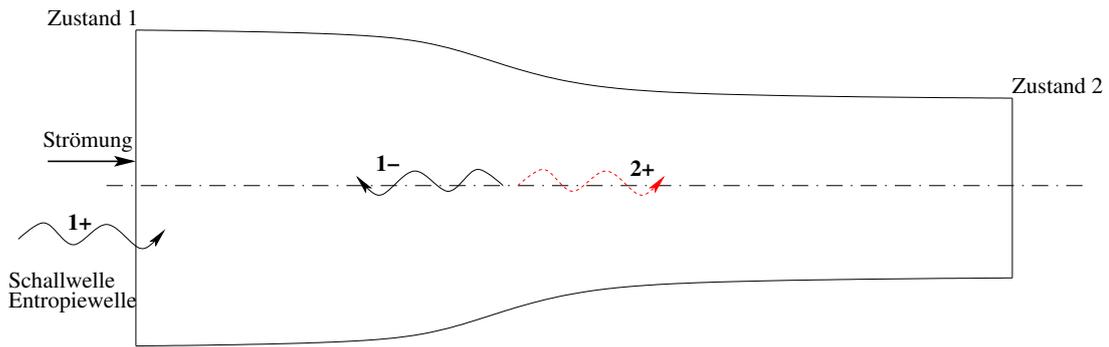


Abbildung 4.2: Bezeichnungen entsprechend der Notation in Marble und Candel [18] am Beispiel einer Düse

Da mit dem Verfahren vor allem Brennkammer-Austritte betrachtet werden sollen, in denen transsonische Verhältnisse vorliegen, wurde die Analyse von Marble und Candel [18] als Grundlage für die Validierungsrechnungen ausgewählt. Sie liefert durch eindimensionale Betrachtung unter Annahme einer kompakten Düse mit einer kompressiblen Potentialströmung Vorhersagen für die Schallabstrahlung einer durch eine Düsenströmung bewegten Entropieinhomogenität. Die Reflexion und Transmission einer akustischen Welle wird ebenfalls beschrieben. Die Theorie betrachtet getrennt subsonische und supersonische Strömungen mit und ohne Stoß. Da vor allem der Landeanflug kritisch für die Einhaltung der Lärmgrenzwerte ist, soll die Schallabstrahlung in dieser Situation verringert werden. Die Strömung in der Brennkammer erreicht bei der Landung häufig Machzahlen um eins im engsten Querschnitt der Düse, die durch einen sofort folgenden schwachen Stoß wieder in eine Unterschallströmung übergehen. Schwache Stöße können als adiabat angesehen werden und die Strömung ist im überwiegenden Teil der Düse eine Unterschallströmung, daher wird die subsonische Theorie zur Verifizierung benutzt. Die Kompaktheit impliziert gleichzeitig eine eindimensionale Form und Ausbreitung der Entropiewelle bzw. akustischen Welle. Im folgenden Abschnitt werden daher ebene Wellen für die Validierungsrechnungen verwendet. Die Nomenklatur orientiert sich im Folgenden an den, in den Ausführungen von Marble und Candel [18] verwendeten Bezeichnungen (vgl. Abbildung 4.2).

Zur Herleitung wird eine eindimensionale kompressible Potentialströmung angenommen. Die Düse wird als Stromröhre mit veränderlichem Querschnitt modelliert, wobei die Geschwindigkeit in axialer Richtung wie folgt von der Fläche abhängt:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (4.7)$$

Die kritische Fläche A^* ist die Fläche, die die Stromröhre bei einer Machzahl $M = 1$ einnimmt. Gleichung (4.7) wird später auch zur Erzeugung einer ebenen Potentialströmung in den Validierungsfällen benutzt.

Durch Nutzung der Kompatibilitätsbedingungen werden Bedingungen an die Strömungsgrößen über die unterkritische Düse gewonnen.

Die Bedingung für den Massenstrom zwischen Einlass und Auslass der Düse lautet:

$$\frac{1}{M} \frac{u'}{c} + \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} = \text{const.} \quad (4.8)$$

Für die isentrope Strömung gilt:

$$\frac{s'}{C_p} = \text{const.} \quad (4.9)$$

Die Ruhetemperatur wird in der isentropen Grundströmung erhalten:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M^2} \left(\gamma \frac{p'}{\gamma \bar{p}} - \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} + (\gamma - 1) M \frac{u'}{c} \right) = \text{const.} \quad (4.10)$$

Durch die Auswertung dieser Bedingungen wird eine Relation zwischen der in einem Rohrabschnitt eingesetzten Abweichung der Entropie von der mittleren Größe und den von der Querschnittsverengung bzw. -erweiterung abgestrahlten Schallwellen abgeleitet [18]. Prinzipiell wird auch die Ausbreitung einer Entropiewelle stromab der Düse beschrieben, aber diese Gleichung wird in [18] nicht angegeben. Unter Nutzung von Gl. (2.49) und Gl. (4.9) wird eine solche Beziehung direkt abgeleitet. Dazu wird noch der Zusammenhang zwischen Ruhedichte und der mittleren Dichte im Rohrabschnitt 1 sowie dem Abschnitt 2 entlang einer Stromröhre über die Düse oder den Diffuser benötigt (vgl. [39]):

$$\frac{\bar{\varrho}_0}{\bar{\varrho}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (4.11)$$

Eingesetzt in Gleichung (4.9) ergibt sich folgendes Verhältnis zwischen der Entropiewelle ϱ'_s im Rohrabschnitt 1 und der Entropiewelle ϱ'_{s2} im Abschnitt 2.

$$\frac{\varrho'_{s2}}{\varrho'_s} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (4.12)$$

Die Vorhersage für das Verhältnis von stromab ($\frac{p'_{2+}}{\varrho'_s}$) bzw. stromauf ($\frac{p'_{1-}}{\varrho'_s}$) abgestrahlter Schallwelle und der Dichteschwankung aus der Entropiewelle mit der Stärke $\sigma_s = \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}}$ (vgl. Gl. (2.49)) lautet wie folgt [18]:

$$\frac{\tilde{p}'_{1-}}{\tilde{\varrho}'_s} = - \frac{M_2 - M_1}{1 - M_1} \frac{\frac{1}{2} M_1}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1} \frac{\gamma \bar{P}_1}{M_2 \bar{\varrho}_1} \quad (4.13)$$

$$\frac{\tilde{p}'_{2+}}{\tilde{\varrho}'_s} = \frac{M_2 - M_1}{1 + M_2} \frac{\frac{1}{2} M_2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1} \frac{\gamma \bar{P}_2}{M_2 \bar{\varrho}_1} \quad (4.14)$$

Mit den gasdynamischen Beziehungen aus Zierep [39] werden die Verhältnisse der mittleren Drücke durch die Abhängigkeit von der Machzahl ersetzt. Dazu wird die Düse als Stromfaden mit einer kompressiblen Strömung modelliert. Für das Verhältnis zwischen Druck und Ruhedruck (bei $M_0 = 0$) wird für eine kompressible, isentrope Strömung wie folgt angegeben (vgl. [39]):

$$\frac{\bar{p}_0}{\bar{p}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (4.15)$$

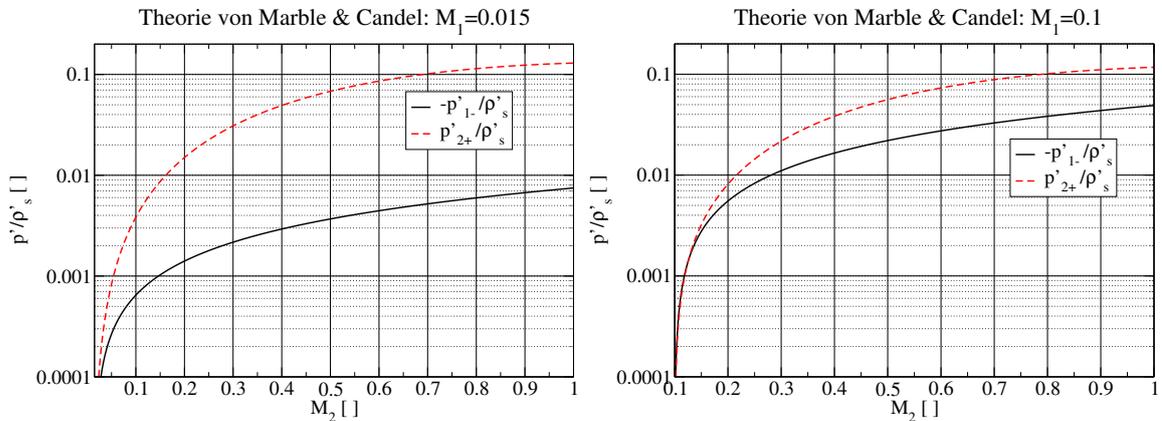
Diese Beziehung kann in der Düse stromauf und stromab der Verengung ausgewertet werden. Da der Ruhedruck in einer isentropen Unterschallströmung erhalten bleibt, ergibt sich eine Beziehung zwischen den Drücken im Abschnitt 1 und 2. Außerdem wird der Ausdruck $\frac{\gamma \bar{P}_1}{\bar{\rho}_1}$ durch das Quadrat der lokalen Schallgeschwindigkeit in Düsenabschnitt 1 (a_1^2) abgekürzt.

$$\frac{\tilde{p}'_{1-}}{\tilde{\rho}'_s} = -\frac{M_2 - M_1}{1 - M_1} \frac{\frac{1}{2} M_1}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1 M_2} a_1^2 \quad (4.16)$$

$$\frac{\tilde{p}'_{2+}}{\tilde{\rho}'_s} = \frac{M_2 - M_1}{1 + M_2} \frac{\frac{1}{2} M_2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1 M_2} a_1^2 \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.17)$$

Die entstehende Größe hat die Dimension der Schallgeschwindigkeit zum Quadrat. Zur Erzeugung einer dimensionslosen Größe wird das Verhältnis im Folgenden zweckmäßigerweise mit dem Quadrat der Schallgeschwindigkeit im Abschnitt 1 (a_1^2) normiert (vgl. Tab. 4.1).

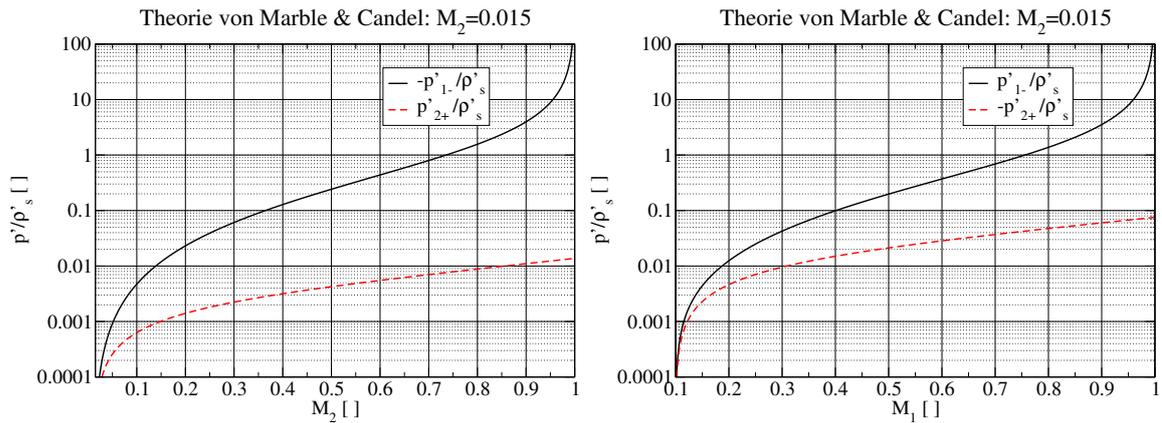
Die akustischen Wellen vom Einström- und Ausströmrand der Düse (p'_{1+} und p'_{2-}) sind für die Ausbreitung der Entropiewellen vernachlässigbar. Das Ergebnis einer gleichzeitigen Ausbreitung von akustischen Wellen und Entropiewellen wird aus den Lösungen für die Ausbreitung der Entropiewelle und der akustischen Wellen durch Superposition gewonnen. In dem linearen System sind die einzelnen reflektierten und transmittierten akustischen Wellen und die aus der Düse abgestrahlten Schallwellen unabhängig voneinander. Als Quellmechanismus für die aus der Düse abgestrahlten akustischen Wellen wird die Schwankung des Massenstroms durch die Düse identifiziert [7, 10, 18].



Die Einströmmachzahl ist $M_1 = 0.015$ (linkes Bild) bzw. $M_1 = 0.1$ (rechtes Bild)

Abbildung 4.3: Verhältnisse zwischen einlaufender nicht isentroper Dichteschwankung und ausgesandten Schalldruckschwankungen in einer Düse

Abbildung 4.3 zeigt beispielsweise für eine Düse mit einem Flächenverhältnis von 35:1 und einer Machzahl $M_2 = 0.95$ im engsten Querschnitt bei einer Machzahl von $M_1 = 0.015$ in der An- und Ausströmung eine stromauf laufende akustische Welle (p'_{1-}) mit einer Druckamplitude von 0.7 % der ursprünglichen dimensionslosen Dichteschwankung. Die entsprechende stromab laufende Welle (p'_{2+}) hat eine dimensionslose Druckamplitude von 12.7 % der eingegeben dimensionslosen Dichteschwankung durch die Entropiewelle (vgl. Abbildung 4.3).



Die Einströmmachzahl ist $M_2 = 0.015$ (linkes Bild) bzw. $M_2 = 0.1$ (rechtes Bild)

Abbildung 4.4: Verhältnis zwischen einlaufender nicht isentroper Dichteschwankung und ausgesandten Schalldruckschwankungen in einem Diffuser

Für einen Diffuser mit dem gleichen Flächenverhältnis bei einer Machzahl von 0.95 im engsten Querschnitt ergibt sich eine dimensionslose Druckamplitude, die einer 8.9-fachen Verstärkung der ursprünglichen dimensionslosen Dichteamplitude entspricht. Bei einer Machzahl von 0.99 herrscht eine 48-fache Verstärkung der stromauflaufenden Welle. Bei $M_1 = 1$ wird der $1 - M_1$ Term singulär und die Theorie bricht zusammen, da die Druckamplitude der stromauflaufenden Welle unendlich wird und gleichzeitig die Ausbreitungsgeschwindigkeit verschwindet. Die stromablaufende Druckstörung ist vergleichsweise klein mit unter 1.5 % der dimensionslosen Dichteamplitude (vgl. Abbildung 4.4).

Abbildung 4.3 und Abbildung 4.4 geben einen Überblick über die theoretische Schallabstrahlung einer kompakten Düse bzw. eines kompakten Diffusers. Für die Düse ist die Einströmmachzahl konstant gehalten, für den Diffuser die Machzahl der Ausströmung. Der Diffuser liefert eine größere Schallproduktion als die Düse, wenn im verengten Rohrquerschnitt Machzahlen über $M_1 = 0.7$ vorliegen. In diesem Bereich wird vor allem die stromauflaufende akustische Welle stark angeregt. Bei einer realen konvergent-divergenten Überschalldüse mit schallnaher Strömung kann die abgestrahlte stromauflaufende Welle im konvergenten Teil der Düse reflektiert werden. Daher spielt die korrekte Wiedergabe der Schallausbreitung durch das verwendete numerische Verfahren eine ähnlich große Rolle zur Vorhersage der Schallabstrahlung einer Düse, wie die Kopplung der Entropiewellen mit den akustischen Wellen im inhomogenen Strömungsfeld.

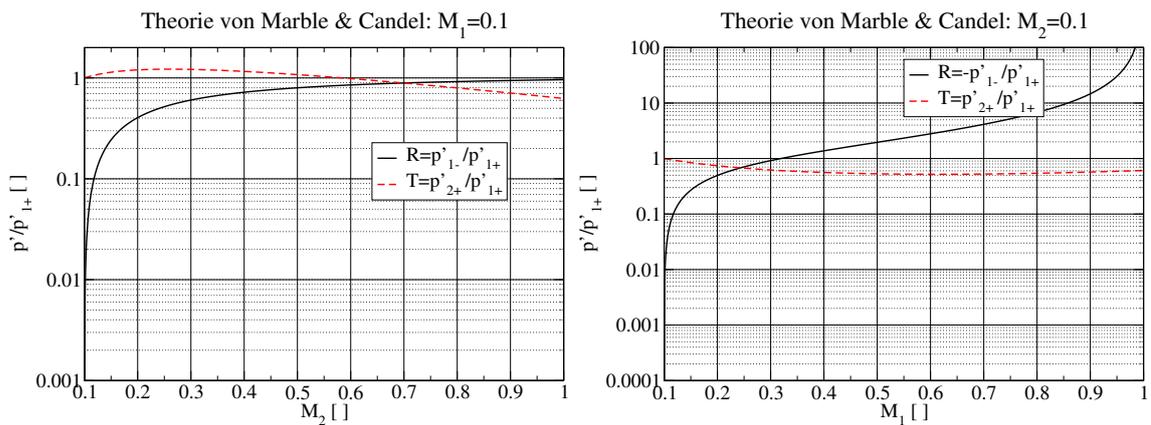
In der Realität gibt es zusätzlich zu den globalen Schwankungen der Entropie im gesamten Querschnitt sogenannte hot-spots, die durch die Verbrennung nicht ausreichend zerstäubter Brennstofftropfen entstehen. Die Analyse von Ffowcs Williams und Howe [7] macht nicht die Einschränkung auf eine eindimensionale Ausbreitung von Entropie- und Schallwellen, wie sie in [18] vorausgesetzt wird. Die Theorie für eine allgemeine Form der Entropieschwankung ist aber nur für kleine Variationen der Machzahl gültig [7]. Eine kleine Variation der Machzahl entspricht keineswegs den in einem Brennkammerauslass zu erwartenden Verhältnissen. Daher wird

zur Validierung des numerischen Verfahrens ausschließlich die Theorie von Marble und Candel [18] herangezogen.

Die Strömung in der Brennkammer selbst findet in der Realität oft bei sehr kleinen Machzahlen statt, so dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Entropiewellen um Größenordnungen kleiner ist, als die der akustischen Wellen. Das Rechengitter muss mit seinem Punktabstand an die extrem kurzwelligen Entropiewellen angepasst werden. Daher werden die akustischen Wellen in der Brennkammer bei den dort vorliegenden Machzahlen relativ fein aufgelöst. Für das optimierte CAA-Verfahren stellen die verschiedenen Längenskalen von Entropiewellen und akustischen Wellen theoretisch kein Problem dar, sofern die minimale Wellenlänge bei der Berechnung der Gitterauflösung beachtet wird.

