

Studienarbeit

Das Beulverhalten orthotroper, schwach gekrümmter
Schalenstreifen unter Schub- und Druckbelastung bei
beliebiger Randeinspannung

Verfasser : Ulf Bunge

Matr.-Nr. : 122485

Berlin, 1995 bis 1996

Institut für Luft- und Raumfahrt
TU Berlin

Fachgebiet Leichtbau, Prof. Dr.-Ing. J. Wiedemann

Wissenschaftliche Betreuung : Dipl.-Ing. L. Herbeck

Inhaltsverzeichnis

Kapitel		Seite
	Bezeichnungen	3
1	Einführung	5
2	Modellformulierung	7
2.1	Voraussetzungen und Annahmen	7
2.2	Gleichgewichtsbedingungen.....	9
2.3	Materialgesetz.....	11
2.4	Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen.....	12
2.5	Kompatibilität.....	13
2.6	Randbedingungen.....	13
3	Verfahrensentwicklung	15
3.1	Differentialgleichungen und Ansätze.....	15
3.2	Erfüllung der Randbedingungen.....	18
3.3	Das zweite Verfahren.....	23
3.4	Zusammenfassung und numerische Umsetzung.....	27
4	Numerische Auswertung	29
4.1	Erstes Verfahren.....	29
4.1.1	Die isotrope, ebene und gelenkig gelagerte Schale.....	29
4.1.2	Variation der Einspannung.....	35
4.1.3	Weitere Rechnungen.....	36
4.2	Zweites Verfahren.....	37
4.2.1	Variation der Krümmung und Orthotropie.....	37
4.2.2	Variation der Einspannung.....	43
4.2.3	Kombinierte Belastung, Schub und Druck.....	45
4.2.4	Beulformen.....	46
4.2.5	Weitere Rechnungen.....	49
4.3	Zusammenfassung und Genauigkeit.....	49

5	Bewertung und Einordnung	51
A	Anhang: Tensoranalytische Beschreibung	54
A1	Allgemeine Einführung.....	54
A2	Formulierung in Zylinderkoordinaten.....	62
A3	Vereinfachungen für Flächentragwerke.....	70
B	Anhang: Literaturverzeichnis	73

Bezeichnungen

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$	1	Verzerrungen, längs und quer, Schubverzerrung
η	1	Kreuzzahl
φ, ψ	°	Winkel in Abb. 2.2
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	1/m	Krümmungen, längs und quer, Drillung
λ	1	Nullstelle des charakteristischen Polynomes
ν	1	Querkontraktionszahl
Ω	1	Krümmungsmaß
Ω^*	1	Auftragungskrümmungsmaß
ψ	1	Lastverhältnis aus Schub und Druck
ζ	1	Scherzahl
a, b	m	Länge und Breite des Beulfeldes
a/b	1	Beulfeldseitenverhältnis
A, B, C, D, K	bel.	Matrixelemente, allgemein
B_x, B_y, B_{xy}	Nm	Biegesteifigkeiten, längs und quer, Kreuzsteifigkeit
c_{ij}, C_{ij}	N	$i, j=1,2,3$: Scheibensteifigkeiten
	Nm	$i, j=4,5,6$: Plattensteifigkeiten
c_{ij}^*, C_{ij}^*	1/N	$i, j=1,2,3$: Scheibennachgiebigkeiten
	1/Nm	$i, j=4,5,6$: Plattennachgiebigkeiten
C_R, C_r	Nm	Randeinspannfedersteifigkeit
D_x, D_y, D_{xy}	N	Dehnsteifigkeiten, längs und quer, Schersteifigkeit
e_n	1/m ⁷	Polynomkoeffizienten
$E(x, y)$	1	Ortsfunktion
E	N/m ²	Elastizitätsmodul
$F(x, y)$	Nm	Airysche Spannungsfunktion
G	N/m ²	Schubmodul
i	-	imaginäre Einheit
k, k_u, k_v	1	Proportionalitätsfaktoren
k, k_σ, k_τ	1	Beulwert, allgemein und für Druck und Schub
l, L	m	geometrische Gesamtlängen
m_x, m_y, m_{xy}	N	Plattenmomente
n_x, n_y, n_{xy}	N/m	Scheibenkräfte
n_{xz}, n_{yz}	N/m	Plattenquerkräfte
p_x	N/m	Drucklast
p_{xy}	N/m	Schublast
p_k, p_{kr}	N/m	kritische Last, Beullast
r	m	Radius

u, v, w	m	Verschiebungen in x-, y- und z-Richtung
x, y, z	m	physikalische Zylinderkoordinaten
$()^*$	-	Amplitudenwert
$()_k, ()_n$	-	Zählindizes

Anhang A: Tensornotationen

$()^i$	bel.	kontravarianter Tensorindex, Indexschreibweise
$()_i$	bel.	kovarianter Tensorindex, Indexschreibweise
$()$	bel.	Tensor erster Stufe (Vektor), symbolische Schreibweise
$\underline{()}$	bel.	Tensor zweiter Stufe, symbolische Schreibweise
Θ^i	bel.	beliebige, krummlinige Koordinaten
x_i	m	kartesische Koordinaten
$\underline{g}_i, \underline{g}^i$	bel.	ko- und kontravariante Basen
\underline{e}_i	m	kartesische Basis
$\underline{()}\cdot\underline{()}$	-	Skalarprodukt für Tensoren mindestens erster Stufe
Γ_{ij}^m	gel.	Christoffel-Symbol 2. Art
$()_{,k}$	-	partielle Ableitung nach der k-ten Koordinate
γ_{ij}	1	Komponenten des Verzerrungstensors
$\underline{r}, \underline{R}$	m	Ortsvektoren
$\underline{g}, \underline{G}$	bel.	Metriktensoren
$\underline{\delta}$	1	Einheitstensor, Metrik der kartesischen Koordinaten
ds, dS	m	Bogenlängen
$()_{<ij>}$	-	physikalische Komponenten eines Tensors zweiter Stufe
$()^{(L)}$	-	linearer Anteil
$()^{(NL)}$	-	nichtlinearer Anteil
β_x, β_y	1	Querschnittsneigungen
$()_0$	-	Größen der Mittelebene oder Neutralebene

1 Einführung

In dieser Studienarbeit soll das Beulen eines Schalenstreifens unter kombinierter Schub- und Druckbelastung bei beliebiger Längsrandlagerung untersucht werden.

Diese Arbeit baut auf die Diplomarbeit von Herrn Dipl. Ing. M. Schmalstieg auf, [10], indem sie das gleiche Thema auf andere Art angehen und eine Erweiterung vornehmen soll. Die Art des Herangehens, die geändert werden soll, sind dabei die verwendeten Unbekannten zur mathematischen Beschreibung des Problems und die Ansätze zur Lösung der Differentialgleichungen. Die Erweiterung umfaßt im wesentlichen die zusätzliche Berücksichtigung einer Schubbelastung.

Die Stabilitätsanalyse erlangt in der Luft- und Raumfahrttechnik deswegen besondere Bedeutung, weil die gewichtsoptimale Auslegung meist auf schlanke und dünnwandige Bauteile mit kleinem Strukturkennwert führt, [1]. Häufig sind solche Bauteile von sehr komplizierter geometrischer Gestalt, deren Berechnung eine Reduzierung auf analytisch oder halbanalytisch behandelbare Modelle verlangt. Ein Beispiel dafür ist ein Hautfeld eines Tragflügels zwischen zwei Stringern. Modelliert man die Stützwirkung eines Stringers mittels einer Einspannfedersteifigkeit, nimmt am Ort der Stringer eine unverschiebliche Lagerung an und beschränkt sich auf nur ein Feld zwischen zwei Stringern, so kommt man zu dem Modell, das in dieser Arbeit behandelt werden soll, wobei noch die vereinfachende Annahme äquidistanter Stringer eingegangen ist. Die Beschränkung auf ein Teilfeld ist deswegen möglich, weil beim lokalen Beulen vom benachbarten Hautfeld keine Stützwirkung ausgeht, [1].

