Zur Veranschaulichung der Wellenausbreitung in ebenen Strömungskanälen

Betrachtet wird die Wellenausbreitung in einem Kanal mit konstanter Strömung (ebenes Geschwindigkeitsprofil) und schallharten Wänden. Die geometrische Situation ist in Abbildung 1 dargestellt.

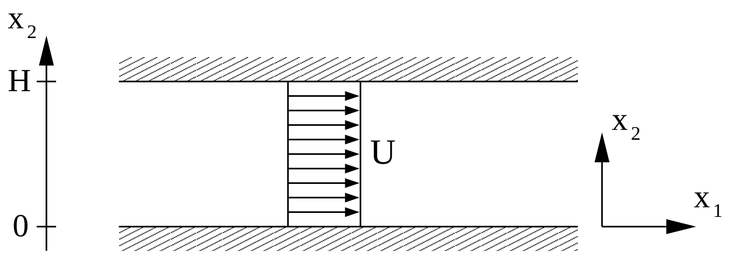

Abbildung 1: Zur Definition des Koordinatensystems

Die Breite des Kanals wird mit H bezeichnet, und U ist die Strömungsgeschwindigkeit. Die Randbedingung der schallharten Wände bedeutet, daß die Normalkomponente der Schnelle an der Wand verschwindet. Wird mit $v_i'(x_1, x_2)$ die Schnelle in x_i-Richtung an der Position (x_1, x_2) bezeichnet, muß gelten:

$$v_2'(x_1, x_2 = 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad v_2'(x_1, x_2 = H) = 0 \tag{1}$$

Mit Hilfe der linearisierten Impulsgleichung kann die Randbedingung für die Schnelle in eine Bedingung für den Druck umgeformt werden. Mit der Randbedingung ergibt sich eine Lösung der Wellengleichung für den Druck:

$$p'(x_1, x_2, t) = A \cdot cos(\beta_m x_2) \cdot e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} \tag{2}$$

mit

$$\beta_m = \frac{m\pi}{H} \qquad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

und

$$\alpha_m = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega}\right)^2 (1 - M^2)} - M}{(1 - M^2)} \tag{4}$$

Gleichung (2) repräsentiert somit eine ganzen Reihe von Lösungen, die Moden genannt werden. Eine Mode ist durch die Zahl m gekennzeichnet, die als ihre Ordnung bezeichnet wird. Die Koeffizienten β und α werden durch m festgelegt. Die Wellenzahl α_m hängt überdies noch von der Frequenz ω und der Machzahl $M = U/c$ ab.
Unter Umständen kann die Wellenzahl α_m komplex werden. Dies ist der Fall, wenn für die Frequenz

$$\omega < \beta_m c \sqrt{1 - M^2} \tag{5}$$

gilt. In jedem Fall gibt es für jedes m nach (4) zwei Wellenzahlen α_m und damit zwei Lösungen - eine für (+) vor der Wurzel und eine für (−). Ein Überblick über das Verhalten