4.3 Transmission und Reflexion von akustischen Wellen in einer beschleunigten Rohrströmung

Zusätzlich zur Simulation des indirekten Schalls aus der Kopplung von Entropiewellen mit akustischen Wellen in der beschleunigten Rohrströmung soll auch die Ausbreitung Schallwellen simuliert werden. Dabei handelt es sich einerseits um den sogenannten direkten Schall vom Brenner und andererseits um die Ausbreitung von Schallwellen die am Brennkammerauslass generiert werden. Der direkte Schall entsteht, wenn es bei der Verbrennung zu einer instationären Expansion oder Energiezufuhr kommt. Die Theorie von Marble und Candel [18] liefert auch für die Schallausbreitung eine theoretische Lösung. Entsprechend der Notation in Abbildung 4.2 wird eine stromab laufende p'_{1+} oder stromauf laufende p'_{2-} akustische Welle in die Gln. (4.8) eingesetzt, um eine Vorhersage für die Transmission und Reflexion am Brennkammerauslass zu gewinnen. Die kompakte Düse verhält sich in diesem Fall ähnlich wie eine Mediengrenze.



linkes Bild: Düse mit $M_1 = 0.1$; rechtes Bild: Diffuser mit $M_2 = 0.1$

Abbildung 4.5: Reflexion und Transmission der stromab laufenden Schallwelle

Die Ergebnisse von Marble und Candel [18] liefern folgende Vorhersage für Reflexion und Transmission in einer kompakten Düse bei Vorgabe einer akustischen Wellen, die sich stromab

in die Düse ausbreitet (Vorgabe von p'_{1+} , vgl. Abbildung 4.5):

$$\begin{aligned} R &:= \frac{p'_{1-}}{p'_{1+}} = \left(\frac{1 + M_1}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{M_2 - M_1}{1 - M_1} \right) \left(\frac{1 - \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1 M_2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1 M_2} \right) \\ T &:= \frac{p'_{2+}}{p'_{1+}} = \left(\frac{1 + M_1}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{2 M_2}{1 + M_2} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_2^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1 M_2} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Reflexion R und Transmission T einer stromab durch die Düse laufenden Welle ergibt sich entsprechend bei Vorgabe von p'_{2-} . Die Strömung kommt, wie es in Abbildung 4.2 dargestellt ist, von links. Die Schallquelle befindet sich für den Fall der Schallausbreitung stromaufwärts in die Düse rechts im Bild.

$$\begin{aligned} R &:= \frac{p'_{2+}}{p'_{2-}} = \left(\frac{1 - M_1}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{2 M_2}{1 - M_2} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_2^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1 M_2} \right) \\ T &:= \frac{p'_{1-}}{p'_{2-}} = \left(\frac{1 - M_1}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{M_1 - M_2}{1 + M_1} \right) \left(\frac{1 - \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1 M_2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1 M_2} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_2^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Druckschwankungen sind hier genau wie im vorherigen Abschnitt mit der Dichte und der Schallgeschwindigkeit an der Schallquelle $a_1 \varrho_1$ normiert. Gleichung (4.18) – (4.19) dienen im folgenden Kapitel zur Validierung des CAA-Programms. Die Ableitungen in den Abschnitten 4.2.2 und 4.3 basieren auf einer ebenen Potentialströmung im Innern der Düse. Da die abgeleiteten Beziehungen eine wichtige Grundlage der weiteren Betrachtungen darstellen, sind sie in der folgenden Zusammenfassung noch einmal wiedergegeben.

4.4 Zusammenfassung

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Theorie von Marble und Candel [18] an die Notation und Größen bei der CAA-Berechnung angepasst. Dazu wurden grundlegende Beziehungen in einer kompressiblen Stromröhre benutzt und eine eindimensionale Strömung in der Düse angenommen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Die Größe a_1 ist die dimensionslose Schallgeschwindigkeit stromauf von der Querschnittsänderung.

Tabelle 4.1: Zusammenfassung der angepassten Theorie von Marble und Candel [18] für die eindimensionale Wellenausbreitung in einer eindimensionalen isentropen kompressiblen Potentialströmung

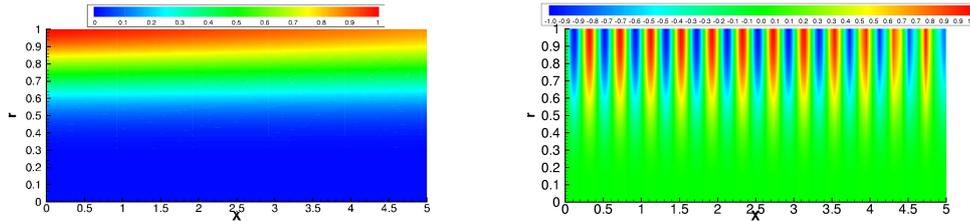
Erregung	Übertragungsfunktion
Entropiewelle ϱ'_s	$\frac{\varrho'_{s2}}{\varrho'_s} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ $\frac{p'_{1-}}{\varrho'_s} = -\frac{M_2 - M_1}{1 - M_1} \frac{\frac{1}{2} M_1}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1 M_2} a_1^2$ $\frac{p'_{2+}}{\varrho'_s} = \frac{M_2 - M_1}{1 + M_2} \frac{\frac{1}{2} M_2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1 M_2} a_1^2 \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
stromab akustisch p'_{1+}	$\frac{\varrho'_{s2}}{p'_{1+}} = 0$ $R := \frac{p'_{1-}}{p'_{1+}} = \left(\frac{1 + M_1}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{M_2 - M_1}{1 - M_1} \right) \left(\frac{1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1 M_2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1 M_2} \right)$ $T := \frac{p'_{2+}}{p'_{1+}} = \left(\frac{1 + M_1}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{2 M_2}{1 + M_2} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_2^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1 M_2} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
stromauf akustisch p'_{2-}	$\frac{\varrho'_{s2}}{p'_{2-}} = 0$ $R := \frac{p'_{2+}}{p'_{2-}} = \left(\frac{1 - M_1}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{2 M_2}{1 - M_2} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_2^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1 M_2} \right)$ $T := \frac{p'_{1-}}{p'_{2-}} = \left(\frac{1 - M_1}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{M_1 - M_2}{1 + M_1} \right) \left(\frac{1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1 M_2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1 M_2} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_2^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Kapitel 5

Ergebnisse

Das Kapitel Ergebnisse gliedert sich in zwei große Abschnitte. Im ersten Teil werden die beiden Pufferzonen aus Abschnitt 3.4.1 und 3.4.2 verglichen. Im zweiten Teil des Kapitels wird die Theorie aus Kapitel 4 den numerischen Resultaten gegenübergestellt. Im Anschluss daran werden einige Anwendungsbeispiele für das vorgestellte Verfahren gegeben.

5.1 Vergleich zwischen PML- und NC/F-Randbedingung



Analytische Lösung, links: ($m = 6$, $n = 1$, $\omega = 9.14$, $k \approx 0$, $M_x = 0.3$, $\Omega = 0.3$)

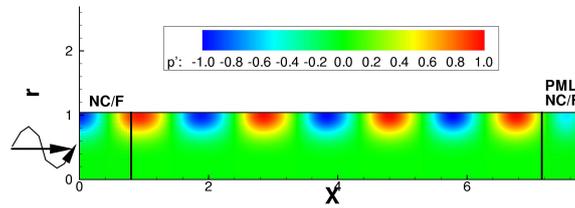
rechts: ($m = 3$, $n = 1$, $\omega = 9.14$, $k \approx 0$, $M_x = 0.3$, $\Omega = -0.3$)

Abbildung 5.1: Vergleich PML vs. NC/F: Momentane Druckkontur der betrachteten Extremfälle

In diesem Abschnitt werden die im Abschnitt 3.4.1 und 3.4.2 beschriebenen Randbedingungen verglichen. Dazu wird eine gerade ($m = 6$) und eine ungerade ($m = 3$) Azimutalmode bei zwei verschiedenen Kreisfrequenzen ($\omega = 9.14, 20$) benutzt. Die Schallquelle erregt jeweils nur die erste Radialmode $n = 1$. Die Grundströmung ist entweder drallfrei oder führt eine Starrkörperrotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \pm 0.3$ aus, so dass gleichzeitig die Implementierung der Drallterme überprüft werden kann. Die Vielzahl von Testfällen ist unter anderem auch notwendig, um einen Überblick über die Güte der Randbedingung bei verschiedenen Einfallswinkeln und verschiedenen Wellenlängen zu gewinnen. Die Fälle mit einer verdrallten Grundströmung sind besonders interessant, da hier beide Randbedingungen nur eine Näherung darstellen. In allen hier gezeigten Testfällen breiten sich die Wellen in Richtung der axialen Strömung aus. Die Mode $m = 6$, $n = 1$, $\omega = 9.14$ hat bei der Ausbreitung mit der Rotationsrichtung der verdrallten Strömung ($M_x = 0.3$, $\Omega = 0.3$) eine nahezu unendliche Wellenlänge (vgl. Abbildung 5.1 links). Das andere Extrem ist die sich entgegengesetzt ausbreitende Mode ($m = 3$, $n = 1$, $\omega = 20$, $M_x = 0.3$, $\Omega = -0.3$, in Abbildung 5.1 rechts dargestellt). Sie wird mit dem gleichen Gitter mit nur etwa zwölf Punkten pro axialer Wellenlänge (PPW) aufgelöst. Die Wahl von verschiedenen Frequenzen ist notwendig, um die Anzahl der ausbreitungsfähigen höheren Radialmoden zu variieren. Im ersten Fall $\omega = 9.14$ sind bei den betrachteten Azimutalmode nur zwei Radialmoden für die Azimutalmode $m = 3$ bzw. eine Radialmode für $m = 6$ cut-on. Bei der Wahl $\omega = 20$ sind für die untersuchte Azimutalmode $m = 3$ fünf Radialmoden cut-on.

Die variablen Parameter sind neben dem Typ der Randbedingung, die Weite der Pufferzone in Punkten n_P und die Größe des Dämpfungsgrades $R_d(x, r)$ in der Pufferzone. Der Rand an der Schallquelle benutzt ausschließlich die NC/F-Randbedingung und wurde daher nicht variiert,

sondern mit konstant $n_P = 24$ Punkten Weite angelegt und mit einem Dämpfungsgrad von $R_d = 2.5$ beaufschlagt (vgl. Abbildung 5.2).

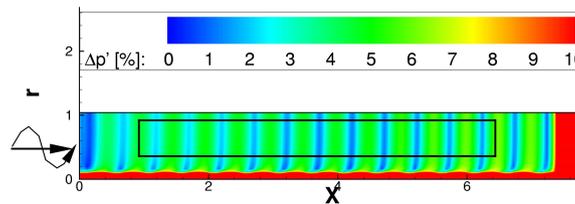


(Erste Radialmode der Azimutalmode $m = 6$ bei $\omega = 9.14$, $M_x = 0.3$, $\Omega = 0$)

Abbildung 5.2: Numerisches Beispiel (momentane Druckkontur) mit den Pufferzonen für den Vergleich zwischen PML- und NC/F-Randbedingung am Auslass (rechts im Bild)

Aus all diesen Parametern ergibt sich eine Reihe von verschiedenartigen Verifikationsfällen für die Randbedingungen, die aus zeitlichen Gründen nicht alle für jeden Parameter in der Randbedingung überprüft werden konnten. Die in diesem Abschnitt zusammengestellten numerischen Beispiele, summieren sich schon jetzt auf Testmatrix von über 200 Testfällen. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit nicht allein auf dem Vergleich der Randbedingungen liegt, wurde nach der Auswertung der ersten Ergebnisse entschieden die Testmatrix anzupassen.

5.1.1 Größe des Dämpfungsgrades



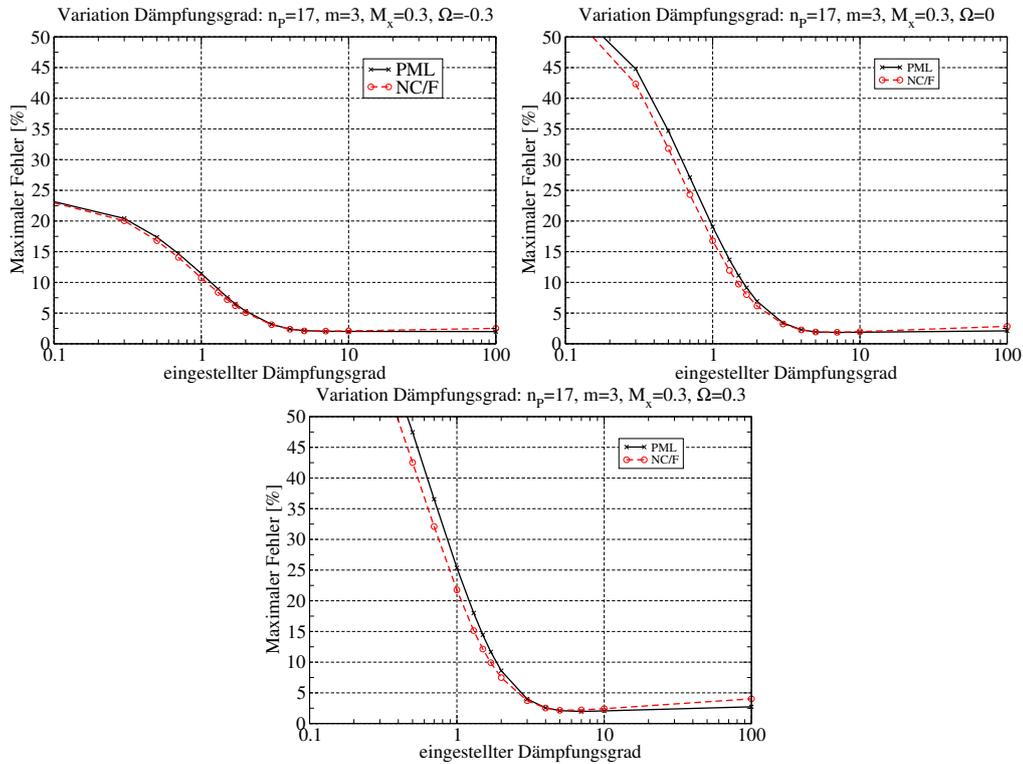
Die Kontrollzone zum Vergleich zwischen PML- und NC/F-Randbedingung ist schwarz umrandet.

Abbildung 5.3: Relativer Fehler des Drucks im inneres Rechengebiet

Als Kriterium für den Vergleich der Randbedingungen dient die maximale Abweichung von der analytischen Lösung im inneren Gebiet über eine Periode. Um eine für verschiedene Moden vergleichbare Aussage zu erhalten, wird der Fehler mit der Amplitude ($A(r)$) der analytischen Lösung der jeweiligen Mode normiert. Die Ränder einschließlich von sechs Punkten im inneren Feld oberhalb der Achse werden bei der Berechnung des Fehlers ausgeschlossen. Das hat zwei Gründe. Wie im Abschnitt 3.1.3 gezeigt wird, sind die Werte an der Achse aufgrund der künstlichen Dämpfung (SAD) unzuverlässig. Der zweite Grund für den Ausschluss ist, dass die analytische Lösung für kleine r sehr klein wird und damit die relativen Rundungsfehler sehr groß werden können. Die Kontrollzone, in der der maximale Fehler zum Vergleich ermittelt wird, ist

anhand des Beispiels ($m = 6$, $\omega = 9.14$, $M_x = 0.3$, $\Omega = 0$) in Abbildung 5.3 dargestellt.

Der Vergleich der Ergebnisse, die bei Erregung mit der kleineren Kreisfrequenz $\omega = 9.14$ gewonnen wurden, ist in Abbildung 5.4 für die ungerade Azimutalmode $m = 3$ und in Abbildung 5.5 für die gerade Azimutalmode $m = 6$ zusammengestellt.



Relative maximale Fehler für die Mode: ($m = 3$, $n = 1$) bei $M_x = 0.3$

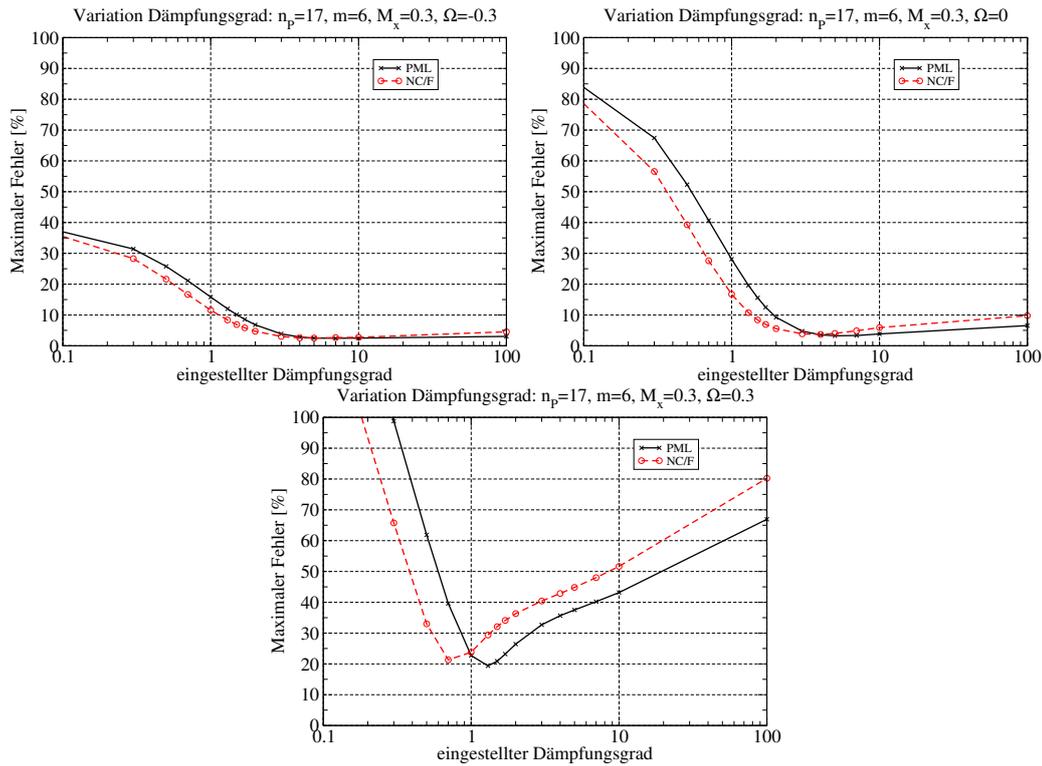
$$\begin{array}{cc} \Omega = -0.3 & \Omega = 0 \\ \Omega = 0.3 & \end{array}$$

Abbildung 5.4: Vergleich PML vs. NC/F: ungerade Azimutalmode bei $\omega = 9.14$

Die Abbildung 5.4 zeigt die relativen maximalen Fehler im Vergleich zwischen der numerischen und der analytischen Lösung für die beiden Randbedingungen. Zum Abschluss der Randzone werden die Werte der Störungen Null gesetzt. Der Dämpfungsgrad mit dem geringsten Fehler liegt für beide Randbedingungen bei $R_d = 5$.

Abbildung 5.5 stellt die relativen Fehler für die 42 Testfälle mit der geraden Azimutalmode ($m = 6$) zusammen. Bei Wahl einer Laufrichtung mit der Starrkörperrotation ergeben sich größere Fehler als in den beiden anderen Fällen. Die beiden kurzwelligen akustischen Wellen, deren relative Fehler in den oberen beiden Abbildungen dargestellt sind, liefern ein ähnliches Bild wie die Ausbreitung der ungeraden Azimutalmode. Der Dämpfungskoeffizient mit der geringsten Fehlerrate ist etwa $R_d = 5$. Die PML-Randbedingung schneidet bei Einstellung eines größeren Dämpfungsgrades im Vergleich besser ab, da der relative Fehler nahezu konstant bleibt, während die NC/F-Randbedingung eine mit dem Dämpfungskoeffizienten ansteigende Fehlerrate hat.