Die Berücksichtigung möglicher Faserverbundbauweisen erfolgt über das Materialgesetz, das Orthotropie zuläßt. Allgemeine Anisotropie und Exzentrizität finden allerdings in dieser Arbeit keine Berücksichtigung.

Die bekannten Lösungen für das gegebene Modell werden bereits von Schmalstieg aufgezählt, [10], und in den Rahmen laufender und abgeschlossener Forschungen eingegliedert, [6].

Das zweite Kapitel dieser Arbeit beinhaltet die zur Formulierung des Problems erforderlichen Gleichungen und die ihnen zugrundeliegenden Voraussetzungen. Aus diesen Gleichungen werden dann im folgenden dritten Kapitel zwei Verfahren zur Bestimmung des Beulwertes angegeben, wobei sich die Verfahren in der Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten unterscheiden. Einmal wird, ausgehend von ebenen Zuständen, ein Ansatz für eine Spannungsfunktion nach Airy gemacht und als zusätzliche Bedingung die Kompatibilität

verwendet, beim zweiten Verfahren werden die Verschiebungsdifferentialgleichungen direkt gelöst. Eine Erläuterung der numerischen Umsetzung des Verfahrens in ein Programm schließt das dritte Kapitel ab.

Im vierten Kapitel wird die numerische Auswertung mit ihren Problemen und den wenigen richtigen und einigen falschen Ergebnissen beschrieben. Fehlerhafte Rechenläufe, sofern nicht klärbar und korrigierbar, sind dokumentiert und weitestgehend mit bekannten Lösungen verglichen. Angefangen wird mit der Auswertung des ersten Verfahrens, bis so viele Fehler auftreten, daß in Absprache mit Herrn Herbeck das zweite Verfahren zur Anwendung kommt, welches dann ausschließlich weiterverfolgt wird, da aus Zeitgründen nicht mehr möglich gewesen ist. Hierauf wird im abschließenden fünften Kapitel nochmals genauer eingegangen, denn ursprünglich ist ein zweites Verfahren gar nicht vorgesehen gewesen.

Im fünften und letzten Kapitel findet eine Bewertung des Verfahrens und ein Ausblick auf weitere Möglichkeiten mit diesem statt.

Ein anschließender Anhang zeigt eine tensoranalytische Herleitung der exakten Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen, um weitergehende Untersuchungen, z.B. des Nachbeulverhaltens, zu ermöglichen. Außerdem sollen die mathematischen Zusammenhänge in dem verwendeten, krummlinigen Zylinderkoordinatensystem verdeutlicht werden, denn sie sind für Zusatzterme verantwortlich, die in kartesischen Koordinatensystemen nicht auftauchen, bei dem in dieser Arbeit untersuchten gekrümmten Schalenstreifen aber eine wesentliche Rolle spielen.

2 Modellformulierung

In diesem Kapitel werden kurz die Voraussetzungen und Annahmen für die Berechnungen erläutert, und es wird eine Aufzählung der zur mathematischen Beschreibung des Problems benötigten Gleichungen in einzelnen Unterkapiteln gegeben. Im einzelnen sind das Gleichgewichtsbedingungen, Materialgesetz, Verschiebungs- Verzerrungs- Relationen, Kompatibilität und die Randbedingungen. Dabei wird noch keine Aussage über die Verwendung der Gleichungen bei den einzelnen Verfahren gemacht.

2.1 Voraussetzungen und Annahmen

Die Voraussetzungen, die den Berechnungen zugrunde liegen, sind die der geometrisch und physikalisch linearen Theorie schwach gekrümmter Schalen [9]. Im wesentlichen sind das :

- die Verschiebungen sind klein gegenüber den geometrischen Abmessungen,
- die tangentialen Verschiebungen in der Schalenfläche und ihre Ableitungen sind klein gegenüber der radialen Verschiebung w ,
- die Ableitungen der radialen Verschiebung sind klein gegenüber eins,
- die Dicke t der Schale ist klein gegenüber dem Radius r ,
- Der Einfluß der ohnehin kleinen Plattenquerkräfte auf das Gleichgewicht der Scheibenkräfte braucht nicht berücksichtigt werden.

Die letzte Annahme hat ihre Begründung in Erfahrungen, die bei vorangegangenen Untersuchungen gemacht worden sind. Es hat sich bei ähnlichen Problemen, bei denen keine Belastungen auftreten, die nicht in der Schalenfläche liegen, herausgestellt, daß die Vernachlässigung dieses Einflusses keine Unterschiede in den Ergebnissen für die Beulwerte gekrümmter Schalen verursacht hat.

Eine Erklärung, die sich dafür anbietet, ist die Tatsache, daß sich bei stärker gekrümmten Schalen und bei Zylindern im speziellen immer mehrere Beulen über den Umfang ausbilden können. Aufgrund dessen kann das Problem immer wieder auf einen Schalenstreifen der Breite einer Beule in Umfangsrichtung zurückgeführt werden. Dies ist dann wieder ein Problem sehr

schwacher Krümmung, bei dem die Annahme zulässig ist. Dies rechtfertigt die Erweiterung der Rechnungen auf stärker gekrümmte Schalen mit dieser Methode.

Die Formulierung des Modells wird in Zylinderkoordinaten vorgenommen, wobei jedoch von der allgemein üblichen Bezeichnungsweise r, φ, z abgewichen wird, um mit bisherigen Arbeiten und Bezeichnungen, die mit Zylinderschalen zu tun haben, konform zu bleiben. Hierfür sei besonders auf [2] verwiesen. Der Anhang A soll die Zusammenhänge zwischen der verwendeten Bezeichnungsweise und den allgemeinen Zylinderkoordinaten noch weiter verdeutlichen und eine Skizze soll sie veranschaulichen, Abb. 2.1.

Weiterhin wird ein so langer Schalenstreifen vorausgesetzt, daß der Einfluß der Randbedingungen der kurzen Ränder vernachlässigt werden kann, solange an diesem Rand die Verschiebung w behindert ist. Es ist also lediglich egal, ob die Randlagerung dann gelenkig oder fest eingespannt ist [7]. Praktisch bedeutet das, im isotropen Fall sind Seitenverhältnisse a/b von mindestens drei zu realisieren. Im orthotropen Fall ist allerdings das Verhältnis der Biegesteifigkeiten mit einzubeziehen, und es ist ein wirksames Seitenverhältnis von mindestens drei vorauszusetzen, siehe [1]. In der vorliegenden Arbeit wird die Orthotropie über die Kreuzsteifigkeit erhalten, so daß geometrisches und wirksames Seitenverhältnis gleich sind.