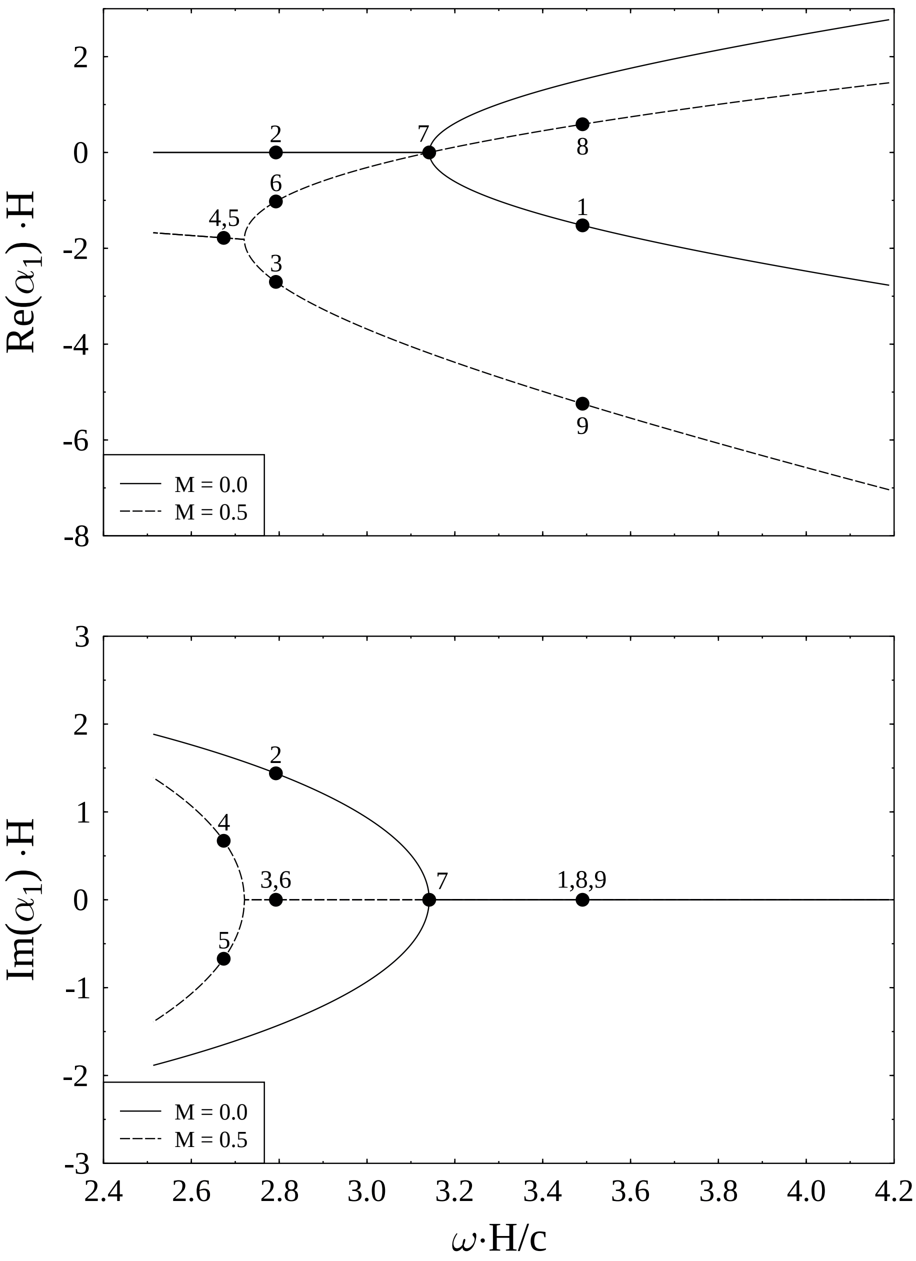

Abbildung 2: Komplexe Wellenzahl als Funktion der Frequenz

von α_m in Abhängigkeit der Frequenz ω ist für die erste höhere Mode $m = 1$ in der Abbildung 2 dargestellt. Zum Vergleich sind zwei Fälle - einer mit Strömung und einer ohne - aufgetragen. Die durchgezogenen Kurven entsprechen dem Fall $M = 0$ und die gestrichelten Kurven sind für $M = 0.5$ berechnet. Im oberen Graph ist der Realteil der Wellenzahl und im unteren Graph der Imaginärteil aufgetragen. In der Darstellung ist die Frequenz mit dem Faktor H/c, der einer charakteristischen Zeiteinheit entspricht, normiert. Ebenso ist die Wellenzahl mit der charakteristischen Länge H normiert.

Fall	λ	$\omega \cdot H/c$	M	$\pm$	$\mathrm{Re}(\alpha_1)$	$\mathrm{Im}(\alpha_1)$
1	1.8	3.49066	0.0	$(-)$	-1.52154	0.0
2	2.25	2.79253	0.0	$(-)$	0.0	1.43924
3	2.25	2.79253	0.5	$(-)$	-2.70073	0.0
4	2.35	2.6737	0.5	$(-)$	-1.78246	0.671388
5	2.35	2.6737	0.5	$(+)$	-1.78246	-0.671388
6	2.25	2.79253	0.5	$(+)$	-1.02263	0.0
7	2.0	3.14159	0.5	$(+)$	0.0	0.0
8	1.8	3.49066	0.5	$(+)$	0.588749	0.0
9	1.8	3.49066	0.5	$(-)$	-5.24296	0.0

Tabelle 1: Parameter für die veranschaulichten Fälle

In der Abbildung sind die Wellenzahlen zu den Fällen, deren Wellenformen hier veranschaulicht werden, mit einem Punkt markiert. In der Tabelle 1 sind zur Übersicht alle Werte dieser Fälle aufgelistet. Die Größe $\lambda = 2\pi c/(H\omega)$ entspricht einer mit der Kanalbreite normierten Wellenlänge. Diese Größe ist zusätzlich angegeben, da sie anschaulicher als die Frequenz ω ist. Zum Beispiel lautet die "Cut-off" Bedingung für $m = 1$ ohne Strömung einfach: $\lambda > 2$.