Wie bereits zuvor bei der ungeraden Mode festgestellt, ist die Ausbreitung der Wellen mit



Relative maximale Fehler für die Mode: ($m = 6, n = 1, \omega = 9.14, k \approx 0$), bei $M_x = 0.3$

$$\begin{array}{cc} \Omega = -0.3 & \Omega = 0 \\ \Omega = 0.3 & \end{array}$$

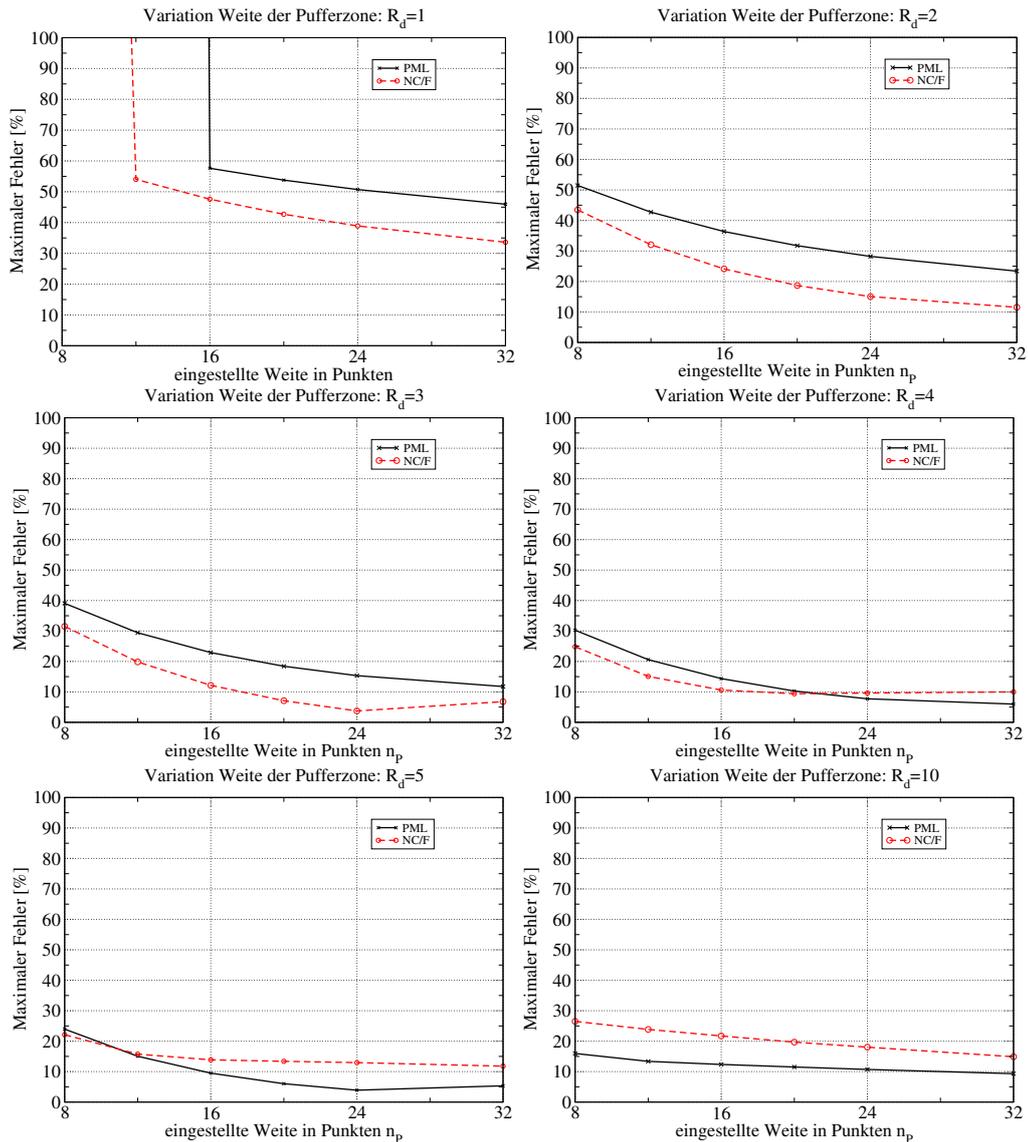
Abbildung 5.5: Vergleich NC/F vs. PML: gerade Azimutalmode bei $\omega = 9.14$

der längsten axialen Wellenlänge in Azimutalrichtung entlang der Pufferzone der kritische Fall für beide Randbedingungen. Beide Ansätze liefern für die Wahl $m = 6, n = 1, M_x = 0.3, \Omega = 0.3$ ein sehr scharf abgegrenztes Minimum für den Punkt des idealen Dämpfungsgrades. Die PML-Randbedingung hat in diesem Fall einen idealen Dämpfungsgrad von $R_d = 1.3$ (19 % Fehler), während die NC/F-Randbedingung schon bei einem Dämpfungsgrad von $R_d = 0.7$ den minimalen Fehler (21 %) erreicht. Die gewählte Mode stellt mit ihrer nahezu parallelen Bewegung entlang der Pufferzone, die sich in dem verwendeten Koordinatensystem als starke zeitliche Schwankung ohne entsprechende axiale oder radiale Gradienten abbildet, den schwierigsten Fall für beide Randbedingungen dar.

5.1.2 Länge der Pufferzone

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Breite der eingestellten Pufferzone untersucht. Dabei werden gleichzeitig auch die Dämpfungskoeffizienten um den im vorherigen Abschnitt gefundenen Idealwert variiert, um eine optimale Kombination für die jeweilige Randbedingung zu finden.

Abbildung 5.6 zeigt den Vergleich der beiden Randbedingungen bei Variation der Punktanzahl in der Pufferzone von 8 bis 32 Punkten bei Dämpfungsgraden von $R_d = 1$ bis $R_d = 10$.



Relative maximale Fehler für eine ungerade Azimutalmode ($m = 3, n = 1, \omega = 9.14 k \approx 0, M_x = 0.3$) mit dem Dämpfungskoeffizienten:

$$\begin{array}{ll}
 R_d = 1 & R_d = 2 \\
 R_d = 3 & R_d = 4 \\
 R_d = 5 & R_d = 10
 \end{array}$$

Abbildung 5.6: Variation der Weite der Pufferzone im Vergleich zwischen PML- und NC/F-Randbedingung

Da die Gitterweite bei der Variation konstant bleibt, ändert sich gleichzeitig auch die Gesamtlänge der Pufferzone. Wie die Ergebnisse im vorherigen Abschnitt bereits gezeigt haben, liefert die NC/F-Randbedingung bei geringeren Dämpfungsgraden kleinere relative Fehler als die PML-Randbedingung. Beide Randbedingungen sind bei der Wahl einer kurzen Pufferzone instabil für zu geringe Dämpfungsgrade, da durch die Terminierung der Pufferzone kurzweilige Schwankungen generiert werden. Die NC/F-Randbedingung erreicht schon bei zwölf Punkten Stabilität für

den Dämpfungsgrad $R_d = 1$, während die PML-Randbedingung eine 16 Punkte breite Pufferzone benötigt.

Bei höheren Dämpfungsgraden verschiebt sich das Gleichgewicht zugunsten der PML-Randbedingung. Bei einem Dämpfungsgrad von $R_d = 5$ und einer Weite von 24 Punkten für die Pufferzone ist die optimale Fehlerrate für die PML-Randbedingung erreicht. Die NC/F-Randbedingung liefert ähnlich geringe Fehler wie die PML-Randbedingung. Die optimale Einstellung der NC/F-Randbedingung liegt bei dem Dämpfungsgrad $R_d = 3$ mit einer 24 Punkte breiten Pufferzone.

5.1.3 Optimale Pufferzone

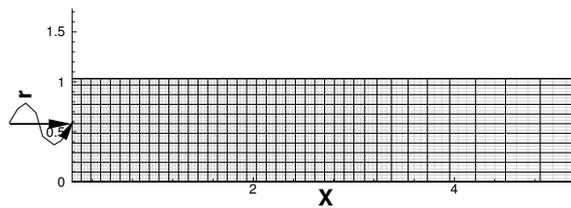


Abbildung 5.7: Zum Rand hin gestrecktes Gitter

Zur Berechnung des letzten Beispiels mit einer ungeraden Azimutalmode ($m = 3$) bei einer höheren Frequenz ($\omega = 20$) wurden alle bekannten Optimierungen für die Randbedingung verwendet. Das Gitter wurde zum Rand hin gestreckt (Abbildung 5.7). Die künstliche Dämpfung wurde auf $\sigma = 0.025$ verringert, um den bei kurzen Wellenlängen besonders hohen Energieverlust zu vermeiden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.8 zusammengestellt. Das Ergebnis unterscheidet sich erheblich von den im vorigen Abschnitt vorgestellten Resultaten. Die Kurven fallen bis zum Dämpfungsgrad $R_d = 100$ stetig ab. Vermutlich wird die optimale Größe für die Dämpfung im untersuchten Bereich noch nicht erreicht.

5.2 Verifikation der Wand-Randbedingung

Die Wand-Randbedingung wurde entsprechend der Überlegungen zur direkten Eingabe im Abschnitt 3.2.1 geändert, daher ist eine Überprüfung der Ergebnisse notwendig.

Abbildung 5.9 zeigt Real- und Imaginärteil der dimensionslosen Normalengeschwindigkeit für eine der Entropiewellen im nächsten Abschnitt. Das Gitter ist in der Querschnittsverengung nicht lokal orthogonal zur Wand. Die Normalengeschwindigkeit beinhaltet nur Rundungsfehler und erreicht nur in dem stark verzerrten Rohrabschnitt nicht exakt den Wert Null.

5.3 Verifikation für einfache Düsenströmungen

In diesem Abschnitt wird das CAA-Verfahren auf die Ausbreitung von Entropiewellen und akustischen Wellen in beschleunigten Rohrströmungen angewendet. Zum Vergleich wird die Theorie

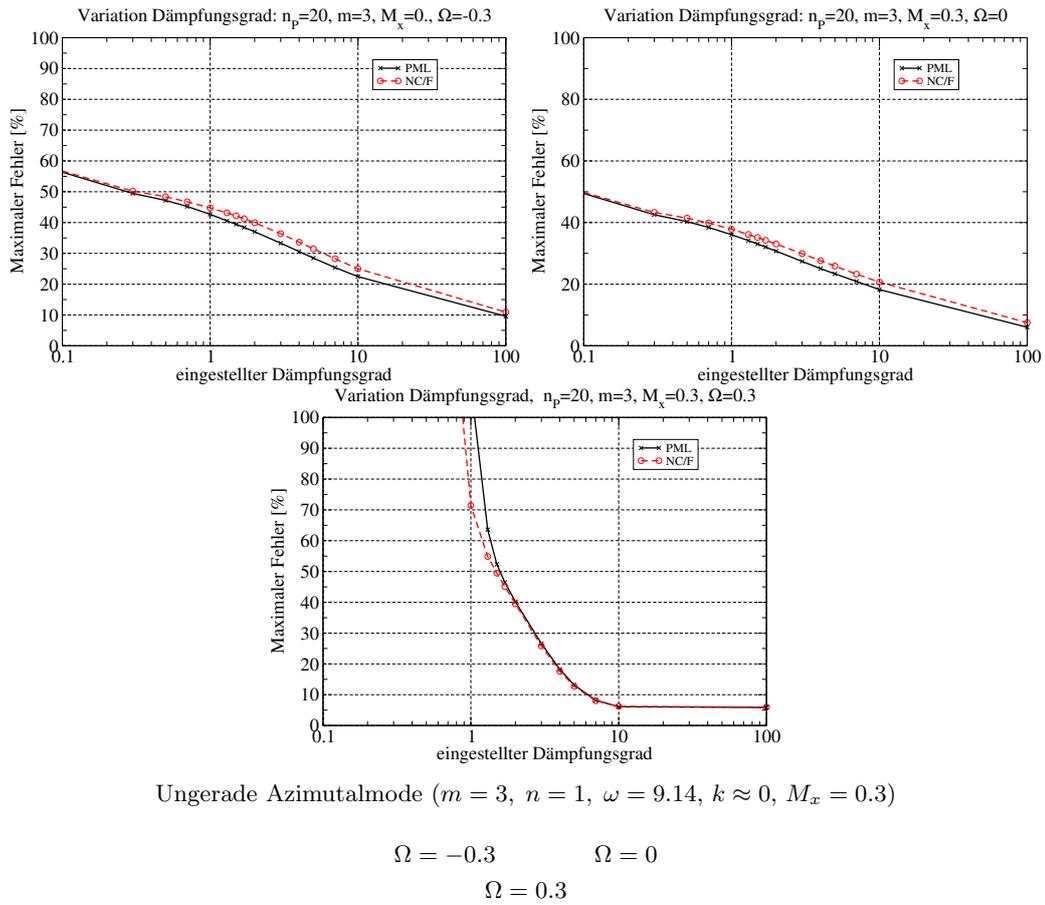


Abbildung 5.8: Vergleich PML vs. NC/F: ungerade Azimutalmode $m = 3$ bei $\omega = 20$

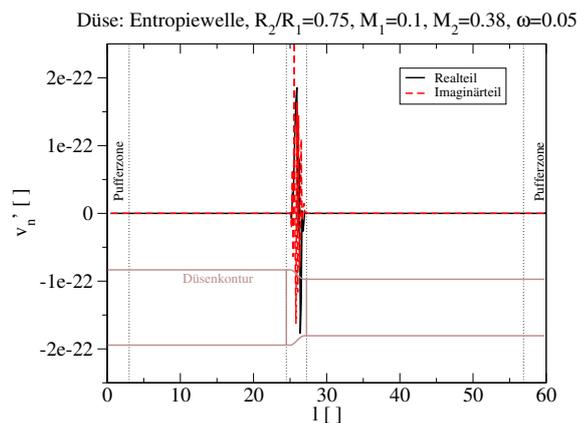
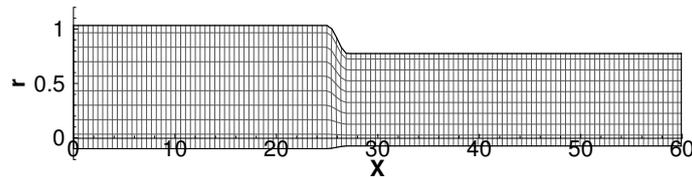


Abbildung 5.9: Verifikation der Wand-Randbedingung

von Marble und Candel [18] aus Abschnitt 4.2.2 herangezogen. Bei dem CAA-Verfahren handelt es sich im Gegensatz zur eindimensionalen Theorie um einen dreidimensional, axialsymmetrischen Ansatz. Die gewählten Vergleichsfälle sind nur ein kleiner Ausschnitt aus den realen Möglichkeiten der CAA-Methode. Insbesondere muss darauf hingewiesen werden, dass die Theorie

nicht die Möglichkeit zur Verifikation der Ausbreitung von höheren Moden gibt. Die CAA-Fälle verwenden im Folgenden sehr langwellige ebene Wellen, um die Kompaktheitsbedingung in der Düsen- bzw. Diffuserströmung zumindest in guter Näherung zu erfüllen. Die Einströmmachzahl M_1 bzw. Ausströmmachzahl M_2 wird zwischen 0.1 und 0.4 variiert.

Das Querschnittsverhältnis zwischen Auslass und Einlass der verwendeten generischen Düsen und Diffuser variiert zwischen 0.9 und 0.25. Eine Düsengeometrie ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Das Verhältnis von Länge zu Höhe beträgt 60 : 1 und die Düsenkontur ist 2.74 mal so lang wie der Radius am linken Rand. Die Querschnittsverengung wird mit etwa zehn Punkten aufgelöst. Das strukturierte Gitter besteht aus 500x35 Knoten. Das innere Gitter wird mit einem biharmonischen Verfahren [38] geglättet, bevor die Randpunkte generiert werden, um möglichst gleichmäßige Gitterabstände für die ausgedehnten Differenzensterne zu schaffen. Die Strömung, wie auch die Entropiewellen und die akustischen Wellen, wird bei der in Abbildung 5.10 gezeigten Konfiguration von links eingegeben.



Gezeigt ist jede 4. Gitterlinie und alle Randpunkte für ein Verhältnis von $\frac{R_2}{R_1} = 0.75$ zwischen Einlass und Auslass.

Abbildung 5.10: Ein Rechengitter für den Vergleich mit der Theorie von Marble und Candel [18]

Ein Diffuser entsteht aus dieser Konfiguration, indem das Gitter an der y -Achse gespiegelt wird. Die Entropiewellen und Schallwellen werden in den so erzeugten Diffuser ebenfalls von links eingegeben. Die Strömung wird in beiden Fällen als kompressible, eindimensionale Potentialströmung mit dem Flächengeschwindigkeitsgesetz (4.7) erzeugt. Die verbesserte Wand-Randbedingung wird für stark durchströmte Wände instabil. Daher wird eine radiale Geschwindigkeit angenommen, die mit dem Radius linear abnimmt.

Zur Erzeugung von verschiedenen Machzahlen am Austritt der Düse wird der Austrittsquerschnitt variiert. Beim Diffuser wird der Einlassquerschnitt variiert und die Machzahl im Auslass konstant gehalten. Die Ergebnisse des Vergleichs mit der Theorie von Marble und Candel [18] sind in den folgenden Abschnitten entsprechend der Machzahl im Rohrquerschnitt vor der Düse M_1 bzw. nach dem Diffuser M_2 zusammengefasst. Der Vergleich mit der Theorie wird sowohl für Entropiewellen als auch für akustische Wellen durchgeführt.

Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die zum Vergleich mit der Theorie herangezogenen Beispiele. Zu jedem der Vergleichsfälle wurden alle Querschnittsänderungen mit subsonischer Strömung mit der Theorie für subsonische Querschnittsänderungen von Marble und Candel [18] verglichen.

Tabelle 5.1: Testmatrix zum Vergleich mit der Theorie von Marble und Candel [18]

$\omega =$		$M = 0.1$	0.2	0.3	0.4
Düse	Entropiewelle	0.05, 0.1	0.05, 0.1	0.05, 0.1	0.05, 0.1
Diffuser	Entropiewelle	0.05	0.05	0.05	0.05
Düse	Schallwelle	0.05	0.05	0.05	0.05
Diffuser	Schallwelle	0.05	0.05	0.05	0.05

5.3.1 Entropiewellen

In Abbildung 5.11 sind Momentanaufnahmen für die relevanten Schwankungsgrößen bei Eingabe einer Entropiewelle gegeben. Die dimensionsbehaftete Darstellung ist für Luft unter Normalbedingungen und eine nicht isentrope Dichteschwankung von 0.1 % normiert.