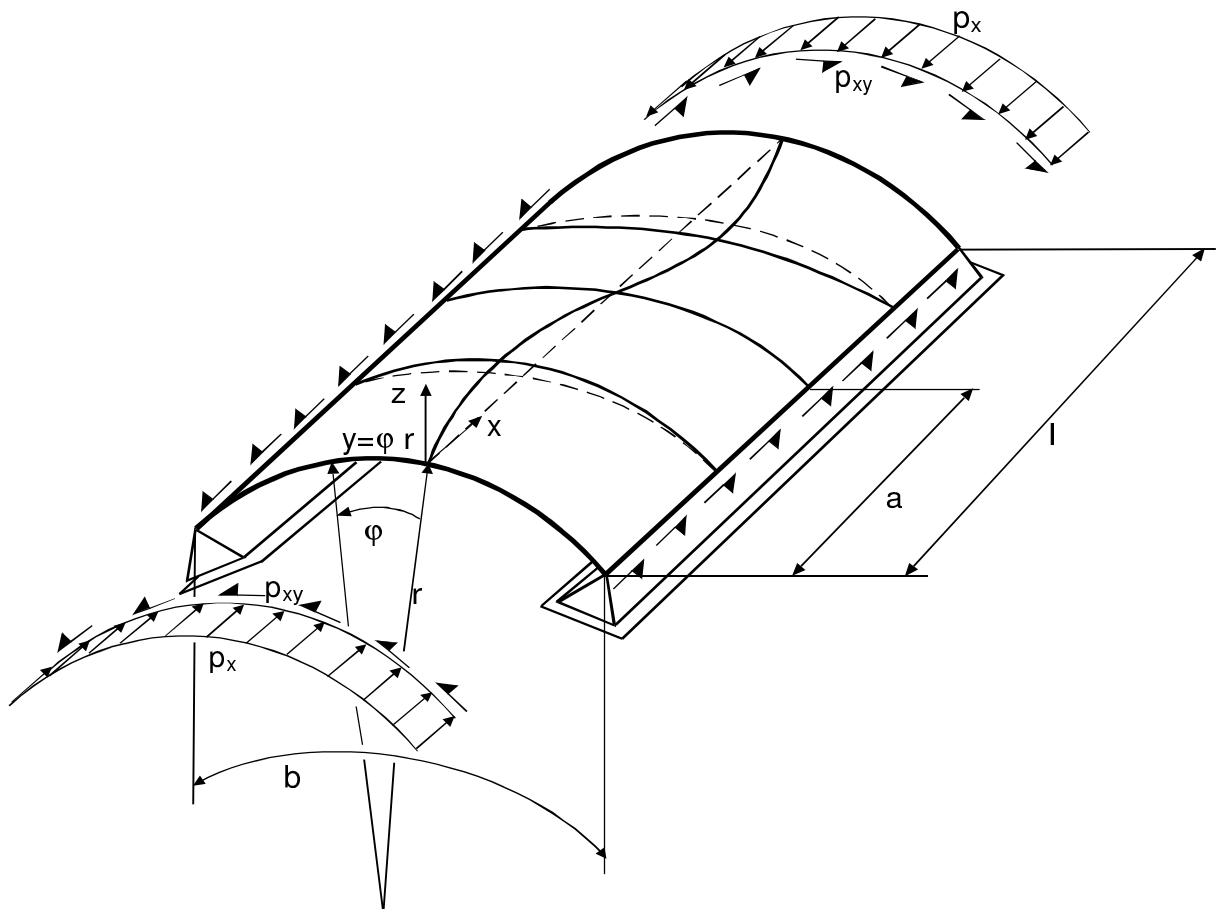


Abb. 2.1: Skizze des Schalenstreifens, aus [11]

2.2 Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen entsprechen denen in [1], wobei die der Schale jedoch um die Terme, die sich aus der Schubbelastung ergeben, erweitert sind. Es sei hier schon darauf hingewiesen, daß die Terme, die sich aus dem Einfluß der Scheibenkräfte auf das Gleichgewicht in radialer Richtung ergeben (Gl. 2.2-1, e), im weiteren Verlauf der Rechnungen mit dem ersten Verfahren auf Grund der Ansätze, die für $w(x,y)$ und $F(x,y)$ gemacht werden, ohne Einfluß bleiben. Sie sind aus Gründen der Vollständigkeit mit aufgeführt und werden graphisch erklärt.

Ein Bild kann das Zustandekommen der Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung veranschaulichen, wobei zu beachten ist, daß die Neigungen der Querschnitte der Schale sowohl aus dem Krümmungsradius r als auch aus den zweiten Ableitungen der Verschiebung $w(x,y)$ resultieren. In Abb.2.2. ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die radiale Verschiebung $w(x,y)$ angegeben, so daß das Gleichgewicht im schwach verformten Zustand angesetzt wird (Theorie erster Ordnung). Die Krümmungen aus dem Schalenradius r und den Verschiebungsableitungen werden anschließend einfach superponiert. Eine graphische Veranschaulichung der anderen Gleichgewichtsbedingungen ist unter anderem [1] zu entnehmen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} &= 0 \quad , \\
 \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} &= 0 \quad , \\
 \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - n_{xz} &= 0 \quad , \\
 \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - n_{yz} &= 0 \quad \text{und} \\
 \frac{\partial n_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial n_{yz}}{\partial y} - n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - n_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \right) &= 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.2-1,a-e}$$

Zum Aufstellen des Kräftegleichgewichts in radialer Richtung ist es notwendig, die Linienkräfte mit ihren Wirkungslängen dx und dy zu multiplizieren, wobei die Anteile der Scheibenkräfte in die radiale Richtung zu projizieren sind. Somit kann also folgender Zusammenhang aus Abb.2.2 entnommen werden:

$$\begin{aligned}
 & \left[- \left(n_{yz} - \frac{\partial n_{yz}}{\partial y} dy \right) \right] dx + \left[- \left(n_{xz} - \frac{\partial n_{xz}}{\partial x} dx \right) \right] dy \\
 & + \left[-n_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_{xz} - n_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy + \left[-n_y \frac{\partial w}{\partial y} + n_{yz} - n_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx = 0 \quad .
 \end{aligned} \tag{2.2-2}$$

Dieser Ausdruck wird so umgeformt, daß dx und dy , die dafür nur als Längen interpretierbar sind, ausgeklammert werden können:

$$\left[\frac{\partial n_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial n_{xz}}{\partial x} - n_x \frac{dw}{dx} - 2n_{xy} \frac{dw}{dx dy} - n_y \frac{dw}{dy} \right] dx dy = 0 \quad . \tag{2.2-3}$$

Nach Vollzug eines Grenzüberganges und nach Ausnutzung der Tatsache, daß vollständiges und partielles Differential von x und y übereinstimmen, wenn noch keine Zylinderkoordinaten verwendet werden, ergibt sich der gesuchte Anteil des Gleichgewichts. Daß der Anteil von n_y mit dem Faktor r^{-1} hier nicht auftritt, hat darin seine Ursache, daß, wie oben erwähnt, nur eine Verformung $w(x,y)$ angenommen worden ist. Jede weitere Krümmung oder Verdrillung kann superponiert werden, was in diesem Fall bedeutet, daß der Term r^{-1} , der die konstante Krümmung in y -Richtung repräsentiert, dem entsprechenden Term für die Krümmung aus $w(x,y)$ hinzuzufügen ist. Dann hat der Ausdruck die Form der Gl. 2.2-1, e.

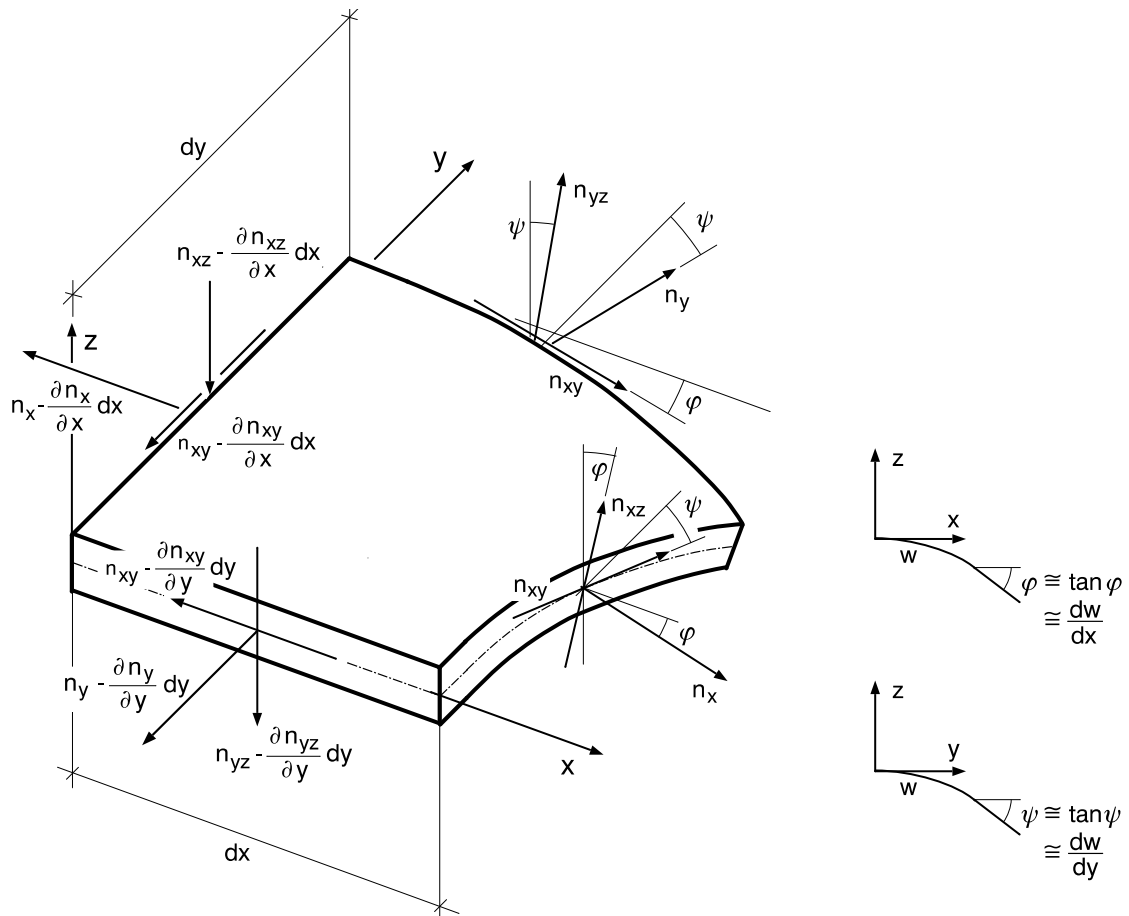


Abb. 2.2: Verformtes Element, freigeschnitten

2.3 Materialgesetz

Das linearelastische Materialgesetz ist [1] entnommen. Es berücksichtigt keine Exzentrizität, so daß keine Terme in den Steifigkeitsmatrizen auftreten, die eine Kopplung zwischen Platten- und Scheibeneffekten hervorrufen würden, und es beschränkt sich auf orthotropes Material. Aus der Tatsache, daß keine Kopplung zugelassen ist, leitet sich auch die Möglichkeit der Erzeugung der Orthotropie lediglich durch die Biegesteifigkeiten ab.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Steifigkeiten ist, daß sie vom Ort unabhängig, also als konstant vorausgesetzt werden.

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{n} \\ \underline{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_s & \underline{c}_k \\ \underline{c}_k & \underline{c}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\kappa} \end{bmatrix} \quad (2.3-1)$$

Die Inversion der Gl. 2.3-1 liefert die Nachgiebigkeitsmatrix, wobei deren Elemente zur Unterscheidung mit einem Sternchen gekennzeichnet werden.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^* & c_{22}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^* & c_{45}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45}^* & c_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_s^* & \underline{c}_k^* \\ \underline{c}_k^* & \underline{c}_p^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{n} \\ \underline{m} \end{bmatrix} \quad (2.3-2)$$

Bei den folgenden Rechnungen ergeben sich einige praktische Abkürzungen, die wie in [1] eingeführt werden. Dies sind die Dehnsteifigkeiten längs und quer, D_x und D_y , die Schersteifigkeit D_{xy} , die Biegesteifigkeiten längs und quer, B_x und B_y , und die Kreuzsteifigkeit B_{xy} :

$$D_x = \frac{1}{c_{11}^*}, \quad D_y = \frac{1}{c_{22}^*}, \quad D_{xy} = \frac{1}{c_{12}^* + \frac{c_{33}^*}{2}}, \quad (2.3-3,a,b)$$

$$B_x = c_{44}, \quad B_y = c_{55}, \quad B_{xy} = c_{45} + 2c_{66}.$$

2.4 Verschiebungs- Verzerrungs- Relationen

Die folgenden Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen u , v und w und den Verzerrungen ϵ_x , ϵ_y und ϵ_{xy} und den Krümmungen κ_x , κ_y und κ_{xy} angeben, sind ebenfalls [1] entnommen. Ihre Herkunft aus der Elastizitätstheorie für rotationssymmetrische Zylinderschalen in Zylinderkoordinaten wird aber im Anhang A dargestellt.

Die Krümmungen κ der Platte sind dabei denen der ebenen Platte identisch.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} \quad , \\
 \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \\
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \\
 \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{und} \\
 \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.4-1,a-f}$$

Ein nicht zu vernachlässigender Term aus dem Krümmungseinfluß ergibt sich aber bei der einmaligen Ableitung der Verschiebungen zu den Verzerrungen. Dieser Term entsteht bei ϵ_y durch die kovariante Ableitung der Vektorkomponenten des Verschiebungsvektors in Zylinderkoordinaten. Der Faktor r^{-1} entspricht gerade dem Christoffel-Symbol, welches für diese Ableitung heranzuziehen ist, siehe [3]. Weitere zusätzliche lineare Terme aus kovarianten Ableitungen gibt es bei den Scheibenverzerrungen in Zylinderkoordinaten nicht. Eine ausführliche Erklärung entnehme man dem Anhang A.

Die Motivation, die kontinuumstheoretische Herleitung der Verschiebungs- Verzerrungs-Relationen auszugliedern, resultiert aus der Tatsache, daß sie sich sehr umfangreich gestaltet, wenn zusätzlich noch Grundlagen erklärt werden. Dies ist aber notwendig, um von anderen Quellen unabhängig eine vollständige Formulierung dieser Gleichungen zu erhalten. Außerdem ist eine mathematische Abhandlung des Themas sogar notwendig, wenn weiterführende Arbeiten gemacht werden sollen, denn es ist schwer, in der Literatur vollständige und vor allem mathematisch korrekte Darstellungen der zugegeben sehr mühsamen Berechnung zu finden.

2.5 Kompatibilität

Die Kompatibilitätsaussage ist eine tensoranalytische Identität. Von den neun Gleichungen sind jedoch nicht alle wichtig. Die relevante mit den bisher beschriebenen Verzerrungen der Scheibe läßt sich aus der Anschauung allerdings viel einfacher als tensoriell gewinnen. Dazu müssen die Verschiebungs- Verzerrungs- Relationen, Gl. 2.4-1 herangezogen und ein Ausdruck gebildet werden, aus dem die Tangentialverschiebungen u und v eliminiert sind, denn über diese Verschiebungen soll im weiteren Verlauf der Rechnung mit dem ersten Verfahren keine Aussage gemacht werden. Eine Möglichkeit, so eine Aussage zu erhalten, ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial^2 y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} , \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} . \end{aligned} \quad (2.5-1)$$

2.6 Randbedingungen

Die Randbedingungen resultieren nur aus der Lagerung der seitlichen Ränder, weil die Randbedingungen der kurzen Ränder als unerheblich vorausgesetzt werden, was aus der unendlich angenommen Länge resultiert und den im weiteren verwendeten, in Längsrichtung π -periodischen Ansatz rechtfertigt. Als erste Randbedingung ist zu nennen, daß die Durchsenkung der Ränder an den Lagern null ist:

$$w(x, y = \pm \frac{b}{2}) = 0 . \quad (2.6-1)$$

Die zweite Randbedingung in den Verschiebungen resultiert aus dem Momentengleichgewicht an der Einspannung, da Randmoment und Randquerschnittsneigung über eine Federung gekoppelt sein sollen:

$m_y + m_{yR} = 0$, mit

$$m_y = c_{55} \kappa_y + c_{45} \kappa_x = B_y \kappa_y , \text{ mit } \kappa_x(x, y = \pm \frac{b}{2}) = 0 ,$$

$$m_{yR} = \mp C_R \frac{\partial w}{\partial y} \frac{1}{b} , \text{ bei } y = \pm \frac{b}{2} , \quad (2.6-2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \pm \frac{C_R}{b B_y} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 , \text{ bei } y = \pm \frac{b}{2} .$$

Abb. 2.3 soll diesen Zusammenhang verdeutlichen.