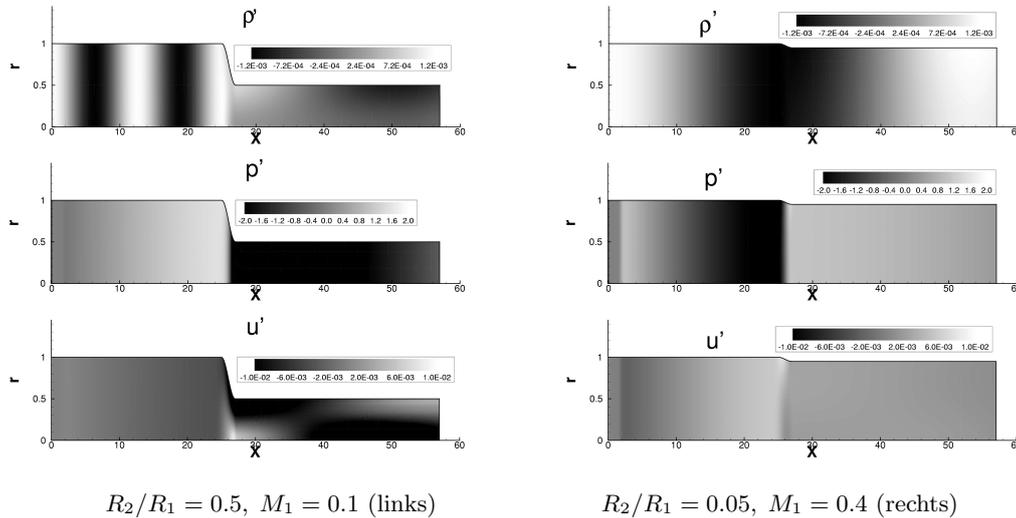
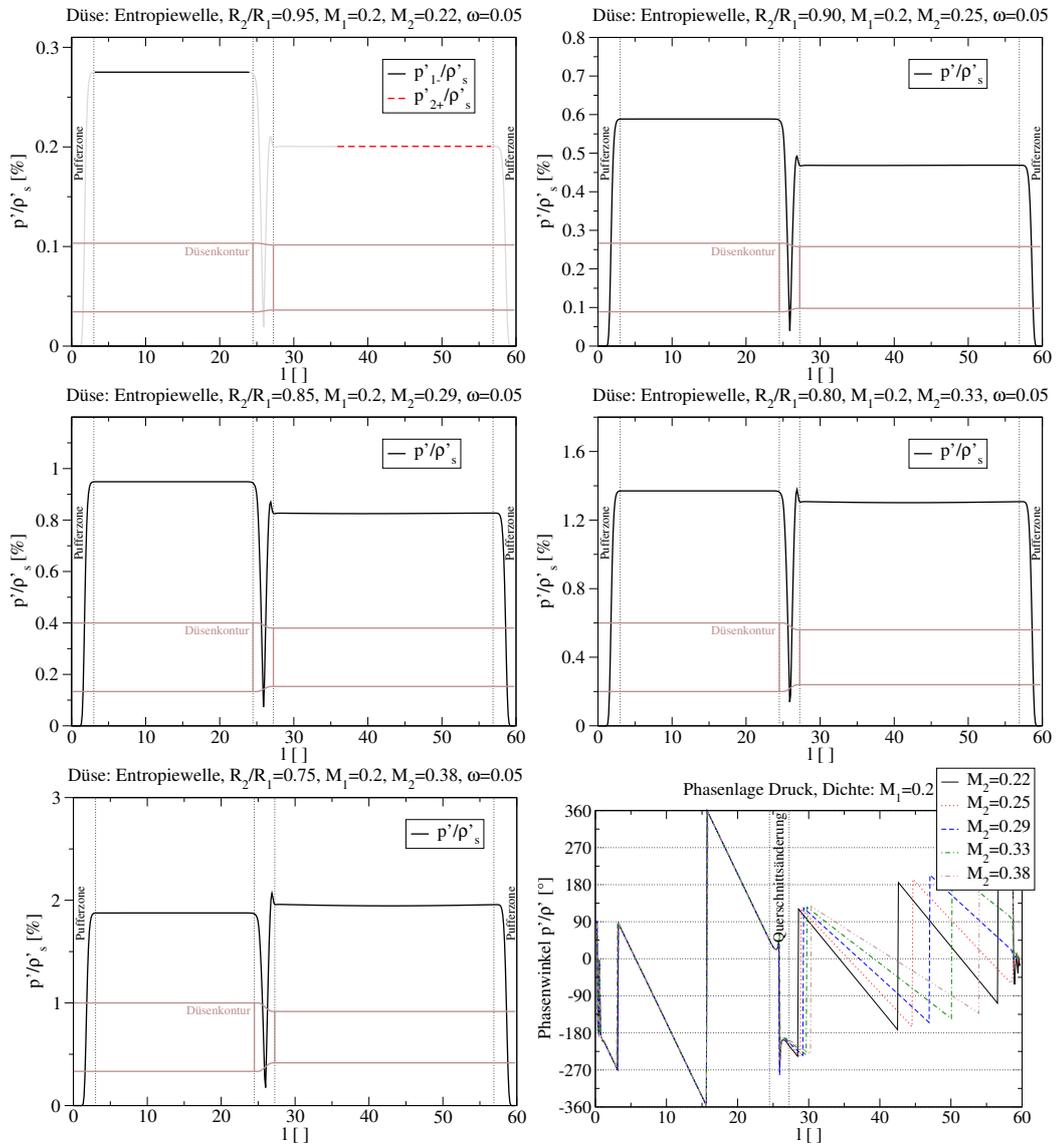


Abbildung 5.11: Momentane Dichte-, Druck- und Geschwindigkeitsschwankung (von oben nach unten) für verschiedene Düsen

Um die Ergebnisse dem eindimensionalen Charakter der Analyse in Marble und Candel [18] anzupassen, werden zunächst Druck und Dichte über den Rohrquerschnitt gemittelt. Danach wird aus Real- und Imaginärteil der Lösung die Amplitude des Drucks gewonnen. Als Basis für den Vergleich mit der Theorie dient der Mittelwert der Druckamplitude über jeweils 175 stromauf bzw. stromab der Querschnittsänderung gelegene x -Positionen (vgl. Abbildung 5.12).

In Abbildung 5.12 ist beispielhaft eine Analyse der CAA-Ergebnisse bei Eingabe einer Entropiewelle für die Einströmmachzahl $M_1 = 0.2$ zusammengestellt. Unten im Bild ist jeweils die Düsenkontur gegeben. Da eine reine Entropiewelle in Form einer nicht isentropen Dichteschwankung ρ'_s erregt wird, ist die Druckamplitude im rechten und linken Rohrabschnitt die Amplitude der von der Düse stromab bzw. stromauf laufenden akustischen Welle. In allen betrachteten Fällen ist die Frequenz so gering, dass nur ebene akustische Wellen ausbreitungsfähig sind. Die

Entropiewelle wird zur Kompatibilität mit der Theorie als ebene, harmonische, nicht isentrope Störung der Dichte eingegeben.



Dargestellt ist das Verhältnis von dimensionsloser Druckamplitude zu eingegebener nicht isentroper Dichteamplitude. Die dimensionslose Kreisfrequenz der Erregung ist $\omega = 0.05$, Das Querschnittsverhältnis variiert:

$$\begin{array}{ll} \frac{R_2}{R_1} = 0.05 & \frac{R_2}{R_1} = 0.10 \\ \frac{R_2}{R_1} = 0.15 & \frac{R_2}{R_1} = 0.20 \\ \frac{R_2}{R_1} = 0.25 & \text{lokale Phasenlage} \end{array}$$

Abbildung 5.12: Übertragungsverhältnisse zwischen Druck und Dichte

In Abbildung 5.12 ist die dimensionslose Amplitude der Druckschwankung relativ zur Amplitude der eingegebenen nicht isentropen Dichteschwankung für alle Düsenkonturen bei $M_1 = 0.2$ dargestellt. Die Ergebnisse enthalten noch die Pufferzonen, die am rechten und linken Rand durch gestrichelte Linien abgesetzt sind. In der Pufferzone ist ein stetiger Abfall der Druck-

amplitude auf Null zu beobachten. Reflexionen von den offenen Enden des Rohres, die sich als Knotenlinien zeigen würden, sind in keiner der Abbildungen zu sehen. Obwohl die Wellenlänge der akustischen Wellen sehr groß ist, kommt es nicht zu den im Abschnitt 5.1 beobachteten starken Reflexionen, da die zeitliche Schwankung ebenfalls sehr langsam abläuft.

Die CAA-Lösung liefert Daten innerhalb der Düse, für die die Theorie von Marble und Candel [18] sowie die Entkoppelung von Entropiewelle und akustischer Welle nicht zutrifft. Der nutzbare Bereich zum Vergleich mit der Theorie ist durch gepunktete senkrechte Linien in Abbildung 5.12 gekennzeichnet und zeigt einen nahezu konstanten Verlauf der Übertragungsverhältnisse. In Abbildung 5.12 oben links sind die Bereiche in denen gemittelt wird für das Beispiel $R_2/R_1 = 0.95$ hervorgehoben. Im Anschluss wird für die von der Querschnittsänderung stromauf laufende Welle eine schwarze Volllinie verwendet. Die von der Düse oder dem Diffuser stromab laufende Welle wird jeweils durch eine rote gestrichelte Linie dargestellt, wie sie in Abbildung 5.12 oben links verwendet wird. In den folgenden Abschnitten werden nur noch die Mittelwerte mit der Theorie verglichen.

Die gewählte dimensionslose Kreisfrequenz bei Eingabe der Entropiewellen ist jeweils $\omega = 0.05$. In den ersten Beispielen wurde zusätzlich eine weitere Rechnung mit der doppelten Kreisfrequenz ($\omega = 0.1$) durchgeführt. Anhand der Abweichung beider Ergebnisse kann überprüft werden, ob eine Frequenzabhängigkeit durch Verletzung der Kompaktheitsbedingung vorliegt. Entsprechend der Variation der Machzahl von 0.1 bis 0.4 ergibt sich eine axiale Wellenlänge von $\lambda = \frac{1}{k} = 6.3 \dots 50.3$ Einström-Radien bei den Entropiewellen. Eine Variation der Erregerfrequenzen gibt weiteren Aufschluss darüber, wann nicht mehr von einer Kompaktheit der Düse ausgegangen werden kann.

Die in Abbildung 5.12 unten rechts dargestellte Phasenlage zwischen Druck und Dichte zeigt eine gute Übereinstimmung mit der Theorie. Die stromauf laufende akustische Welle ist in Phase mit der Dichteschwankung, während die stromab laufende Welle um 180° phasenverschoben ist. In der Mitte der Düse sind die abgestrahlten Druckamplituden sehr klein, so dass Fehler durch Reflexionen von den Rändern das Ergebnis stark verfälschen können. Wenn man die Geraden von außerhalb der Düse zur Mitte der Düse extrapoliert, erhält man die vorhergesagte Phasenlage.

Vergleich der Ergebnisse bei $M = 0.1$

In Abbildung 5.13 links sind die mittleren, dimensionslosen Verhältnisse zwischen Schalldruckamplitude und eingegebener nicht isentroper Dichteschwankung ϱ'_s in den ungestört zylindrischen Rohrabschnitten der Theorie von Marble und Candel [18] gegenübergestellt. In den Ergebnissen für die verschiedenen Erregerfrequenzen ist eine deutliche Abweichung sichtbar. Die Abhängigkeit der Übertragungsfunktion von der Frequenz deutet für den Fall $M_1 = 0.1$ auf eine Verletzung der Kompaktheitsbedingung hin. Die Druckamplitude verringert sich um 11 %, wenn die Frequenz verdoppelt wird. Das bedeutet, dass in diesem Fall die Druckamplitude bei kürzerer Wellenlänge der eingegebenen Dichteschwankung abnimmt. Der Vergleich der tieffrequenten Ergebnisse mit der Theorie zeigt einen maximalen Fehler 17 % bei der höchsten Machzahl im Austrittsquerschnitt. Der minimale Fehler von 6 % wird in der schwächsten Querschnittsveren-

gung mit der kleinsten Austrittsmachzahl erreicht.

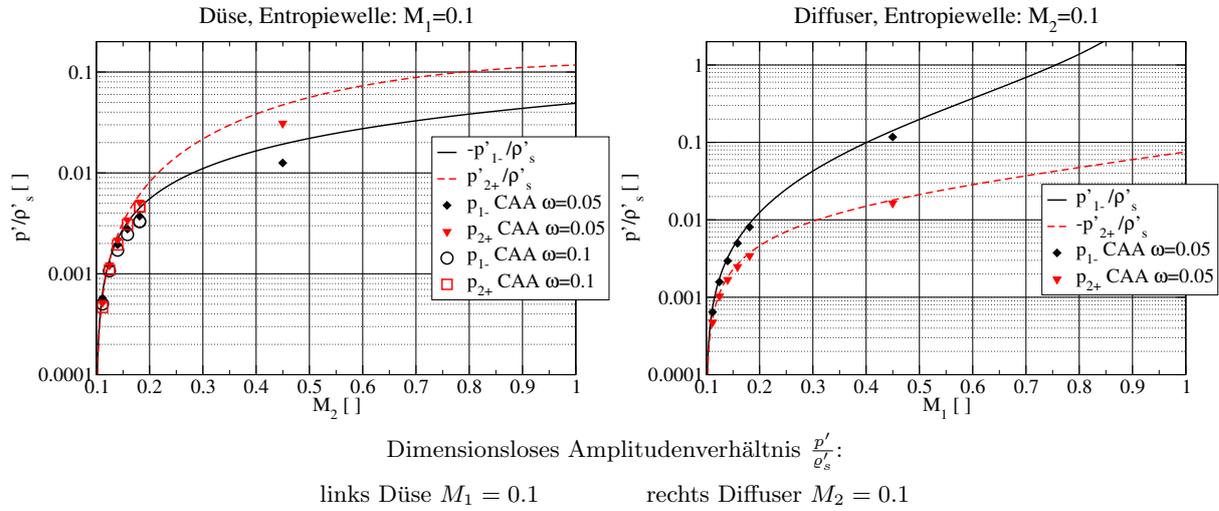


Abbildung 5.13: Entropiewellen im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.1$)

Die entsprechenden Ergebnisse für den Diffuser mit einer Machzahl von $M_2 = 0.1$ im Austrittsquerschnitt sind in Abbildung 5.13 rechts zusammengestellt. Im Diffuser wird die Schalldruckamplitude durch die CAA-Berechnung 5 % bis 17 % niedriger als in der Theorie angegeben. Die Schalldruckamplitude liegt bei einer Querschnittserweiterung um 56 % mehr als 17 % unter dem Wert, den die Theorie vorhergesagt. Die durch eine Verdopplung der Frequenz gewonnenen Resultate zeigen genau wie bei der Düse eine erhebliche Abweichung, wobei die höhere Frequenz die kleineren Schalldruckamplituden liefert.

Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.2$

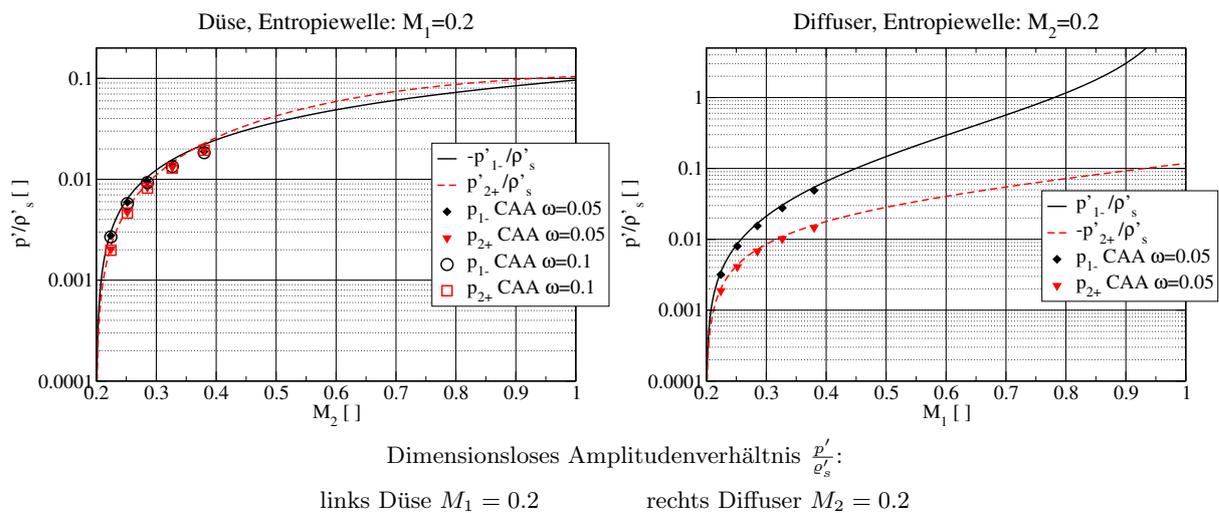


Abbildung 5.14: Entropiewellen im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.2$)

Eine Zusammenfassung aller Testfälle, die bereits zur Veranschaulichung in Abbildung 5.12 dienen, ist in Abbildung 5.14 links gegeben. Die numerischen Resultate folgen der durch die Theorie vorgegebenen Kurve mit einer leichten Abweichung nach unten für eine steigende Ausströmmachzahl M_2 . Die numerischen Ergebnisse beider betrachteten Frequenzen sind nahezu deckungsgleich. Die Abweichung zur Theorie beträgt minimal 7.5 % für die kleinste Querschnittsverengung und maximal 14 % für die am stärksten beschleunigte Strömung. Die Abweichung bei Verdopplung der Frequenz ist im Vergleich dazu relativ klein mit maximal 3.0 %.

Die entsprechenden Ergebnisse für den Diffuser sind in Abbildung 5.14 rechts dargestellt. Die Ergebnisse weichen um maximal 10 % nach unten ab. Die Abweichung von der Theorie steigt mit der Machzahl an. Die stromauf laufende akustische Welle zeigt eine stärkere Abweichung von der Theorie als die stromab laufende akustische Welle.

Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.3$

Die Ergebnisse der Berechnungen mit einer Einströmmachzahl $M_1 = 0.3$ zeigen eine zunehmende Abweichung von der Theorie für große Änderungen der Machzahl in der Düse. Die in Abbildung 5.15 links zusammengestellten Testfälle zeigen bei Verdopplung der Frequenz kaum Abweichungen. Die Abweichung von der Theorie steigt mit der Ausströmmachzahl von 7 %

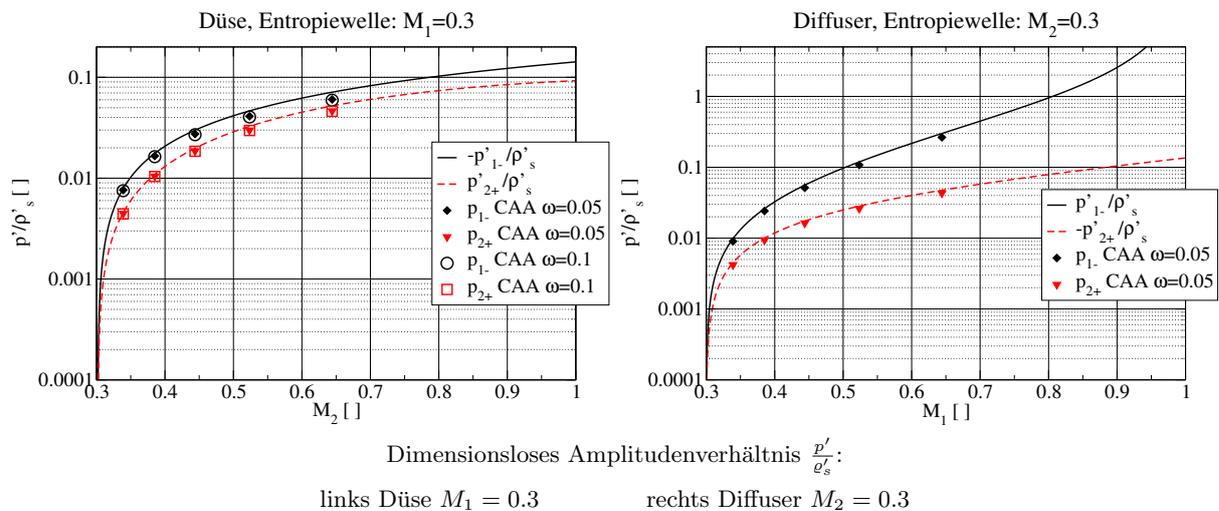


Abbildung 5.15: Entropiewellen im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.3$)

auf 15 % bei der stromauf laufenden akustischen Welle. Die stromab laufende akustische Welle zeigt eine Abweichung von 7 % bis 11 %, die ebenfalls mit der Ausströmmachzahl zunimmt. Die Abweichung bei Verdopplung der Frequenz liegt bei maximal 1.6 %. Wie im Fall $M_1 = 0.2$ weicht die stromab laufende akustische Welle bei einer Änderung der Frequenz stärker ab, als die stromauf laufende Welle.

In Abbildung 5.15 rechts sind die Ergebnisse der Testfälle mit einer Querschnittsverengung dargestellt. Die Berechnung weicht in der Schalldruckamplitude um 7 % bis 11 % für die stromauf laufende Welle und um 5 % bis 9 % für die stromab laufende Welle von der Theorie ab.

Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.4$

Die Ergebnisse mit einer Einströmmachzahl von $M_1 = 0.4$ bestätigen die vorherigen Darstellungen an der Düse. Es gibt eine wachsende Abweichung von der Theorie mit zunehmender Änderung der Machzahl im Ausströmkanal (vgl. Abbildung 5.16 links). Die Verdopplung der Frequenz und damit Halbierung der Wellenlänge schlägt für $M_1 = 0.4$ im Vergleich am geringsten zu Buche (maximal 1.3 %). Die Abweichung von der Theorie beträgt 6 % für die kleinste

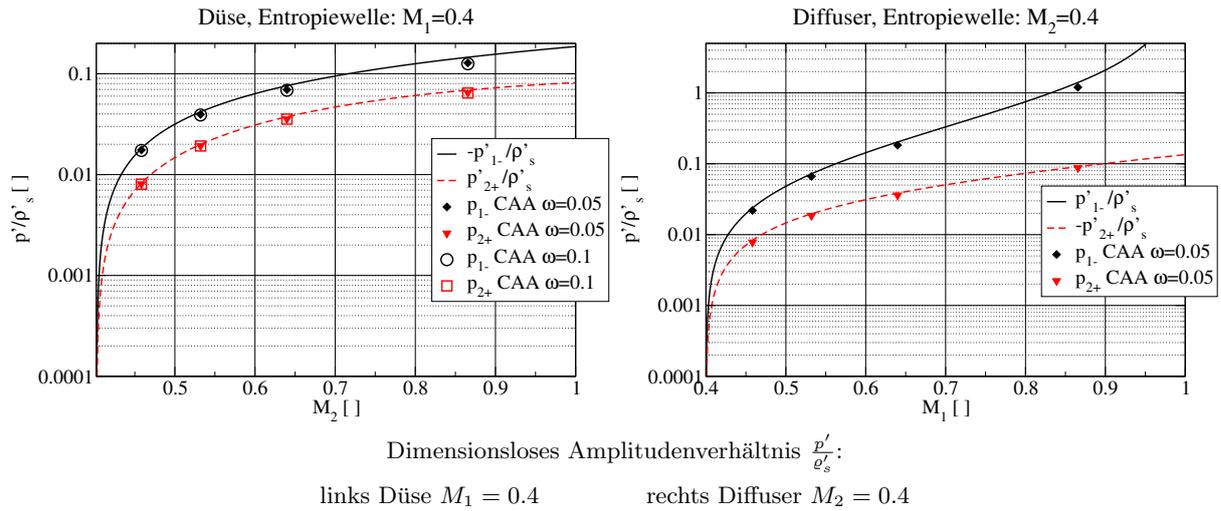


Abbildung 5.16: Entropiewellen im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.4$)

Querschnittsverengung und 11 % bzw. 6 % für die stromauf bzw. stromab laufenden akustischen Wellen bei einem Flächenverhältnis von 74 % zwischen Ein- und Auslass ($R_1/R_2 = 0.8$).

Die Ergebnisse für die verschiedenen Diffuser sind in Abbildung 5.16 rechts dargestellt. Die Simulation sagt für die stromauf laufende Welle eine Druckamplitude von 3 %, bis 13 % unter dem theoretisch erwarteten Wert voraus. Die stromab laufende akustische Welle hat insgesamt eine wesentlich geringere Amplitude und wird von den CAA-Berechnungen maximal 5 % niedriger, bis minimal 2 % höher als theoretisch erwartet angegeben (vgl. Abbildung 5.16 rechts).

Einfluss der gewählten Erregerfrequenz bei $M = 0.4$

In diesem Abschnitt sollen anhand eines Beispiels die Ergebnisse für die Diskussion, ob die Düse kompakt angenommen werden kann oder nicht, zur Verfügung gestellt werden. Dazu wird für eine Düsenströmung mit einer Querschnittsverengung von 36 % die Frequenz schrittweise erhöht. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.17 zusammengestellt.

Die Abweichung nimmt mit zunehmender Frequenz deutlich zu. Da gleichzeitig die räumliche Auflösung der eingegebenen Entropiewellen abnimmt, könnte die künstliche, selektive Dämpfung (SAD) den Verlauf in Abbildung 5.17 verursacht haben. Zur Überprüfung ist daher hier die Abnahme der Dichteamplitude über der Lauflänge exemplarisch für einige Fälle mit den höchsten und der geringsten Wellenlängen gegenübergestellt.

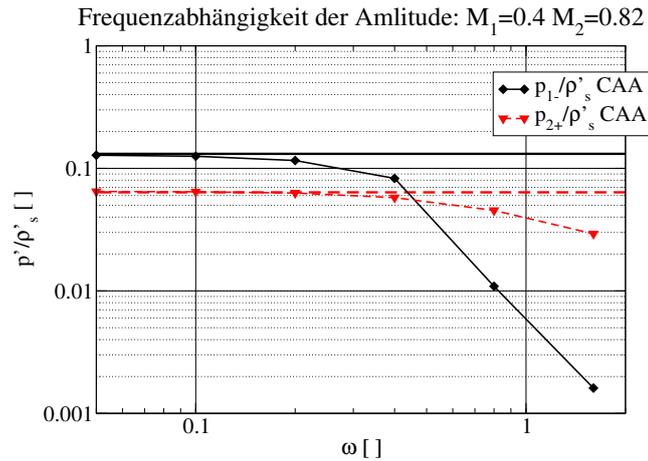


Abbildung 5.17: Dimensionslose Übertragungsverhältnisse über der Erregerfrequenz

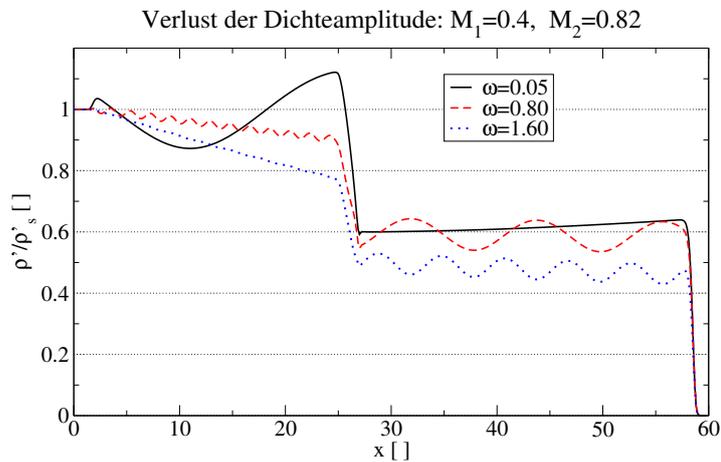


Abbildung 5.18: Dichteamplitude über Lauflänge für verschiedene Erregerfrequenzen

Abbildung 5.18 zeigt einen deutlichen Verlust von 25 % für die größte überprüfte Frequenz ($\omega = 1.6$). Die axiale Auflösung der Entropiewelle beträgt in diesem Fall noch 13 Punkte pro Wellenlänge. Die zeitliche Auflösung wurde so angepasst, dass 304 Zeitschritten pro Periode nicht unterschritten werden. Die Dichteamplitude beinhaltet die Überlagerung der Entropiewelle mit der Dichteschwankung der akustischen Welle, so dass eine räumliche Schwebung zu beobachten ist. In dem betrachteten Frequenzbereich zeigt das Resultat der Dichteamplitude eine deutliche langwellige Schwebung mit einer reflektierten akustischen Welle, so dass die Verluste schwierig auszuwerten sind. Die Verluste des Verfahrens, aufgrund der notwendigen künstlichen Dämpfung (SAD) führen zu einer Verringerung der Dichteamplitude um maximal 25 % bis zum Erreichen der Düse. Da das System linear ist, können für die höchste betrachtete Frequenz etwa 25 % der Abnahme der Druckamplitude durch die Dissipation verursacht worden sein.

Verwendung der rotationsfreien Formulierung für $M = 0.4$

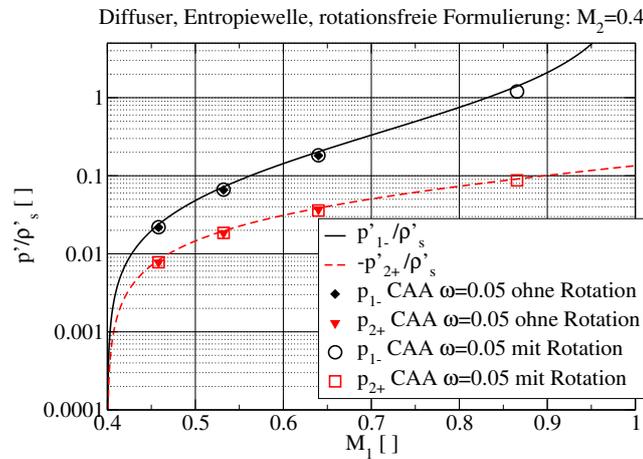


Abbildung 5.19: Dimensionslose Übertragungsverhältnisse berechnet mit der rotationsfreien Formulierung der Grundgleichungen

Da am Diffuser bei einer großen Änderung der Machzahl Wirbelstraßen auftreten, wird überprüft, ob die rotationsfreie Formulierung der Grundgleichungen (2.62) die dadurch entstehenden Fehler eliminieren kann. Das ist nicht der Fall. Der Fehler im Rohrabschnitt stromab der Diffusers nimmt durch die Änderung der Grundgleichungen zu.

Auswertung des Quellterms

In diesem Abschnitt wird der Quellterm (4.6), der aus der linearisierten Formulierung der Wellengleichung (4.5) im Abschnitt 4.2 gewonnen wird, ausgewertet. Diese Sichtbarmachung ermöglicht Bereiche der Düse zu identifizieren, die einen besonders großen Beitrag zur Schallabstrahlung liefern.

Dieser Quellterm ist für mehrere Düsenkonfigurationen aus dem vorherigen Abschnitt in Abbildung 5.20 in der (x, r) -Ebene dargestellt. Die Ableitungen wurden mit einem Differenzenquotienten 2. Ordnung berechnet. Der Quellterm beinhaltet die räumliche Ableitung der Dichteschwankung, welche frequenzabhängig ist. Bei der angenommenen Kompaktheit der Düse ist dieser Term kleiner als die Produkte aus der Dichteschwankung und den Ableitungen der Grundströmung, daher wurde dieser Anteil für die Darstellung nicht mit berücksichtigt. Eine Berücksichtigung dieser Anteile würde eine Phasenverschiebung zwischen Druck und Entropiewelle in der Düse verursachen. In Abbildung 5.20 ist deutlich die räumliche Ausdehnung des Quellgebiets zu erkennen, die insbesondere bei kurzen Wellenlängen ebenfalls eine Phasenverschiebung verursacht.

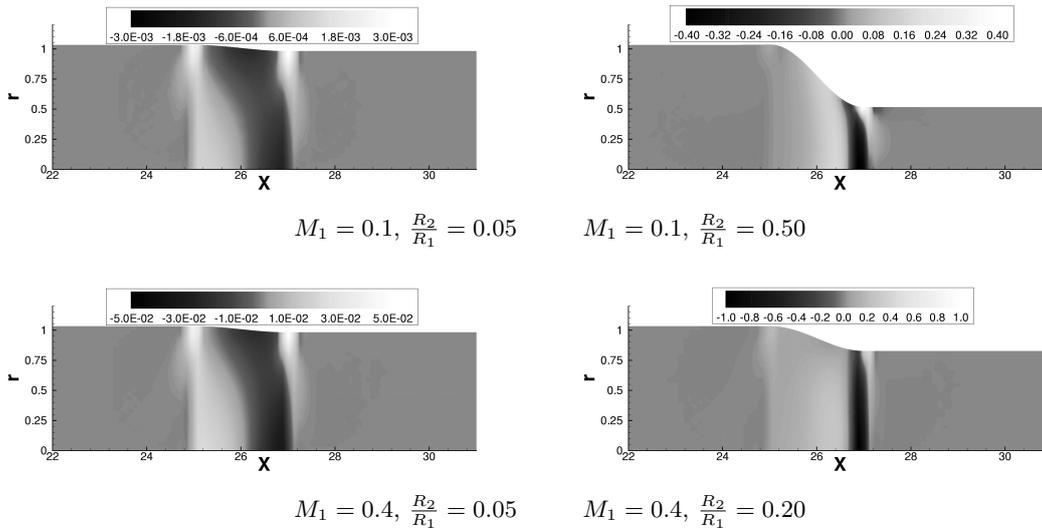


Abbildung 5.20: Quellterm durch die beschleunigte kompakte Dichteschwankung in verschiedenen Düsen

5.3.2 Akustische Wellen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der akustischen Wellenausbreitung mit der Theorie verglichen. Dabei ergibt sich das Problem, dass die Druckamplitude im Rohrquerschnitt stromauf der Düse sowohl die einlaufende Schallwelle, als auch die an der Düse reflektierte Schallwelle beinhaltet (vgl. Abbildung 4.2). Daher muss vor dem Vergleich mit der Theorie für den Einströmkanal der Düse die einlaufende Welle p_{1+} und die reflektierte Welle p_{1-} getrennt werden. Dies geschieht, indem vor der Mittelung die eingegebene akustische Welle von den numerischen Resultaten im Rohrabschnitt 1 abgezogen wird.

Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.1$

In Abbildung 5.21 links sind Reflexions- und Transmissionsfaktor für alle Düsen mit einer Einströmmachzahl von $M_1 = 0.1$ zusammengestellt. In diesem Fall wurde auf eine zweite Rechnung der sechs Fälle mit verdoppelter Erregerfrequenz verzichtet, da die Wellenlänge der akustischen Wellen im Allgemeinen größer als die der konvektierten Dichteschwankungen ist. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Theorie. Insbesondere die stromab laufende Welle weicht bei den verwendeten Querschnittsverengungen maximal um 0.6 % von der Theorie ab. Die Amplituden der stromauf reflektierten Welle weichen um 3 % nach unten von der Theorie ab.

Die Ergebnisse für verschiedene Diffuser bei $M_2 = 0.1$ sind in Abbildung 5.21 rechts zusammengestellt. Die stromauf laufende Welle im Diffuser zeigt Abweichungen von der Theorie bis zu 7%, während die stromab laufenden akustischen Wellen sehr geringe Unterschiede zur Vorhersage aus der Theorie liefern (maximal 5 %).

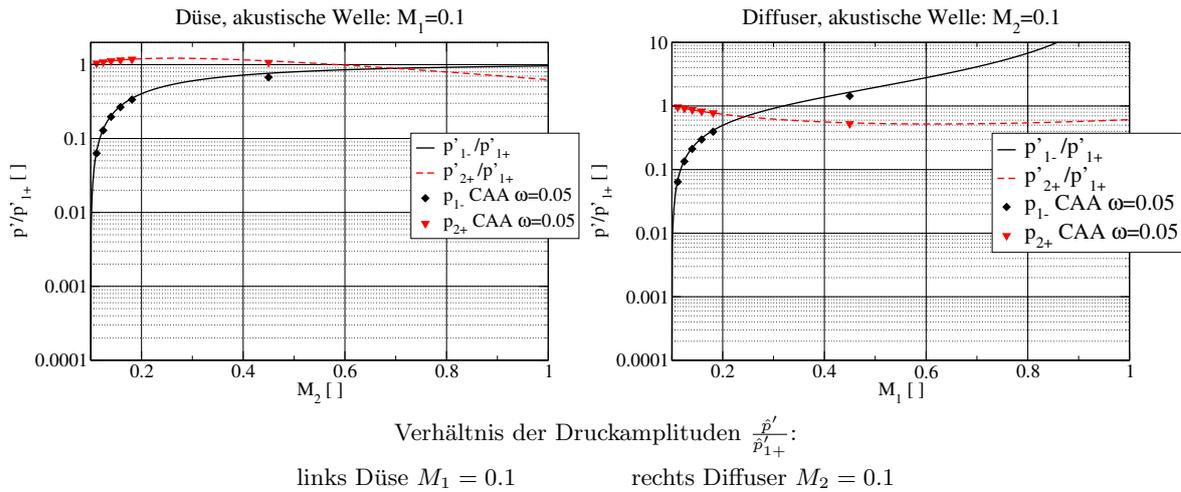


Abbildung 5.21: Transmission und Reflexion im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.1$)

Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.2$

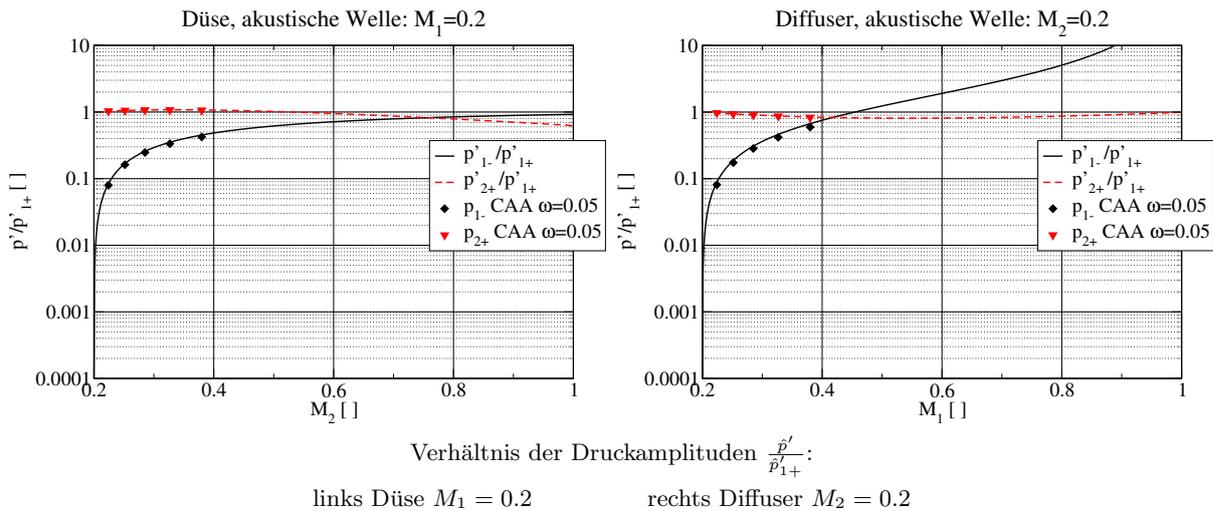


Abbildung 5.22: Transmission und Reflexion im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.2$)

Die numerischen Resultate für die Düse in Abbildung 5.22 links dargestellt zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Theorie für die stromab laufende akustische Welle. Der maximale Fehler der stromab transmittierte Welle beträgt 1 %. Die stromauf laufende reflektierte Schallwelle wird in der Düse um bis zu 6 % überschätzt. Bei größeren Querschnittsänderungen weichen die numerischen Resultate stärker von der Theorie ab. Die stromab laufende Welle wird überschätzt, während die reflektierte Welle unterschätzt wird.

Die Ergebnisse für den Diffuser zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Theorie (vgl. Abbildung 5.22 rechts). Insbesondere die stromab laufende akustische Welle liegt mit Ausnahme der kleinsten Querschnittsänderung mit weniger als 3 % sehr nahe an der Theorie. Im Ausnahmefall $R_2/R_1 = 1.05$ wird die theoretisch vorhergesagte Druckamplitude um 3 % übertroffen.

Die reflektierte Schallwelle im Abschnitt 1 stromauf der Düse zeigt eine kleine Abweichung von der Theorie. Im Bereich kleiner Änderungen wird die theoretische Druckamplitude von der Berechnung übertroffen, während bei großen Querschnittsänderungen die Theorie höhere Druckamplituden vorhersagt.

Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.3$

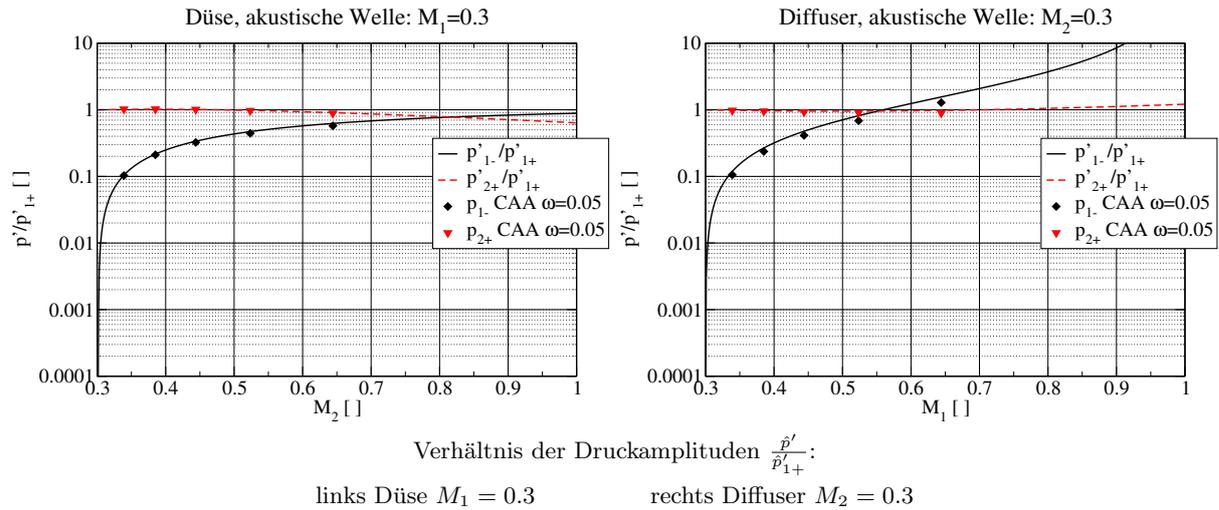


Abbildung 5.23: Transmission und Reflexion im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.3$)

Die Abweichungen der CAA-Berechnung von der Theorie für die Düse, welche in Abbildung 5.23 links dargestellt ist, ist gering. Die Berechnung und die Theorie stimmen mit einem Fehler von maximal 2 % in den Druckamplituden bei der stromab laufenden akustischen Welle überein. Die stromauf laufende reflektierte Welle weicht stärker von der Theorie ab (maximal 8 %).

Die in Abbildung 5.23 rechts dargestellten Ergebnisse für verschiedene Diffuser mit einer Machzahl von $M_2 = 0.3$ im Austrittsquerschnitt zeigen mit zunehmender Querschnittsänderung eine erhebliche Abweichung der reflektierten Schallwelle von der Theorie (17 %). Die Ergebnisse der transmittierten Schallwelle liegen bis zu 8 % unter der theoretisch erwartete Druckamplitude.

Vergleich der Ergebnisse für $M = 0.4$

Die von der Düse stromauf laufende akustische Welle zeigt eine Abweichung von der Theorie bis zu 6 %. Die transmittierte Welle in der Düse wird mit geringer Abweichung von der Theorie vorhergesagt. Der maximale Fehler beläuft sich bei der stärksten Querschnittsänderung auf 2 % der Druckamplitude (vgl. Abbildung 5.24 links). Die Abweichung von der Theorie nimmt in beiden Fällen mit der Querschnittsänderung zu.

Die Ergebnisse am Diffuser in Abbildung 5.24 rechts zeigen eine deutliche Abweichung von der Theorie. Die Abweichung erreicht 20 % für die stromauf laufende Welle und 15 % bei der stromab laufenden Welle.

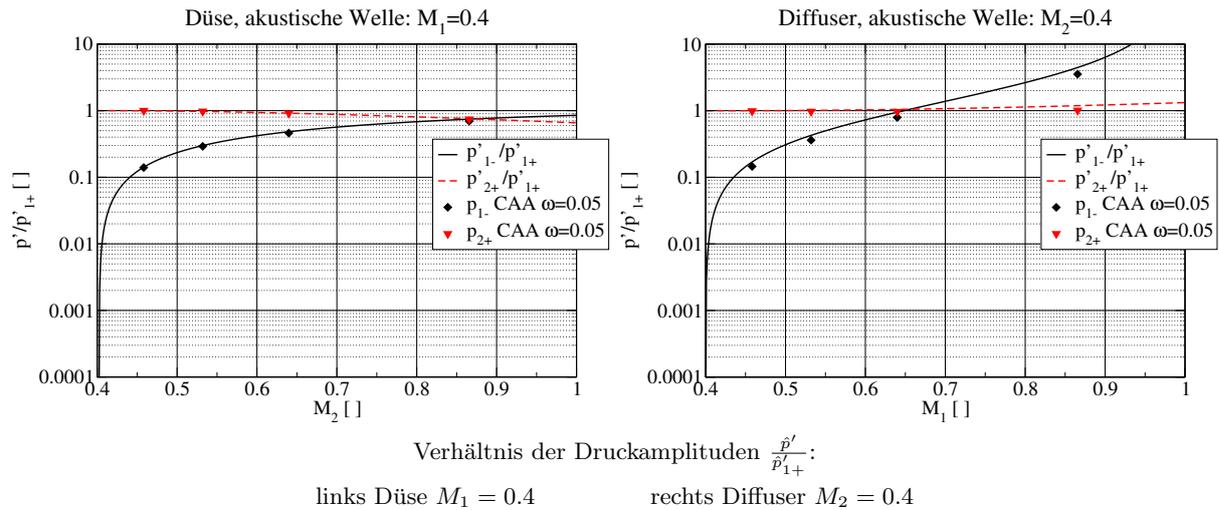


Abbildung 5.24: Transmission und Reflexion im Vergleich mit der Theorie ($M = 0.4$)

Die Simulation der akustischen Wellenausbreitung in einer Düsen- bzw. Diffuserströmung in diesem Abschnitt basiert auf den vollen linearisierten Grundgleichungen. Prinzipiell ist damit gezeigt worden, wie sich das CAA-Verfahren in Situationen verhält, bei denen eine konvergent-divergente Düse, in der eine Unterschallströmung vorherrscht, mit Entropiewellen angeregt wird. Die Schallabstrahlung der einzelnen Querschnittsänderungen wird in diesem Fall an der der Düse zugewandten Seite reflektiert und nur ein Teil der Schallwelle wird durchgelassen.

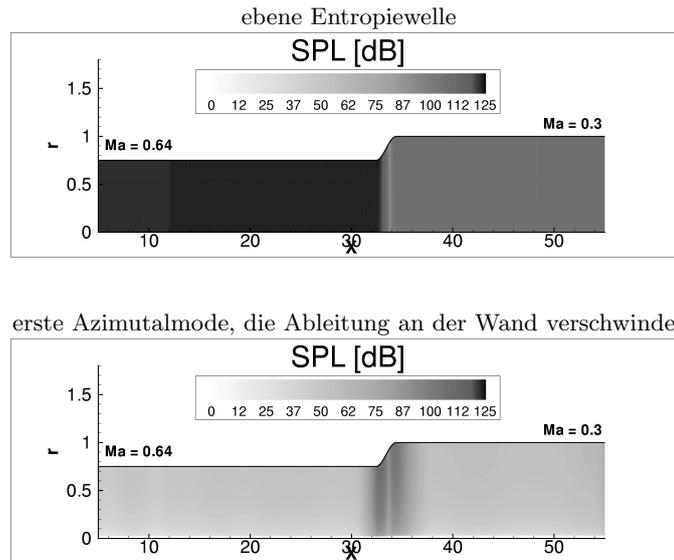
5.4 Anwendungsbeispiele

5.4.1 Der gestörte Massenfluss als Quellmechanismus

Die verschiedenen im Kapitel 4 vorgestellten Theorien geben die Änderung des Massenstroms über den Diffuser als Quellmechanismus für die Abstrahlung von akustischen Wellen an. Die Entropiewelle, welche sich als Dichteschwankung mit der Strömungsgeschwindigkeit ausbreitet, dehnt sich beim Durchlaufen des Diffusers anders aus als die mittlere Strömung. Die Zustandsänderung bei der Beschleunigung durch den Diffuser führt dazu, dass Schall abgestrahlt wird. Die eindimensionale Theorie sagt außerdem aus, dass bei einer Entropiefuktuation, die den Massenstrom über den Diffuser nicht ändert, auch keine Schallabstrahlung zu erwarten ist.

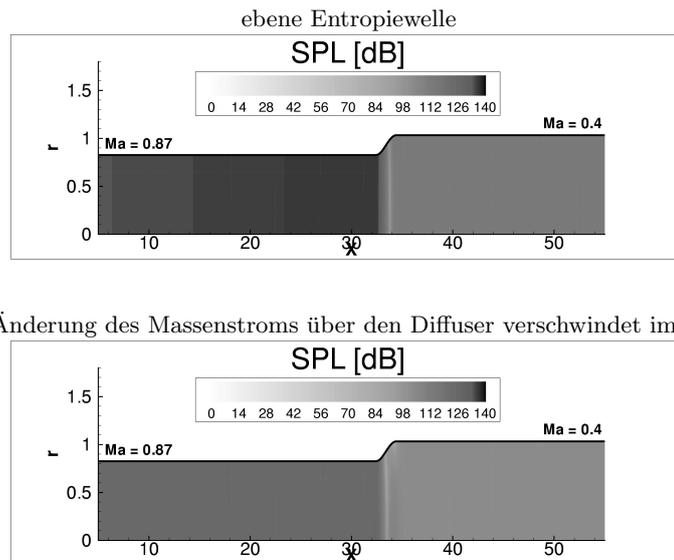
In Abbildung 5.26 wurde das Verschwinden des Massenstroms im Mittel über den Diffuser dadurch erreicht, dass eine Bessel-Funktion 0. Ordnung ($m = 0$) eingegeben wurde, die integriert über den mittleren Diffuserquerschnitt verschwindet. In Abbildung 5.25 wird der Massenstrom durch die Wahl der Azimutalmode zum Verschwinden gebracht. In beiden Fällen sind die Schalldruckpegel den Ergebnissen aus Abschnitt 5.3.1 gegenübergestellt. Die Schalldruckpegel sind nicht Null. Das war auch nicht zu erwarten, da die Aussage der Theorie die räumliche Verteilung der Störungen nicht berücksichtigt.

Die in Abbildung 5.25 dargestellte über die Entropiewelle angeregte ($m = 1, n = 1$)-Mode ist



Schalldruckpegel bei Eingabe einer Schwankung der Dichte von 0.1 % vom mittleren Zustand in Luft unter Normalbedingungen Diffuser $M_2 = 0.3$

Abbildung 5.25: Vergleich zweier Formen für die Entropiewelle



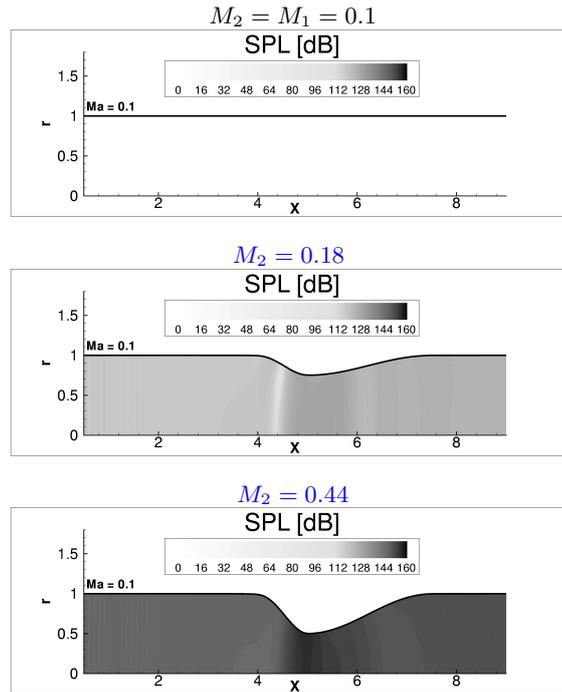
Schalldruckpegel bei Eingabe einer Schwankung der Dichte von 0.1 % vom mittleren Zustand in Luft unter Normalbedingungen Diffuser $M_2 = 0.4$

Abbildung 5.26: Vergleich zweier Formen für die Entropiewelle

cut-off. Daher ist ein Abklingen des Schalldruckpegels von der Diffusermitte zu beobachten. Der Schalldruckpegel ist weniger als halb so groß, wie bei Eingabe einer ebenen Welle. Abbildung 5.26 zeigt erhebliche Schalldruckpegel im gesamten Diffuser. Die eingegebene radiale Verteilung der Dichteschwankung erfüllt nur in einem Punkt des Diffusers die Forderung, dass der Massenstrom verschwindet. Der Diffuser strahlt weniger effektiv Schall ab als bei Anregung mit einer ebenen Entropiewelle. Der Unterschied zur ebenen Entropiewelle beträgt sowohl stromauf als auch stromabwärts 11 dB.

5.4.2 Entropiewellen in einer subsonischen Laval-Düse

In diesem Abschnitt wird das Verfahren auf eine Konfiguration angewendet, bei der sowohl die Kompaktheitsbedingung verletzt ist, als auch die Aussage der Theorie problematisch wird. Der Einström- und der Ausströmradius sind gleich (dimensionslos $r = 1$). Dazwischen befindet sich eine Querschnittsverengung mit anschließender Querschnittserweiterung. Für dieses generische Beispiel wurde die Verengung aus zwei Sinus-Funktionen zusammengesetzt.



Der Schalldruckpegel wurde unter Annahme einer Schwankung von 1 % der mittleren Temperatur bei einem Flugtriebwerk bei $\bar{T} = 1000$ K, $\bar{P} = 2.5$ bar und $\bar{\rho} = 0.872 \frac{kg}{m^3}$ bei einer Frequenz von $f = 100$ Hz berechnet. M_2 ist Machzahl im engsten Querschnitt.

Abbildung 5.27: Schalldruckpegel in generischen Laval-Düsen bei Unterschallströmung ($M_1 = 0.1$)

Die Ergebnisse in Abbildung 5.27 zeigen einerseits, dass die Randbedingungen bei konstanter Strömung keine Kopplung der Entropiewellen mit den akustischen Wellen liefern. Bei einer moderaten Querschnittsverengung, mit einer Verdopplung bzw. Vervierfachung der Machzahl entstehen im Gegensatz dazu erhebliche Schalldruckpegel in den Kanälen in beiden Richtungen. Die Schalldruckpegel der stromauf laufenden Wellen sind für die hier verwendeten Konfigurationen mit eindimensionalen Potentialströmungen etwas geringer (118 dB bei 44.75 % Verengung bzw. 146 dB bei 75 % Verengung) als die der stromab laufenden Wellen (124 dB für 44.75 % bzw. 151 dB für 75 % Verengung).

Kapitel 6

Diskussion

In diesem Kapitel wird zunächst der Vergleich zwischen den beiden Randbedingungen ausgewertet. Im zweiten Abschnitt wird die Validierung des veränderten mathematischen Modells mit der Theorie von Marble und Candel [18] diskutiert. Am Ende wird ein Ausblick auf die Anwendungsmöglichkeiten und mögliche Erweiterungen des Verfahrens gegeben.

6.1 Vergleich der Randbedingungen

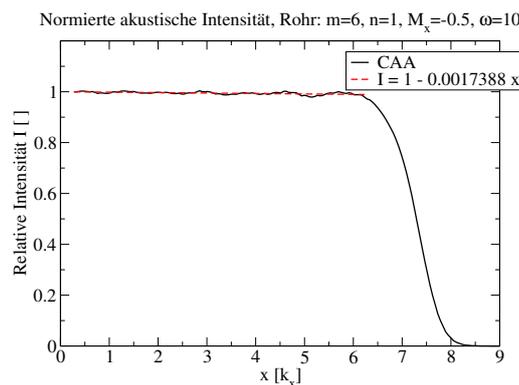
Der Vergleich zwischen der “Perfectly Matched Layer” (PML)- und der “Newton Cooling/Friction” (NC/F)- Randbedingung im (Abschnitt 5.1) hat ein sehr ähnliches Verhalten der beiden Randbedingungen aufgezeigt. Die NC/F-Randbedingung stellt, wie aus der Gleichung (3.52) hervorgeht, eine grobe Vereinfachung der PML-Randbedingung dar. Bei der Verwendung der NC/F-Randbedingung konnten bisher sehr geringe Fehler erzielt werden [17]. Der Vergleich beider Randbedingungen ist eine wichtige Fragestellung dieser Arbeit. Die vorgestellten Ergebnisse zeigen, dass die NC/F-Randbedingung bei idealer Einstellung auch dem Vergleich mit der optimierten PML-Randbedingung standhält. Die Benutzung der PML-Randbedingung liefert für Dämpfungsgrade über dem Optimum einen kleineren Fehler, als die NC/F-Randbedingung. Die NC/F-Randbedingung zeigt bei geringeren Dämpfungsgraden häufig geringere Fehler als die PML-Randbedingung. Die einzige Ausnahme bilden die kurzwelligen Moden bei $\omega = 20$. Die Variation des Dämpfungsgrades hat in diesem Fall offensichtlich noch nicht das Optimum erreicht. Der Aufwand für die PML-Randbedingung ist gleichzeitig, durch die zusätzlichen Variablen und die zusätzliche Berechnung der für die Erhaltung der Dispersionsrelation in der Pufferzone eingeführten Terme, wesentlich höher. Die Simulation unter Verwendung der PML-Randbedingung im Rohr mit 200x35 Gitterpunkten hat im Mittel eine fast 20 % höhere Rechenzeit als das gleiche Beispiel mit der NC/F-Randbedingung. Die von der Änderung der Randbedingung betroffene Pufferzone am Ausströmrand nimmt bei diesem Vergleich nur 10 % des Gitters ein.

Mit Ausnahme der in Richtung der Pufferzone nahezu konstanten $m = 6$ Mode zeigen beide Randbedingungen ein sehr ähnliches Verhalten über den gesamten Bereich der eingestellten Dämpfungsgrade in der Randbedingung. Die erwähnte $m = 6$ Mode stellt offensichtlich einen sehr kritischen Fall für beide Randbedingungen dar. Die PML-Randbedingung ist genau wie die NC/F-Randbedingung für die in diesem Fall vorliegende Drallströmung nicht optimiert. Die Erweiterung um den Drallterm entsprechend [13] ist instabil. Daher wird auf die ursprüngliche Form ohne Beachtung der Drallströmung zurückgegriffen. Die im Abschnitt 5.3 vorgestellten Ergebnisse zeigen keine Reflexion, obwohl die Wellenlänge der akustischen Wellen teilweise sehr groß ist. Da keine derart großen Fehler für die ebene Wellenausbreitung in den Düsen und Diffusern beobachtet werden, könnte das Verhältnis zwischen zeitlichen und räumlichen Änderungen im Rechengbiet das Versagen der Randbedingungen für die ausschließlich in Azimutalrichtung Gradienten zeigende $m = 6$ Mode verursacht haben.

Die Frage nach der besten Einstellung für den Dämpfungsgrad kann hier nicht beantwortet werden. Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Frequenzabhängigkeit. Gleichzeitig gibt es teilweise eine deutliche Abhängigkeit von der erregten Mode. Ein hoher Dämpfungsgrad liefert vermutlich

generell die besten Ergebnisse für beide Randbedingungen. Die optimale Weite der Pufferzone liegt im untersuchten Fall mit einem ungestreckten Gitter bei 24 Punkten. Zur Sicherstellung, dass dieses Ergebnis auch bei höheren Frequenzen gültig ist, sollte eine weitere Überprüfung durchgeführt werden. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch der Effekt der Gitterstreckung auf die optimale Punktanzahl.