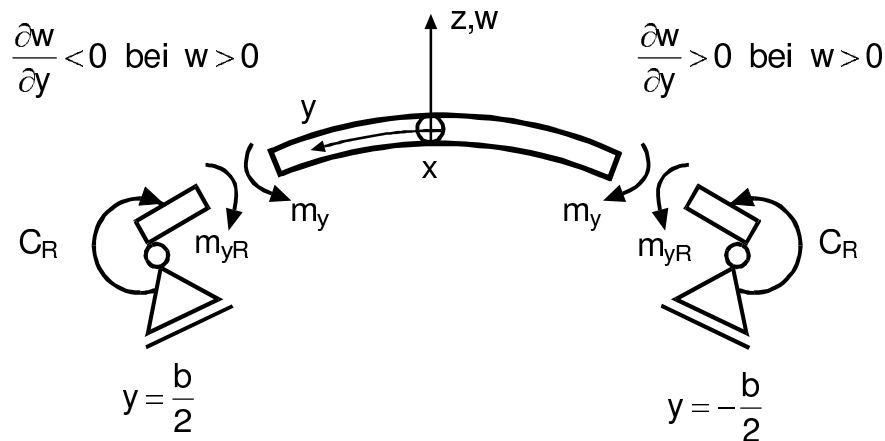


Abb. 2.3: Randeinspannung , aus [11]

Zwei weitere Randbedingungen werden für die Scheibenkräfte formuliert. Außer p_{xy} werden längs am Rand keine Lasten eingeleitet. Deshalb sind die Aussagen möglich, daß

$$n_y(x, y = \pm \frac{b}{2}) = 0 , \quad (2.6-3)$$

weil normal zum Rand keine Kraft wirken kann, da der Rand in dieser Richtung frei verschieblich ist, und daß

$$n_x(x, y = \pm \frac{b}{2}) = p_x , \quad (2.6-4)$$

weil am Rand keine Änderung von n_x auftreten kann, da eine Einleitung am Rand ausgeschlossen wird, so daß nur der konstante Teil p_x , der im ganzen Bereich gilt, als Randwert vorhanden ist.

3 Verfahrensentwicklung

In diesem Kapitel werden mittels der im vorhergegangenen Teil angegebenen Gleichungen zwei Verfahren zur Bestimmung des Beulwertes abgeleitet, in dem Ansätze zur Lösung des Differentialgleichungssystems ausgewertet werden.

Die Notwendigkeit für ein zweites Verfahren ergab sich erst im Verlauf der numerischen und programmtechnischen Auswertung des ersten Verfahrens, welches nicht die erwartete Lösung geliefert hat. Daraufhin ist dieses Verfahren gar nicht weiter untersucht worden, sondern gleich das zweite, das dem von Schmalstieg [10] ähnelt, angewendet worden. Bei derselben Untersuchung lieferte auch dieses Verfahren kein sinnvolles Ergebnis, wurde aber trotzdem weiter verwendet. Aus Zeitgründen ist dann nicht mehr auf das erste zurückgegriffen worden, sondern die Auswertung beschränkte sich im weiteren auf das zweite Verfahren.

Die Herleitung der Verfahren wird exemplarisch am ersten ausführlich vorgenommen (Kap. 3.1 und 3.2), danach werden nur die Unterschiede erläutert (Kap. 3.3). Eine zusammenfassende Beschreibung schließt das 3. Kapitel ab, wobei die numerische Umsetzung in ein Programm erläutert wird.

3.1 Differentialgleichungen und Ansätze

Das Problem soll beim ersten Verfahren durch die Verschiebung $w(x,y)$ und eine einer Potentialfunktion ähnlichen Funktion $F(x,y)$, der Airyschen Spannungsfunktion, aus der sich die Scheibenkräfte ableiten lassen, beschrieben werden, siehe [1] und [2]. Es sind also zwei Differentialgleichungen in diesen Größen aufzustellen. Dieses Vorgehen wird beim Lösen ebener Verzerrungs- oder Spannungszustände verwendet.

Beim Aufstellen der Differentialgleichungen und bei der Wahl der Ansatzfunktionen sind die in Kap.2 formulierten Zusammenhänge ausschlaggebend. Zuerst werden in der Gleichgewichtsbedingung 2.2-1, e die Plattenquerkräfte n_{xz} und n_{yz} eliminiert, indem sie durch die Gleichgewichtsbedingungen 2.2-1, c und d ersetzt werden. Dadurch gehen Aussagen über die Querkräfte verloren, doch sie sind nach den Voraussetzungen sowieso nicht von Interesse. Als zweite Differentialgleichung wird die Kompatibilitätsbedingung genommen.

Um die Scheibengleichgewichtsbedingungen, Gleichung 2.2-1, a und b, zu erfüllen, wird für die Scheibenkräfte folgender Zusammenhang formuliert:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} + p_x, & p_x &= \text{const} \quad , \\ n_y &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + p_y, & p_y &= 0 \quad , \\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} + p_{xy}, & p_{xy} &= \Psi p_x \quad . \end{aligned} \quad (3.1-1)$$

Hierbei ist über die Funktion $F(x,y)$ noch keine Aussage gemacht, ihre Einführung auf diese Art bedingt jedoch, daß die angesprochenen Differentialgleichungen a priori erfüllt sind, was man durch Einsetzen sofort verifizieren kann. Die konstanten Anteile p_x und p_{xy} sind die Größen, die im weiteren Verlauf als Beullasten zu bestimmen sind. Das Lastverhältnis Ψ ist eine Größe, die nicht als Variable eingeführt werden kann, sie muß vielmehr als fester Wert vorgegeben werden, so daß dann für verschiedene Lastverhältnisse aus Schub- zu Druckbelastung gerechnet werden kann, siehe [6].

Nutzt man Gl. 3.1-1 aus, so wird die erste Differentialgleichung zu:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + p_x \right)}_{n_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \underbrace{\left(-2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + 2 p_{xy} \right)}_{2n_{xy}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}_{n_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \right) = 0. \quad (3.1-2)$$

Setzt man in diese Gleichung das Materialgesetz und die Verschiebungs- und Verzerrungsrelationen ein, so ergibt sich die erste Differentialgleichung in der Form, in der sie weiter verwendet wird und in der sie auch ähnlich in [1] zu finden ist:

$$\begin{aligned} & - B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 B_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & - p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 p_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.1-3)$$

Die mittleren drei Summanden sind die, die schon in Kapitel zwei als irrelevant bezeichnet wurden, da sie auf Grund der Ansätze, die für F und w gemacht werden, herausfallen. Um die zweite Differentialgleichung in der gewünschten Form aus der Kompatibilitätsbedingung zu erhalten, wird in Gl. 2.5-1 das Materialgesetz mit Nachgiebigkeiten und der in Gl. 3.1-1 formulierte Zusammenhang eingesetzt. Es ergibt sich dann:

$$\frac{1}{D_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{2}{D_{xy}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{D_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.1-4)$$

Die beiden Differentialgleichungen 3.1-3 und 3.1-4 bilden ein homogenes System von gekoppelten, linearen, partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Folgender Ansatz für F und w, der auch in [6] verwendet wird, überführt das Problem in ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= W^* e^{i\pi \frac{x}{a}} e^{i\lambda \frac{y}{b}} \equiv W^* E(x,y) , \\ F(x,y) &= F^* e^{i\pi \frac{x}{a}} e^{i\lambda \frac{y}{b}} \equiv F^* E(x,y) . \end{aligned} \quad (3.1-5)$$

Die Ortsfunktionen, für die die Abkürzung E eingeführt wird, ist also in beiden Ansätzen gleich. Die mit einem Stern gekennzeichneten Amplitudenwerte sind Konstanten, was bedeutet, daß F^* und W^* sich nur in einem konstanten Faktor unterscheiden können. Dies erlangt im weiteren Verlauf der Rechnung eine gewisse Bedeutung, denn es ermöglicht erst die Lösung.

Dieser Ansatz spiegelt auch die gemachten Voraussetzungen wieder, denn er ist in x-Richtung π -periodisch, was aus der unendlichen Länge resultiert, und in y-Richtung ist eine unbekannte Periodizität angenommen, da die Drehfedereinspannung und die Krümmung eine Annahme einer π -Periodizität nicht zulassen.

Mit den Ansätzen 3.1-5 werden die Differentialgleichungen zu folgenden, in Matrixschreibweise zusammengefaßten Ausdrücken, aus denen die Funktion E(x,y) schon herausgekürzt ist:

$$\left[\begin{array}{c|c} -B_x \frac{\pi^4}{a^4} - 2B_{xy} \frac{\lambda^2 \pi^2}{b^2 a^2} - B_y \frac{\lambda^4}{b^4} & \frac{1}{r} \frac{\pi^2}{a^2} \\ + p_x \frac{\pi^2}{a^2} + 2\psi p_x \frac{\lambda \pi}{ba} & \\ \hline \frac{1}{r} \frac{\pi^2}{a^2} & \frac{1}{D_x} \frac{\lambda^4}{b^4} + \frac{2}{D_{xy}} \frac{\lambda^2 \pi^2}{b^2 a^2} + \frac{1}{D_y} \frac{\pi^4}{a^4} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} W^* \\ F^* \end{bmatrix} = \underline{0} . \quad (3.1-6)$$

Die Lösbarkeitsbedingung, daß die Determinante der Koeffizientenmatrix null ist, liefert ein Polynom achten Grades in λ , welches es ermöglicht, unter Vorgabe der Steifigkeiten, der Lasten und der Geometrie des Schalenstreifens acht λ_n zu bestimmen, mit denen die Ansätze 3.1-5 die Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^8 e_i \lambda^i &= 0 \quad , \text{mit} \\
e_8 &= \frac{B_y}{D_x} \frac{1}{b^8} \quad , \quad e_7 = 0 \quad , \\
e_6 &= \frac{\pi^2}{a^2 b^6} \left(\frac{2B_{xy}}{D_x} + \frac{2B_y}{D_{xy}} \right) \quad , \quad e_5 = -\frac{2\psi p_x}{D_x} \frac{\pi}{a b^5} \quad , \\
e_4 &= \frac{\pi^4}{a^4 b^4} \left(\frac{B_x}{D_x} + \frac{4B_{xy}}{D_{xy}} + \frac{B_y}{D_y} - \frac{p_x}{D_x} \frac{a^2}{\pi^2} \right) \quad , \\
e_3 &= -\frac{4\psi p_x}{D_{xy}} \frac{\pi^3}{a^3 b^3} \quad , \quad e_2 = \frac{\pi^6}{a^6 b^2} \left(\frac{2B_x}{D_{xy}} + \frac{2B_{xy}}{D_y} - \frac{2p_x}{D_{xy}} \frac{a^2}{\pi^2} \right) \quad , \\
e_1 &= -\frac{2\psi p_x}{D_y} \frac{\pi^5}{a^5 b} \quad , \quad e_0 = \frac{\pi^8}{a^8} \left(\frac{B_x}{D_y} - \frac{p_x}{D_y} \frac{a^2}{\pi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{a^4}{\pi^4} \right) .
\end{aligned} \tag{3.1-7}$$

Mit den acht aus dem Polynom ermittelten Nullstellen folgt dann für die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen auf Grund der Linearität durch Superposition:

$$\begin{aligned}
w(x,y) &= \sum_{k=1}^8 W_k^* e^{i\pi \frac{x}{a}} e^{i\lambda_k \frac{y}{b}} \quad , \\
F(x,y) &= \sum_{k=1}^8 F_k^* e^{i\pi \frac{x}{a}} e^{i\lambda_k \frac{y}{b}} \quad .
\end{aligned} \tag{3.1-8}$$

3.2 Erfüllung der Randbedingungen

Ob diese berechnete Lösung die Randbedingungen erfüllt, muß anschließend überprüft werden, doch vorher soll ausgehend vom Gleichungssystem 3.1-6 der Zusammenhang zwischen den Amplitudenwerten von W und F berechnet werden, da der Proportionalitätsfaktor für die Überprüfung der Randbedingungen bekannt sein muß. Dafür wird folgender Ansatz gemacht :

$$\begin{aligned}
F_k^* &= k_k W_k^* \quad , \quad W_k^* = 1 \quad , \quad k = 1, \dots, 8 \quad , \\
&= k_k \quad .
\end{aligned} \tag{3.2-1}$$

Im Hinblick darauf, daß die Aufgabe numerisch zu lösen ist, ist das ganze Verfahren so weit wie möglich analytisch aufzubereiten. Das bedeutet unter anderem, daß die Rechnungen für die im allgemeinen komplexen Zahlen so durchzuführen sind, daß man Real- und Imaginärteil

voneinander trennen und eine Programmierung in komplexen Zahlen weitestgehend vermeiden kann. Es wird also für alle komplexen Größen ein Ansatz gemacht, der wie folgt aussieht:

$$\text{Zahl} = r \text{Zahl} + i \cdot m \text{Zahl} \quad . \quad (3.2-2)$$

Die Präfixe r und m kennzeichnen Real- respektive Imaginärteil der Zahl.

Führt man jetzt für die Koeffizienten des Gleichungssystems 3.1-6 Abkürzungen ein und nutzt den Zusammenhang 3.2-1 aus, so ergibt sich eine Kurzform der Art:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_n & B \\ \hline C & D_n \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline k_n \end{array} \right] = \underline{0} \quad , \quad n = 1, \dots, 8 \quad , \quad (3.2-3)$$

wobei die Koeffizienten A und D der Matrix von λ_n abhängen, während die Koeffizienten B und C gleich und von λ_n unabhängig sind. Die Matrix ist singulär, da die λ_n gerade so bestimmt wurden, so daß man aus beiden Zeilen den Faktor k_n bestimmen kann. Es muß dasselbe Ergebnis herauskommen, da die Zeilen linear abhängig sind. Genauso gut kann man überprüfen, ob die Determinante tatsächlich null ist.

Der Faktor k wird im allgemeinen komplex sein, genau wie die Nullstelle λ , woraus folgt, daß auch A und D komplex sind, während $C = B$ reell bleiben, also ist nach Gl. 3.2-2 folgende Umschreibung vorzunehmen:

$$\left[\begin{array}{c|c} rA_n + i \cdot mA_n & B \\ \hline C & rD_n + i \cdot mD_n \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline rk_n + i \cdot mk_n \end{array} \right] = \underline{0} \quad . \quad (3.2-4)$$

Hieraus ergeben sich die Berechnungsvorschriften für Real- und Imaginärteil von k in Abhängigkeit der Matrixkoeffizienten in zwei Versionen (1. und 2. Zeile). Die Matrixkoeffizienten selbst sind dann noch im Anschluß in Abhängigkeit von λ nach Real- und Imaginärteil getrennt zu berechnen, so daß k wie folgt ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} 1) \quad rk_n + i \cdot mk_n &= -\frac{rA_n + i \cdot mA_n}{B} \quad , \\ \Rightarrow rk_n &= -\frac{rA_n}{B} \quad , \quad mk_n = -\frac{mA_n}{B} \\ 2) \quad rk_n + i \cdot mk_n &= -C \frac{1}{rD_n + i \cdot mD_n} \quad , \\ \Rightarrow rk_n &= -C \frac{rD_n}{(rD_n)^2 + (mD_n)^2} \quad , \quad mk_n = C \frac{mD_n}{(rD_n)^2 + (mD_n)^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

Die Berechnungsvorschriften für die Matrixkoeffizienten A_n , B, C, D_n ergeben sich mit dem Ansatz:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= r\lambda_n + i \cdot m\lambda_n, \text{ damit} \\ \lambda_n^2 &= r\lambda_n^2 - m\lambda_n^2 + i \cdot 2 r\lambda_n m\lambda_n\end{aligned}\quad (3.2-6)$$

nach Real- und Imaginärteil getrennt zu den Ausdrücken in der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned}rA_n &= -B_x \frac{\pi^4}{a^4} - 2 B_{xy} \frac{\pi^2}{a^2 b^2} (r\lambda_n^2 - m\lambda_n^2) - \frac{B_y}{b^4} (r\lambda_n^4 + m\lambda_n^4 - 6 r\lambda_n^2 m\lambda_n^2) \\ &\quad + p_x \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{2 \psi p_x \pi}{a b} r\lambda_n, \\ mA_n &= -4 B_{xy} \frac{\pi^2}{a^2 b^2} r\lambda_n m\lambda_n - 4 \frac{B_y}{b^4} r\lambda_n m\lambda_n (r\lambda_n^2 - m\lambda_n^2) + 2 \psi p_x \frac{\pi}{a b} m\lambda_n, \\ B &= C = \frac{1}{r} \frac{\pi^2}{a^2}, \\ rD_n &= \frac{1}{D_x b^4} (r\lambda_n^4 + m\lambda_n^4 - 6 r\lambda_n^2 m\lambda_n^2) + \frac{2}{D_{xy}} \frac{\pi^2}{a^2 b^2} (r\lambda_n^2 - m\lambda_n^2) + \frac{1}{D_y} \frac{\pi^4}{a^4}, \\ mD_n &= \frac{4}{D_x b^4} r\lambda_n m\lambda_n (r\lambda_n^2 - m\lambda_n^2) + \frac{4}{D_{xy}} \frac{\pi^2}{a^2 b^2} r\lambda_n m\lambda_n,\end{aligned}\quad (3.2-7)$$

$$\text{mit z.B. } r\lambda_n^4 = (r\lambda_n)^4, \text{ nicht } r\lambda_n^4 = r(\lambda_n^4) !$$