Die im Abschnitt 5.1 gezeigten maximalen Fehler sind generell relativ groß, im Vergleich zu dem vom DRP zu erwartenden Ergebnis. Das liegt unter anderem an dem verwendeten Kriterium, dem maximalen Fehler über eine Periode im gesamten inneren Feld unter Ausschluss der Ränder. Es handelt sich um ein schnell und einfach bestimmbares, sicheres Vergleichskriterium für die beiden Randbedingungen. Dieses Kriterium reagiert sehr sensibel auf lokale Fehler und Rundungsfehler bei der Berechnung der analytischen Lösung, so dass keine Aussage über die Ursache des Fehlers möglich ist. Für diese Information zur absoluten Güte der einzelnen Randbedingung ist eine integrale Größe, wie z. B. die in Abbildung 6.1 gezeigte Intensität, besser geeignet. Aus der Darstellung in Abbildung 6.1 ist eine Aufspaltung in die einzelnen Fehlerquellen, wie Verluste durch künstliche Dissipation und Reflexion durch die Randbedingung möglich. Eine solche Darstellung kann auch verwendet werden, um die Dämpfungsparameter anzupassen.



Ungerade Azimutalmode ($m = 3$, $n = 1$, $\omega = 9.14$, $k \approx 0$, $M_x = 0.3$)

Abbildung 6.1: Gemittelte Intensität für eine ausgewählte Mode

Verluste entstehen beispielsweise durch die künstliche, selektive Dämpfung, die einen dissipativen Term in die Differentialgleichung einbringt. Die künstliche Dämpfung (SAD) wurde für die ersten Rechnungen sehr groß gewählt ($\sigma = 0.2$), wie sie in den meisten Fällen mit realen verzerrten und gestreckten Gittern die Stabilität des numerischen Verfahrens sicherstellt. Die Terminierung der Randbedingung mit einer Gitterlinie, auf der alle Schwankungsgrößen Null gesetzt werden, führt zu Gitterschwingungen, wenn die Größe des Restwerts der einfallenden Welle zu groß ist. Eine Erhöhung der selektiven Dämpfung liefert schon bei größeren Restwerten am Rand stabile Ergebnisse. Eine weitere Fehlerquelle, die auch durch die Darstellung der Intensität nicht zugänglich ist, ist die Zeitschrittweite. In den ersten Beispielen wird eine relativ große Zeitschrittweite verwendet (48 Zeitschritte pro Periode), die weit unter dem theoretischen Genauigkeitslimit für nichtlineare Probleme liegt. Die Berechnungen bei $\omega = 20$ erfolgten mit

mindestens 250 Zeitschritten pro Periode.

Die Gitterstreckung stellt die wichtigste Fehlerquelle für die optimierte Randbedingung in Abschnitt 5.1.3 dar. Da die Moden sehr kurzweilig sind, werden sie in der Randzone nicht ausreichend aufgelöst und teilweise reflektiert, bevor die letzte Gitterlinie erreicht wird. Eine Erhöhung der Dämpfung verringert die Amplitude bevor die Auflösung unoptimal wird. Das ist eine weitere mögliche Erklärung für das vollkommen unterschiedliche Verhalten der Randbedingung für die beiden betrachteten Frequenzen.

6.2 Validierung mit der Theorie

Die Ergebnisse der Berechnungen zum Vergleich mit der Theorie von Marble und Candel [18] zeigen eine gute Übereinstimmung. Die Amplitude der theoretisch vorhergesagten akustischen Wellen wird mit einer Abweichung von maximal 20 % gut reproduziert. Im Mittel liegt die Vorhersage der CAA-Methode fünf Prozent unter dem theoretischen Wert. Für die kleinste Querschnittsänderung wird die Theorie mit unter zwei Prozent Fehler reproduziert. Die Form der Erregung spielt dabei keine Rolle. Sowohl die Schallabstrahlung durch Entropiewellen als auch die Reflexion und Transmission von akustischen Wellen wird gut vorhergesagt. Der Amplitudenfehler nimmt mit steigender Änderung des Querschnitts, verbunden mit einer stärkeren Änderung der Machzahl, in beiden Fällen zu.

Die Phasenlage wird nur exemplarisch ausgewertet. In der Mitte der Düse ist die Druckamplituden der abgestrahlten Wellen sehr klein. Daher ist eine Extrapolation des linearen Verlaufs der Phasendifferenz zur Düsenmitte notwendig, um eine Aussage zu treffen. Die Beispiele mit verschiedenen Düsen, erregt durch Entropiewellen bei $M_1 = 0.2$, zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Theorie. Die stromauf laufende akustische Welle ist in der Düsenmitte in Phase mit der Entropiewelle (vgl. Abbildung 5.12). Die stromabwärts abgestrahlte akustische Welle hat ein entgegengesetztes Vorzeichen und ist entsprechend um -180° phasenverschoben zur initialen Dichtestörung (vgl. Abbildung 5.12 unten rechts).

Die Auswertung der radial gemittelten Übertragungsverhältnisse zwischen dimensionsloser Dichteamplitude und Druckamplitude in Abbildung 5.12 zeigt keine räumliche Schwebung. Das heißt, es gibt keine sichtbaren Reflexionen von den Rändern und die von der Düse ausgesandten Druckwellen sind weitgehend in Phase.

Die Aussage über die Einhaltung der Kompaktheitsbedingung kann aufgrund der Informationen, die durch die doppelte Berechnung bei zwei verschiedenen Erregerfrequenzen gewonnen wurden, verfeinert werden. In den untersuchten, repräsentativen Fällen der Ausbreitung von Entropiewellen in verschiedenen Düsen ergeben sich Amplitudendifferenzen von maximal 3 % für die Machzahlen über $M_1 = 0.1$ und können daher als kompakt angenommen werden. Bei $M_1 = 0.1$ ist die Kompaktheitsbedingung verletzt. Die Wellenlänge der Entropiewelle ist in diesem Fall $2\pi R_\infty$ ($\omega = 0.1$) bzw. $4\pi R_\infty$ ($\omega = 0.05$). Die Auflösung beträgt 26 bzw. 52 PPW in axialer Richtung. Diese Auflösung liegt weit über der Genauigkeitsgrenze für das DRP Schema. Die berechnete Wellenlänge entspricht 2 bzw. 4 mal der Länge, auf der die Querschnittsveren-

gung der Düse erfolgt. Die Abweichung von der Theorie muss daher der Nichteinhaltung der Kompaktheitsbedingung zugeschrieben werden.

Die schrittweise Erhöhung der Frequenz in Abbildung 5.17 zeigt einen weiteren wichtigen Effekt. Die einlaufende Entropiewelle wird bei der kleinsten Frequenz mit 418 PPW aufgelöst und ist 18 mal so lang wie die Kontraktion. Die Ergebnisse bei $\omega = 0.05$ und $\omega = 0.1$ zeigen nur sehr kleine Unterschiede. In Vielfachen der Länge der Querschnittsänderung ausgedrückt bedeutet, dass bei einem Längenverhältnis von 10:1 die Wellenlänge als groß gegen die Länge der Düse angenommen werden kann. Die massive Steigerung des Fehlers ab $\omega = 0.8$ kann durch die Verletzung der Kompaktheitsbedingung zurückgeführt werden. Die Auflösung der Entropiewelle bei der $\omega = 0.8$ beträgt noch 26 PPW. Das liegt weit über der Genauigkeitsgrenze des verwendeten DRP-Schemas. Die Länge der Kontraktion und die Wellenlänge der Entropiewelle haben nahezu die gleiche Größenordnung. Die stromauf laufende akustische Welle erreicht, berechnet mit der mittleren Machzahl in der Düse, eine ähnliche Auflösung (25 PPW) und Wellenlänge wie die Entropiewelle. Bei Verdoppelung der Frequenz halbiert sich die Auflösung. Die Wellenlängen der Entropiewelle und der stromauf laufenden akustischen Welle sind in diesem Fall etwa so groß wie die Länge der Kontraktion. Die Auflösung von etwas mehr als zwölf PPW entspricht gerade der Genauigkeitsgrenze, so dass in diesem Fall schon verfahrensbedingte numerische Verluste zu erwarten sind.

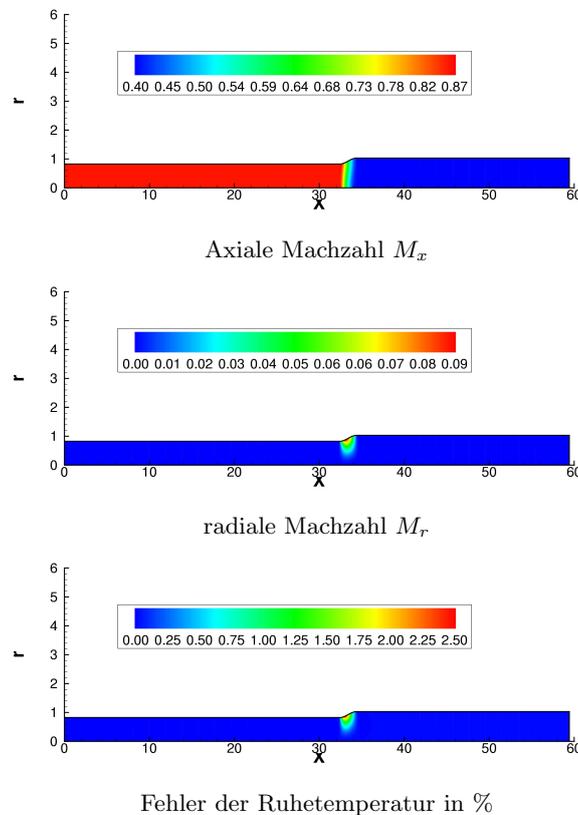


Abbildung 6.2: Potentialströmung in einem Diffuser bei ($M = 0.4$) im Ausströmkanal

Die Verringerung der Schallabstrahlung der Düse durch die Verletzung der Kompaktheitsbedingung liefert keine Erklärung für den mit steigender Machzahl anwachsenden relativen Amplitudenfehler. Die Erklärung hierfür kann nur in der dreidimensionalen Grundströmung gesucht werden. Die Strömung ist, wie Abbildung 6.2 zeigt, abgesehen von minimalen Abweichungen in der Kontraktion, isentrop. Die Strömung ist zweidimensional, um die Randbedingungen in der Kontraktion erfüllen zu können. Die Theorie von Marble und Candel [18] sieht eine solche rotationssymmetrische Strömung nicht vor. Der Fehler in der axialen Geschwindigkeit durch die radiale Geschwindigkeitskomponente erreicht bis zu 25 % ($\frac{R_2}{R_1} = 0.5$) in der Mitte der Düse an der Aussenwand. In diesem Fall tritt auch die maximale beobachtete Abweichung von der Theorie auf. Damit ist eine mögliche Erklärung für den mit der Querschnittsänderung anwachsenden Fehler gefunden.

In Anbetracht des Vergleichs einer voll dreidimensionalen, axialsymmetrischen numerischen Methode mit einer eindimensionalen Theorie, die nur für unendliche Wellenlängen exakt gilt, zeigen die Ergebnisse eine sehr gute Übereinstimmung. Die CAA-Methode ist für die Simulation von Entropiewellen in beschleunigten Rohrströmungen gut geeignet, weil die unterschiedlichen Längenskalen von Entropiewelle und akustischer Welle in Strömungen bei kleinen Machzahlen mit vergleichsweise wenigen Gitterpunkten gut abgebildet werden.

Die Anwendungsbeispiele zeigen deutlich den Vorteil der CAA-Methode. Im Gegensatz zur Theorie werden Phänomene, wie die Ausbreitung beliebig geformter Entropiewellen ohne starke Einschränkungen oder spezielle Anpassungen direkt simuliert. Ebenfalls ohne spezielle Annahmen erfolgt die Berechnung von sogenannten Turning-Points, also Ebenen an denen eine akustische Welle durch die Änderung der Grundströmung von cut-on nach cut-off wechselt. Nicht ausbreitungsfähige Azimutalmode (cut-off) werden angeregt, bringen aber nur sehr geringe Schalldruckpegel in der Düse ein, wie das Beispiel mit $m = 1$ zeigt.

6.3 Ausblick

Wie gezeigt werden konnte ist das CAA-Verfahren, in Verbindung mit der nicht isentropen Modellierung der linearisierten Eulergleichungen, in der Lage die Schallabstrahlung durch Entropiewellen korrekt wiederzugeben. Die Ausbreitung von akustischen Wellen wird in diesem Modell ebenfalls korrekt vorhergesagt. Die Vergleichsrechnungen mit der Theorie verwenden eine große Anzahl von Punkten pro Wellenlänge, da die Änderung der Grundströmung in der Querschnittsänderung des Rohres noch ausreichend aufgelöst werden muss, während die Wellenlänge der eingegebenen Wellen zum Vergleich mit der kompakten Theorie Größenordnungen über der Länge der Düse liegt. Die wenigen Rechnungen mit einer kleineren Zahl von Punkten pro Wellenlänge scheinen das Genauigkeitslimit von zwölf PPW zu bestätigen. Damit können die unterschiedlichen Längenskalen von Entropiewellen und akustischen Wellen in einer sehr langsamen Brennkammerströmung mit vertretbarem Aufwand aufgelöst werden. Das Verfahren ist demnach gut geeignet zur Vorhersage von Brennkammerlärm. Im nächsten Schritt kann das Verfahren zur Simulation der Ausbreitung von Entropiewellen in einer verdrallten, kompressiblen Strömungen angewendet werden. Dazu ist eine Eingabe der Schallquelle für beliebige Drallströmungen notwendig. Ein weiteres Ziel sollte die Validierung mit einem Experiment sein. Zur Validierung ist die räumliche Vermessung der mittleren Strömung und Schwankungen von Druck und Dichte von diesem mittleren Zustand Voraussetzung. Mit den so gewonnenen Messdaten können die Entropiewellen von den akustischen Wellen getrennt und mit einer numerischen Simulation verglichen werden.

Zur technischen Anwendung des Verfahrens kann auch der akustische Quellterm durch die Grundströmung benutzt werden. So kann unter Voraussetzung einer gewissen Näherung eine „leise“ Düsenform gefunden werden, bevor die eigentliche Simulation mit dem CAA-Verfahren erfolgt. Die CAA-Simulation mit einer zuvor berechneten realen Strömung kann dann zusätzliche räumliche Effekte aufdecken, die benutzt werden können um die Schallabstrahlung einer solchen Düse weiter zu verringern. Ein weiterer möglicher Schritt ist die Mitnahme oder teilweise Mitnahme nichtlinearer Terme für transsonische Düsen. Die Theorie, wie auch das vorgestellte Modell in Verbindung mit der CAA-Methode versagen bei der Machzahl $M = 1$, da die links laufende Schallwelle unendliche Amplituden zeigt. Im Bereich der Düse mit $M = 1$ bildet sich eine stehende Schallwelle aus, die durch die einlaufenden Dichteschwankungen immer weiter verstärkt wird. Die Begrenzung der Amplituden kann im Modell nur durch die Mitnahme nichtlinearer Terme erreicht werden.

Die Ergebnisse beim Vergleich der Randbedingungen zeigen, dass auch das numerische Verfahren noch verbessert werden kann. Die verwendete Methode zur Stabilisierung, die künstliche, selektive Dämpfung sollte durch ein Verfahren mit höherer Trennschärfe ersetzt werden, um die Dissipation weiter zu verringern und gleichzeitig möglicherweise die Probleme an der Achse zu lösen. Als in Frage kommende Methoden können beispielsweise räumliche oder zeitliche Filter sowie Upwind Diskretisierungen zur Berechnung der räumlichen Ableitungen genannt werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Zur Modellierung der Ausbreitung von Entropiewellen wird eine dreidimensionale, axial-symmetrische Form der linearisierten Grundgleichungen abgeleitet. Im mathematischen Modell sind sowohl verdrallte, axialsymmetrische als auch nicht homentropie mittlere Strömungszustände enthalten. Die Randbedingungen werden an die neue Art der Modellierung angepasst. Die Wand-Randbedingung wird generalisiert und dazu eine vereinfachte Form der Implementierung entwickelt. Die Formulierung der Schallquelle wird für den Sonderfall einer wie ein starrer Körper rotierenden Grundströmung neu abgeleitet.

Es wird eine Pufferzone aus der Literatur [13] in Form der Perfectly-Matched-Layer (PML)-Randbedingung implementiert. Die Anpassung an das verdrallte, axialsymmetrische Problem führt in der gegebenen Form für diese Randbedingung zu Instabilitäten. Die teiloptimierte PML-Randbedingung wird mit der bereits implementierten Newton Cooling/Friction (NC/F)-Randbedingung verglichen, wobei sehr ähnliche Ergebnisse gewonnen werden. Die PML-Randbedingung liefert, wegen eines nahezu konstanten Verlaufs ab dem idealen Dämpfungskoeffizienten, bessere Resultate für höhere Dämpfungsgrade in der Pufferzone. Es kann keine generelle Aussage über den optimalen Dämpfungsgrad und die optimale Länge der Pufferzone gewonnen werden, da die Ergebnisse für verschiedene Frequenzen sehr unterschiedlich ausfallen.

Der Begriff Entropiewelle wird zunächst physikalisch begründet. Das eindimensionale Modell für die Ausbreitung von Entropiewellen und Schallwellen in Düsenströmungen von Marble und Candel [18] wird mit den numerischen Resultaten einer zweidimensionalen Simulation verglichen. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung für kleine Querschnittsänderungen. Bei einer größeren Änderung des Querschnitts gewinnt der Einfluss der Wand und das zweidimensionale Geschwindigkeitsfeld in dem sich verengenden oder im divergenten Teil des Rohres an Bedeutung. Die Ausbreitung von Schallwellen in Düsen wird besser vorhergesagt als die Schallausbreitung in Diffusern.

Die Theorie von Marble und Candel [18] sagt ausschließlich einen Zusammenhang der Schallabstrahlung mit dem veränderten Massenfluss durch die Düse voraus. In der axialsymmetrischen Strömung spielt auch die räumliche Verteilung der Störung der Entropie eine Rolle für die Schallabstrahlung [7]. Auch eine Entropieschwankung, die keine Änderung des integralen Masseflusses über die Düse bewirkt, erzeugt in den gegebenen Beispielen hohe Schalldruckpegel. Die Effektivität der Schallabstrahlung ist im Vergleich mit einer ebenen Schwankung geringer. Die Schallabstrahlung hängt stark von den cut-off Verhältnissen für die jeweilige Azimutalmode ab.

Dank

Ich danke Prof. Xiaodong Li, Dipl.-Ing. Norbert Schönwald und Prof. Frank Thiele für die Bereitstellung des grundlegenden CAA-Programms *CAA25D*, ohne das die vorgestellte Arbeit unmöglich gewesen wäre. Prof. Frank Thiele möchte ich zusätzlich für die zur Verfügung gestellte Rechnerkapazität und die Möglichkeit zum Verfassen der Arbeit im Hermann-Föttinger-Institut danken. Dr. Ulf Michel vom Deutschen-Zentrum-für-Luft-und-Raumfahrt e. V. gilt mein besonderer Dank für die Überlassung des Themas dieser Diplomarbeit. Dipl.-Ing. Norbert Schönwald möchte ich für die freundliche Beratung und Betreuung beim Erstellen dieser Arbeit danken.