Mit diesen Auswertungen der Ansätze kann die Überprüfung der Erfüllung der Randbedingungen beginnen. Diese Überprüfung ist dadurch vorzunehmen, daß die vollständige Lösung 3.1-8 der Differentialgleichungen unter Ausnutzung von 3.2-1 mit den aus 3.2-5 berechneten Proportionalitätsfaktoren in die Gln. 2.6-1 bis 2.6-4 für die Randbedingungen eingesetzt und die Lösbarkeitsbedingung überprüft wird.

Die erste Randbedingung 2.6-1 liefert:

$$\begin{aligned}w(x, y = \pm \frac{b}{2}) &= \sum_{n=1}^8 W_n^* e^{i \pi \frac{x}{a}} e^{\pm i \lambda_n \frac{1}{2}} = 0, \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{\pm i \left(\frac{r\lambda_n + i \cdot m\lambda_n}{2} \right)} &= \sum_{n=1}^8 e^{\pm i \frac{r\lambda_n}{2}} e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} = 0, \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} \left(\cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm i \cdot \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) &= 0.\end{aligned}\quad (3.2-8)$$

Aus dieser Gleichung resultieren vier Gleichungen, denn sie wird in linken und rechten Rand (Vorzeichen) und Real- und Imaginärteil aufgetrennt, weil eine komplexe Zahl dann und nur dann Null ist, wenn sowohl Real- als auch Imaginärteil null sind:

$$\begin{aligned}
y = \frac{b}{2} : \quad & \sum_{n=1}^8 e^{-\frac{m\lambda_n}{2}} \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) = 0 \quad , \\
& \sum_{n=1}^8 e^{-\frac{m\lambda_n}{2}} \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) = 0 \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.2-9}$$

$$\begin{aligned}
y = -\frac{b}{2} : \quad & \sum_{n=1}^8 e^{\frac{m\lambda_n}{2}} \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) = 0 \quad , \\
& \sum_{n=1}^8 e^{\frac{m\lambda_n}{2}} \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Die zweite Randbedingung, Gl. 2.6-2, liefert auf ähnliche Art und Weise folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \pm \frac{C_R}{b B_y} \frac{\partial w}{\partial y} &= \sum_{n=1}^8 W_n^* \frac{1}{b^2} \left(-\lambda_n^2 e^{\pm i \frac{\lambda_n}{2}} \pm i \cdot \frac{C_R}{B_y} \lambda_n e^{\pm i \frac{\lambda_n}{2}} \right) e^{i \pi \frac{x}{a}} = 0 \quad , \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{\pm i \frac{r\lambda_n + i \cdot m\lambda_n}{2}} &\left(-(r\lambda_n + i \cdot m\lambda_n)^2 \pm i \cdot \frac{C_R}{B_y} (r\lambda_n + i \cdot m\lambda_n) \right) = 0 \quad , \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &\left(\cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm i \cdot \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \left(m\lambda_n^2 - r\lambda_n^2 \mp \frac{C_R}{B_y} m\lambda_n - i \cdot 2 r\lambda_n m\lambda_n \pm i \cdot \frac{C_R}{B_y} r\lambda_n \right) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.2-10}$$

Auf die Trennung von linken und rechten Rand wird im weiteren verzichtet, da eindeutig ist, daß bei zwei Vorzeichen das obere für $y = +b/2$ und das untere für $y = -b/2$ steht. Trennt man nach dem Ausmultiplizieren die Gl. 3.2-10 in Real- und Imaginärteil auf, so ergeben sich die vier Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &\left(\cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \left(m\lambda_n^2 - r\lambda_n^2 \mp \frac{C_R}{B_y} m\lambda_n \right) \pm \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \left(2 r\lambda_n m\lambda_n \mp \frac{C_R}{B_y} r\lambda_n \right) \right) = 0 \quad , \\
\sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &\left(\cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \left(-2 r\lambda_n m\lambda_n \pm \frac{C_R}{B_y} r\lambda_n \right) \pm \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \left(m\lambda_n^2 - r\lambda_n^2 \mp \frac{C_R}{B_y} m\lambda_n \right) \right) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.2-11}$$

Die dritte Randbedingung ist eine Krastrandbedingung, Gl. 2.6-3, die analog ausgewertet wird:

$$\begin{aligned}
n_y(x, y = \pm \frac{b}{2}) &= \sum_{n=1}^8 k_n^* \left(-\left(i \cdot \frac{\pi}{a} \right)^2 \right) e^{i \cdot \pi \frac{x}{a}} e^{\pm i \cdot \lambda_n \frac{1}{2}} = 0 \quad , \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^8 k_n^* e^{\pm i \cdot \lambda_n \frac{1}{2}} &= \sum_{n=1}^8 (rk_n + i \cdot mk_n) e^{\pm i \cdot \frac{r\lambda_n}{2}} e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} = 0 \quad , \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} (rk_n + i \cdot mk_n) &\left(\cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm i \cdot \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) = 0 \quad , \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &\left(rk_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \mp mk_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) + i \cdot \left(mk_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm rk_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \right) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.2-12}$$

Die Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt wiederum zwei Gleichungen für jeden Rand:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &\left(rk_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \mp mk_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) = 0 \quad , \\
\sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &\left(mk_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm rk_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.2-13}$$

Als letzte Randbedingung liefert Gl. 2.6-4 mit dem Ansatz 3.1-1:

$$\begin{aligned}
n_x(x, y = \pm \frac{b}{2}) &= p_x = \sum_{n=1}^8 k_n^* \frac{1}{b^2} (-\lambda_n^2) e^{\pm i \cdot \frac{\lambda_n}{2}} e^{i \cdot \pi \frac{x}{a}} + p_x \quad , \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &(rk_n + i \cdot mk_n) \left(-(r\lambda_n^2 - m\lambda_n^2 + 2 i r\lambda_n m\lambda_n) \right) \left(\cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm i \cdot \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.2-14}$$

Ausmultipliziert und nach Real- und Imaginärteil getrennt erhält man folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &\left((m\lambda_n^2 - r\lambda_n^2) \left(rk_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \mp mk_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 r\lambda_n m\lambda_n \left(mk_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm rk_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \right) = 0 \quad , \\
\sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} &\left(-2 r\lambda_n m\lambda_n \left(rk_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \mp mk_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + (m\lambda_n^2 - r\lambda_n^2) \left(mk_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm rk_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \right) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.2-15}$$

Mit den Gln. 3.2-9, 3.2-11, 3.2-13 und 3.2-15 stehen jetzt die benötigten 16 Gleichungen zur Verfügung. In allen Summanden der Gleichungen steht ein Faktor W_n^* , der im Ansatz 3.2-1 zu eins gesetzt wurde. Dieser Faktor kann herausgezogen werden, da es sich um ein lineares Gleichungssystem in W_n^* handelt, in dem die Amplituden selbst nicht bestimmt werden können, sondern nur ihr Verhältnis zu den Amplituden der Ansatzfunktionen für die Kräfte F_n^* , weshalb sie von vornherein zu eins gesetzt worden sind. Die Überprüfung, ob die Randbedingungen von den berechneten Nullstellen und den daraus resultierenden Proportionalitätsfaktoren erfüllt werden, kann also in Form einer Determinantenberechnung für jeden Rand geschehen.