Literaturverzeichnis

- [1] BERENGER, J.-P.: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. In: *J. Comput. Phys.* 114 (1994), S. 185–200
- [2] *Aktionsprogramm „Umwelt und Gesundheit“*. <http://www.bmu.de/files/umgesund.pdf> : Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, Oktober 2003
- [3] *Klima Nationalbericht*. http://www.bmu.de/files/klima_nationalbericht.pdf : Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, Oktober 2003
- [4] *Novelle Gesetz gegen Fluglärm*. http://www.bmu.de/de/1024/js/sachthemen/laerm/flug/?id=642&nav_id=7049&page=1 : Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, Oktober 2003
- [5] DOWLING, A.P.: Acoustics of unstable flows. In: TATSUMI, T. (Hrsg.), WATANABE, E. (Hrsg.) und KAMBE, T. (Hrsg.): *Theoretical and Applied Mechanics*, Elsevier, Amsterdam, 1996, S. 171–186
- [6] EWERT, R. und SCHRÖDER, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. In: *J. Comput. Phys.* 188 (2003), S. 365–398
- [7] FLOWCS WILLIAMS, J.E. und HOWE, M.S.: The generation of sound by density inhomogeneities in low Mach number nozzle flows. In: *J. Fluid Mech.* 70 (1975), Nr. 3, S. 605–622
- [8] GILES, M.B.: Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equations Calculations. In: *AIAA Journal* 28 (1990), Nr. 12, S. 250–258
- [9] HESTHAVEN, J.S.: On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized euler equations. In: *J. Comput. Phys.* 142 (1998), S. 129–147
- [10] HOWE, M.S.: Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. In: *J. Fluid Mech.* 71 (1975), Nr. 4, S. 625–673
- [11] HU, F. Q., HUSSANI, M. Y. und MANTHEY, J. L.: Low-dissipation and Low-dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics. In: *J. Comput. Phys.* 124 (1996), Nr. 1, S. 177–191
- [12] HU, F.Q.: On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer. In: *J. Comput. Phys.* 129 (1996), S. 201–219

- [13] HU, F.Q.: A Stable Perfectly Matched Layer For Linearized Euler Equations In Unsplit Physical Variables. In: *J. Comput. Phys.* 173 (2001), S. 455–480
- [14] ISRAELI, M. und ORSZAG, S.A.: Approximation of radiation boundary condition. In: *J. Comput. Phys.* 41 (1981), Nr. 1, S. 115–135
- [15] KOVASZNAY, L.S.G.: Turbulence in a Supersonic Flow. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 20 (1953), October, Nr. 10, S. 657–682
- [16] LELE, S.K.: Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution. In: *J. Comput. Phys.* 103 (1992), S. 16–42
- [17] LI, X.D., SCHEMEL, C., MICHEL, U. und THIELE, F.: On the Azimuthal Mode Propagation in Axisymmetric Duct Flows. In: *AIAA Paper* (2002), Nr. 2002-2521
- [18] MARBLE, F.E. und CANDEL, S.M.: Acoustic disturbances from gas non-uniformities convected through a nozzle. In: *J. Sound Vib.* 55 (1977), Nr. 2, S. 225–243
- [19] MIEDEMA, H.M.E., PASSCHIER-VERMEER, W. und VOS, H. *TNO Intro report 2002-59, Elements for a position paper on night-time transportation noise and sleep disturbance.* Januar 2003
- [20] MORSE, P.M. und INGARD, K. U.: *Theoretical Acoustics.* McGraw Hill, 1968
- [21] MÜLLER, I.: *Grundzüge der Thermodynamik.* Springer, 1998
- [22] MYERS, M.K.: Transport of energy by disturbances in arbitrary steady flows. In: *J. Fluid. Mech.* 226 (1991), S. 383–400
- [23] NEISE, W. und MICHEL, U.: *Aerodynamic Noise of Turbomachines.* 2001. – Script zur Vorlesung
- [24] PIERCE, A.D.: *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications.* Acoustical Society of America, 1989
- [25] RIENSTRA, S.W. und HIRSCHBERG, A.: *An Introduction to Acoustics.* <http://www.win.tue.nl/~sjoerdr/papers/boek.pdf> : Eindhoven University of Technology press, March 2003. – Report IWDE 92–06
- [26] SCHÖNWALD, Norbert: *Entwicklung und Validierung eines parallelen CAA-Verfahrens zur Untersuchung der zweidimensionalen Schallausbreitung.* 2000. – Diplomarbeit, Technische Universität Berlin
- [27] SPURK, J.H.: *Fluid Mechanics.* Springer, 1997
- [28] STANESCU, D. und HABASHI, W.G.: 2N-storage Low-dissipation and Low-dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Aeroacoustics. In: *J. Comput. Phys.* 143 (1998), Nr. 2, S. 674–681

- [29] TAM, C. K. W. und SHEN, H.: Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high order finite difference schemes. In: *AIAA paper* (1993), Nr. 93-4325
- [30] TAM, C. K. W. und WEBB, C.: Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Aeroacoustics. In: *J. Comp Phys.* 107 (1993), August, Nr. 2, S. 262–281
- [31] TAM, C. K. W., WEBB, C. und DONG, T. Z.: A Study of Short Wave Components in Computational Aeroacoustics. In: *Journal of Computational Acoustics* 1 (1993), März, S. 1–30
- [32] TAM, C.K.W.: Computational Aeroacoustics: Issues and Methods. In: *AIAA Journal* 33 (1995), Nr. 10, S. 1788–1796
- [33] TAM, C.K.W., AURIAULT, L. und CAMBULI, F.: Perfectly Matched Layer as an Absorbing Boundary Condition for the Linearized Euler Equations in Open and Ducted Domains. In: *J. Comput. Phys.* 144 (1998), S. 213–234
- [34] TAM, C.K.W. und DONG, Z.: Wall Boundary Conditions for High-Order Finite Difference Schemes in Computational Aeroacoustics. In: *Theoret. and Comput. Fluid Dynamics* 6 (1994), Nr. 6, S. 303–322
- [35] TANG, L. und BAEDER, J.D.: Uniformly accurate finite difference schemes for p-refinement. In: *Siam J. Sci. Comput.* 20 (1999), Nr. 3, S. 1115–1131
- [36] TEIXEIRA, F.L. und CHEW, W.C.: Finite-Difference Computation of Transient Electromagnetic Waves for Cylindrical Geometries in Complex Media. In: *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing* 38 (2000), Nr. 4, S. 1530–1543
- [37] THE LAM/MPI TEAM: *LAM/MPI User's Guide*. Open Systems Laborator, Pervasive Technology Labs, Indiana University, Bloomington, IN, Mai 2003. – 7.0 edition
- [38] YAN, J., XUE, L. und THIELE, F.: Performance of Multigrid Method in Biharmonic Grid Generation. In: CROSS, M. (Hrsg.), SONI, B.K. (Hrsg.), THOMPSON, J.F. (Hrsg.), HAUSER, J. (Hrsg.) und EISEMAN, P.R. (Hrsg.): *Proceedings of the 6th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, University of Greenwich, July 6-9, 1998, S. 303–312
- [39] ZIEREP, J.: *Theoretische Gasdynamik*. G. Braun, 1976

Anhang A

Gleichungen der Störungsausbreitung

Der Anhang beinhaltet die Gleichungen der Schallausbreitung in Zylinderkoordinaten. Die verschiedenen Spezialfälle sind einzeln wiedergegeben. Für $m = 0$ gehen die Gleichungen in die der ebenen Wellenausbreitung ohne Abhängigkeit von φ über.

A.1 Vektorielle Schreibweise der vollständigen Modellgleichungen

Die Gleichungen sind in Matrix-Vektor Form ausgeschrieben, so wie sie in das CAA-Programm eingeflossen sind. Die unterschiedlichen Varianten sind so implementiert, dass sie durch Umschalten von Präprozessoroptionen ausgewählt werden können. Die der jeweiligen Version entsprechenden Präprozessoroptionen sind entsprechend mit angegeben. Das in diesem Abschnitt beschriebene Modell mit variabler Entropie in Grundströmung und Schwankungsgrößen wird erstellt, wenn die Präprozessoroption „CAA_VAR_ENTROPY“ gesetzt ist. Zusätzlich muss in diesem Fall noch die Art der Linearisierung („CAA_LIN_PRESS“ oder „CAA_LIN_ENTROPY“) ausgewählt werden.

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = -\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} - \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial r} - \frac{1}{r} \underline{C} \cdot \underline{q} - \underline{D} \cdot \underline{q} \quad (\text{A.1})$$

Der Vektor \underline{q} für das Feld der Störgrößen ist dabei definiert als:

$$\underline{q} := \left(\varrho', \quad u', \quad v', \quad w', \quad p' \right)^T \quad (\text{A.2})$$

Die Matrizen, welche die Differentialgleichung wiedergeben, ergeben sich wie folgt aus den Gleichungen des vorherigen Abschnitts, geschrieben in komplexer Form:

Ableitung der Störgrößen nach x :

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{\varrho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & \bar{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{U} & 0 \\ 0 & \gamma \bar{P} & 0 & 0 & \bar{U} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Ableitung der Störgrößen nach r :

$$\underline{B} := \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & \bar{\varrho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V} & 0 & \frac{1}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{V} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \bar{P} & 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Ableitung der Störgrößen nach φ :

$$\underline{C} := \begin{pmatrix} \bar{V} - im\bar{W} & 0 & \bar{\varrho} & -im\bar{\varrho} & 0 \\ 0 & -im\bar{W} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{W}^2}{\bar{\varrho}} & 0 & -im\bar{W} & -2\bar{W} & 0 \\ \frac{\bar{V}\bar{W}}{\bar{\varrho}} & 0 & \bar{W} & \bar{V} - im\bar{W} & -\frac{im}{\bar{\varrho}} \\ 0 & 0 & \gamma\bar{P} & -im\gamma\bar{P} & \bar{V}_{\text{nur CAA_LIN_PRESS}} - im\bar{W} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Ableitungen der Grundströmung, linearisiert in der Druckstörung

(Präprozessoroption: „CAA_LIN_PRESS“):

$$\underline{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} & 0 & \gamma [\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}] \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Ableitungen der Grundströmung, linearisiert in der Entropiestörung

(Präprozessoroption: „CAA_LIN_ENTROPY“):

$$\underline{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} & 0 & -\frac{1}{\bar{P}} [\bar{U} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r}] \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Vektorielle Schreibweise der rotationsfreien Modellgleichungen

Mit der Präprozessoroption „CAA_NOROT“ werden die rotationsfreien Formulierungen der Grundgleichungen eingeschaltet, die mit Hilfe der zweiten Vektorform 2.29 abgeleitet wurden. Die Grundströmung soll eine nicht verschwindende Rotation haben können. Ziel der Untersuchung sind unter anderem verdrallte Brennkammerströmungen. Der Vektor \underline{q} und die Form der Grundgleichungen sind dabei wie im vorhergehenden Abschnitt A.1 definiert. Die Matrizen, welche die Differentialgleichung wiedergeben, ergeben sich aus den Gleichungen des vorherigen Abschnitts, indem die zweite Vektorform in Form von Gl. (2.62) in die Impulsgleichungen (Zeilen 2 bis 4) eingesetzt und die Rotation der Störungen vernachlässigt wird. Die Option „CAA_NOROT“ ist mit allen möglichen Entropiegleichungen und dem Ausschalten der Coriolis-Kraft „CAA_NOCORIOLIS“ kombinierbar. Die Matrizen ergeben sich zu:

Ableitung der Störgrößen nach x :

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & \bar{V} & \bar{W} & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \bar{P} & 0 & 0 & \bar{U} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Ableitung der Störgrößen nach r :

$$\underline{B} := \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & \bar{V} & \bar{W} & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \bar{P} & 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Ableitung der Störgrößen nach φ :

$$\underline{C} := \begin{pmatrix} \bar{V} - im\bar{W} & 0 & \bar{\rho} & -im\bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{W}^2}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & -2\bar{W} & 0 \\ \frac{\bar{V}\bar{W}}{\bar{\rho}} & -im\bar{U} & \bar{W} - im\bar{V} & \bar{V} - im\bar{W} & -\frac{im}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & \gamma\bar{P} & -im\gamma\bar{P} & \bar{V}_{\text{nur CAA_LIN_PRESS}} - im\bar{W} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Die Ableitungen der Grundströmung behalten die im Abschnitt A.1 gegebene Form, da die Rotation der Grundströmung im Allgemeinen nicht verschwindet.

A.3 Vereinfachung für drallfreie isentrope Strömung

Die Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil lassen sich entkoppeln, wenn die Grundströmung drallfrei angenommen wird. Das Ergebnis ist hier in vollständig ausgeschriebener Form wiedergegeben. Im Gegensatz zu A.1 wird hier außerdem Homentropie gefordert, d.h. Grundströmung und Störungsausbreitung verlaufen isentrop, womit die Entropie der Strömung eine globale Konstante wird. Die drallfreie Variante der Grundgleichungen ist im Programm durch die Wahl $\bar{W} = 0$ zugänglich. Die Annahme einer konstanten Entropie wird verwendet, wenn die Präprozessoroption „CAA_VAR_ENTROPY“ nicht gesetzt ist.

Ableitung der Störgrößen nach x :

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & \bar{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{U} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Ableitung der Störgrößen nach r :

$$\underline{B} := \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{V} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Ableitung der Störgrößen nach φ :

$$\underline{C} := \begin{pmatrix} \bar{V} & 0 & \bar{\rho} & -im\bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{V} & -\frac{im}{\bar{\rho}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Ableitungen der Grundströmung:

$$\underline{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\varrho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\varrho}} (\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}) & \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Druck-Dichte Beziehung:

$$p'_m = \gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}} \varrho'_m \quad (\text{A.15})$$

A.4 Zusammenstellung der Präprozessoroptionen

Tabelle A.1: Kombinationen der Präprozessoroptionen zur Auswahl der Differentialgleichung
(√ – möglich, – – nicht möglich)

Präprozessoroption		1	2	3	4	5	6	7	8
1	Variable Entropie	CAA_VAR_ENTROPY	–	√	√	√	√	√	√
2	Konstante Entropie		–	–	–	√	√	√	√
3	Druck linearisiert	CAA_LIN_PRESS	√	–	–	√	√	√	√
4	Entropie linearisiert	CAA_LIN_ENTROPY	√	–	–	√	√	√	√
5	ohne Coriolis Kraft	CAA_NOCORIOLIS	√	√	√	√	–	√	√
6	mit Coriolis Kraft		√	√	√	√	–	√	√
7	APE	CAA_NOROT	√	√	√	√	√	–	–
8	mit Rotation		√	√	√	√	√	–	–

Anhang B

Koeffizienten der Diskretisierungsverfahren

B.1 Räumliche Diskretisierung

B.1.1 Zentraler Differenzenstern

Tabelle B.1: Koeffizienten des zentralen Sieben-Punkte-DRP Schemas ($\eta = 1.1$), nach Tam und Webb [30]

$a_{-3} = -a_3 =$	-0.0208431427703
$a_{-2} = -a_2 =$	0.166705904415
$a_{-1} = -a_1 =$	-0.770882380518
$a_0 =$	0

B.1.2 Einseitige Differenzensterne

Der jeweils entgegengesetzt asymmetrische Differenzenstern hat entgegengesetzte Vorzeichen.

Tabelle B.2: Koeffizienten der asymmetrischen Sieben-Punkte-DRP Schemas ($\eta = \frac{\pi}{2}$), nach Tam [32]

Asymmetrie in Punkten $l =:$	1	2	3
$a_{-3-l} = -a_{3+l} =$	0.026369431	-0.048230454	0.203876371
$a_{-2-l} = -a_{2+l} =$	-0.166138533	0.281814650	-1.128328861
$a_{-1-l} = -a_{1+l} =$	0.518484526	-0.768949766	2.833498741
$a_{0-l} = -a_{0+l} =$	-1.273274737	1.388928322	-4.461567104
$a_{1-l} = -a_{-1+l} =$	0.474760914	-2.147776050	5.108851915
$a_{2-l} = -a_{-2+l} =$	0.468840357	1.084875676	-4.748611401
$a_{3-l} = -a_{-3+l} =$	-0.049041958	0.209337622	2.192280339

B.2 Künstliche selektive Dämpfung

Tabelle B.3: Koeffizienten des symmetrischen Sieben-Punkte Dämpfungssterns, nach Tam u. a. [31]

$\sigma =:$	0.2	0.3
$d_{-3} = d_3 =$	-0.0238530481912	-0.014281184692
$d_{-2} = d_2 =$	0.1063035787698	0.086150669577
$d_{-1} = d_1 =$	-0.2261469518087	-0.235718815308
$d_0 =$	0.2873928424602	0.327698669846

B.3 Zeitliche Diskretisierung

Die Koeffizienten des Low-Dispersion Low-Dissipation Runge-Kutta Verfahrens (LDDRK) 5./6. Ordnung sind wie folgt implementiert:

Tabelle B.4: Die Koeffizienten des alternierenden fünf-/sechsstufigen Runge-Kutta Verfahrens vierter Ordnung nach Hu u. a. [11]

Ordnung:	5	6
a_1	0	0
a_2	-0.6051226	-0.4412737
a_3	-2.0437564	-1.0739820
a_4	-0.7406999	-1.7063570
a_5	-4.4231765	-2.7979293
a_6	-	-4.0913537
b_1	0.2687454	0.1158488
b_2	0.8014706	0.3728769
b_3	0.5051570	0.7379536
b_4	0.5623568	0.5798110
b_5	0.0590065	1.0312849
b_6	-	0.15
c_1	0	0
c_2	0.2687454	0.1158485
c_3	0.5852280	0.3241850
c_4	0.6827066	0.6193208
c_5	1.1646854	0.8034472
c_6	-	0.9184166

Index

- Ableitung
 - materielle, 4
- Adiabateneponent γ , 6
- Analytische Lösung, 32–33
- Auflösung
 - räumliche minimale Auflösung, 18
 - zeitliche minimale Auflösung, 20
- Besselsche Differentialgleichung, 31
- Coriolis-Kraft, 30
- Düse
 - kompakte, 48
- Differenzenstern
 - einseitiger, 18
 - symmetrische Implementierung, 18
 - zentraler, 18
- Dispersionsrelation, 32, 40
- Entropiewelle, 44–55
 - Dichteschwankung, 48
- Gaskonstante \mathcal{R} , 6
- Gitterschwingungen
 - spurious waves, 20
- Größen
 - dimensionslose, 8–10
 - Einheitsgrößen, 9
 - physikalische, 4
- Grundgleichungen, 4–16
 - homentrop, 16
 - rotationsfrei, 16
- Gruppengeschwindigkeit, 40
- LDDRK, 19–20, 99
 - 2N-storage-form, 19
- Linearisierung, 10–13
 - der Druckschwankung, 11
 - der Entropieschwankung, 12–13
 - linearisierte Grundgleichungen, 13–14
- Parallelisierung, 22
 - blockorientiert, 22
- PML
 - Split-PML, 36
- Potentialströmung, 49
- Präprozessoroption, 16, 96
 - CAA_INTERPOL, 27
 - CAA_LIN_ENTROPY, 93, 94
 - CAA_LIN_PRESS, 93, 94
 - CAA_NOCORIOLIS, 94
 - CAA_NOROT, 16, 94
 - CAA_VAR_ENTROPY, 93, 95
- Punkte pro Wellenlänge (PPW), 18
- Randbedingung
 - axiale Symmetrie/Antimetrie, 26–28
 - Ghostpoint, 23
 - Interpolation, 26–28
 - schallharte Wand, 25–26
 - Slip-Wall, 23
- Wärmekapazität
 - spezifische, 6
- Zylinderkoordinaten, 7–8
 - Divergenz, 7
 - Gradient, 7
 - Laplace Operator, 8
 - Rotation, 8
 - Zweite Vektorform, 8

Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung versichere ich an Eides statt.
Berlin, den 3. November 2003

Christoph Schemel