Dazu werden die Summanden der Gleichungen, die zu einem Rand gehören, in einer Matrix zusammengefaßt. Diese Matrix stellt dann die Koeffizientenmatrix eines linearen, homogenen Gleichungssystems in W_n^* dar, deren Determinante verschwinden muß.

Damit ist die Verfahrensentwicklung für das erste Verfahren theoretisch abgeschlossen, denn es ergibt sich automatisch, daß für gegebene Steifigkeiten, Geometrie und Lastverhältnisse so lange über die unbekannte Last p_x und das unbekannte Beulfeldseitenverhältnis a/b zu variieren ist, bis eine minimale kritische Last p_{xk} aufgefunden ist. Dazu muß für jede neue Kombination aus Last und Beulfeldseitenverhältnis erneut die Bestimmung der Nullstellen und die anschließende Überprüfung der Randbedingungen erfolgen. Ist eine solche minimale Last, die die Randbedingungen und die Differentialgleichungen am leicht verformten Element erfüllt, gefunden, so ist die Beullast p_{xkrit} bestimmt, und das zugehörige Seitenverhältnis entspricht dem sich einstellenden Beulfeldseitenverhältnis. Die Amplituden können dann praktisch unendlich groß werden, das lineare, homogene Gleichungssystem bleibt lösbar, so lange die Verhältnisse zwischen den einzelnen W_n^* und den F_n^* erhalten bleiben. Dies liefert auch die Begründung dafür, daß die Berechnung nur die Stabilitätsgrenze, d.h. den Beulbeginn, und nur die Beulform, nicht aber die Beulamplitude liefert.

Für die Berechnung der tatsächlichen Beulamplituden wären große Verformungen anzunehmen, was zur nichtlinearen Theorie führt. Für das Nachbeulverhalten kann das von Interesse sein, doch meistens reicht eine Abschätzung der Stabilitätsgrenze aus, da Instabilität eben nicht zugelassen wird.

3.3 Das zweite Verfahren

Eine andere Möglichkeit, das Problem zu lösen, besteht darin, alles in Verschiebungen zu formulieren und auf die Einführung der Spannungsfunktion zu verzichten. Dadurch wird eine Unbekannte weniger eingeführt (F), weswegen die Kompatibilitätsbedingung als zusätzlicher

Zusammenhang nicht mehr benötigt wird. Dieser direkte Lösungsweg scheint in der Hinsicht einfacher zu sein, daß er eine Unbekannte und damit eine Gleichung weniger enthält, jedoch geht der Vorteil verloren, den man beim Lösen ebener Verzerrungs- oder Spannungszustände mit der Einführung der Airyschen Spannungsfunktion und der Ausnutzung der Kompatibilität erhält, nämlich die Möglichkeit, zwei Unbekannte durch Einführung einer neuen zu eliminieren (hier u und v durch Einführung von F).

Ausgehend von den Zusammenhängen aus Kap.2 wird nun ohne Ausnutzung der Kompatibilität alles in den Verschiebungen u , v , und w formuliert, wobei die dritte Randbedingung 2.6-3 so umzuformulieren ist, daß am Rand keine zusätzliche Verschiebung u beim Beulen auftreten darf. Dies geschieht, indem man u am Rand zu Null setzt, und man hat damit die gleiche Randbedingung in Verschiebungen formuliert [11].

Da das Problem jetzt mit drei Unbekannten beschrieben wird, sind auch drei Differentialgleichungen zur Lösung notwendig. Dies sind die Gleichgewichtsbedingungen 2.2-1, a,b und e, wobei aus 2.2-1, e wieder die Querkräfte mittels 2.2-1, c und d zu eliminieren sind. Desweiteren fließt in die dritte Differentialgleichung die Annahme ein, daß $n_x = p_x$ und $n_{xy} = p_{xy}$ konstant sind. Werden dann Materialgesetz, Gl. 2.3-1, und Verschiebungs-Verzerrungs- Relationen, Gln. 2.4-1, a-f, so ausgenutzt, daß nur die Verschiebungen als Unbekannte verbleiben, so erhält man folgendes homogene, lineare und gekoppelte System von drei partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{33}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\
 C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\
 C_{44} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2C_{45} + 4C_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C_{55} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} p_{xy} \\
 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} p_x + C_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{22} \frac{1}{r^2} w &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.3-1}$$

Es werden folgende Ansätze gemacht, wobei die Periodizität genau wie vorher beibehalten wird:

$$\begin{aligned}
 u(x,y) &= u^* e^{i\pi \frac{x}{a}} e^{i\lambda \frac{y}{b}} \equiv u^* E(x,y), \\
 v(x,y) &= v^* e^{i\pi \frac{x}{a}} e^{i\lambda \frac{y}{b}} \equiv v^* E(x,y) \quad \text{und} \\
 w(x,y) &= w^* e^{i\pi \frac{x}{a}} e^{i\lambda \frac{y}{b}} \equiv w^* E(x,y).
 \end{aligned} \tag{3.3-2}$$

Setzt man diese Ansätze in 3.3-1 ein und berechnet die Determinante der Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems analog zu 3.1-6, so erhält man ein Polynom, das dem zuvor berechneten aus Gl. 3.1-8 entspricht. Die Koeffizienten unterscheiden sich lediglich um den Faktor $C_{33}(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)$. Mit den Gleichungen aus Kap.2.3 können die Koeffizienten dann umgerechnet werden. Die Matrix ist:

$$\begin{bmatrix} -C_{11}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - C_{33}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^2 & -(C_{12} + C_{33})\frac{\pi \lambda}{a b} & i \cdot C_{12} \frac{1}{r} \frac{\pi}{a} \\ \text{symm.} & -C_{22}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^2 - C_{33}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 & i \cdot C_{22} \frac{1}{r} \frac{\lambda}{b} \\ \text{symm.} & \text{symm.} & C_{44}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 + (2C_{45} + 4C_{66})\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\lambda}{b}\right)^2 \\ & & + C_{55}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^4 - 2p_{xy} \frac{\pi \lambda}{a b} - p_x \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + C_{22} \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \quad (3.3-3)$$

Mit Proportionalitätsfaktoren wird dann analog zu 3.2-1 bis 3.2-4 fortgefahren. Wählt man also zum Beispiel

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^8 w_n^* E(x, y) = 1 \quad , \\ u(x, y) &= \sum_{n=1}^8 k u_n w_n^* E(x, y) \quad , \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^8 k v_n w_n^* E(x, y) \quad , \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

setzt also alle w_n^* zu eins und führt Abkürzungen für die Matrixelemente ein, so erhält man:

$$\begin{bmatrix} K_{11_n} & K_{12_n} & K_{13_n} \\ K_{21_n} & K_{22_n} & K_{23_n} \\ K_{31_n} & K_{32_n} & K_{33_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k u_n \\ k v_n \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad . \quad (3.3-5)$$

Mit diesen drei linear abhängigen Gleichungen können nun die Proportionalitätsfaktoren $k u$ und $k v$ für $n = 1$ bis 8 bestimmt werden, wobei wiederum eine Trennung in Real- und Imaginärteil vorzunehmen ist, um eine genauere Berechnung zu ermöglichen. Auf eine Angabe der einzelnen Faktoren wird verzichtet, da in deren Berechnung prinzipiell kein Unterschied zum ersten Verfahren besteht.

Es soll aber darauf hingewiesen werden, daß sich die tatsächliche numerische Auswertung hierbei allerdings komplizierter gestaltet als vorher. Dies liegt daran, daß es jetzt drei linear abhängige Gleichungen zur Bestimmung von zwei Proportionalitätsfaktoren gibt. Es ist also

vor der Auswertung notwendig zu bestimmen, welche der drei Zeilen der Matrix die wesentlichen, also die rangbestimmenden sind. Die weitere Zeile kann dann nur Kontrollzwecken dienen, denn sie muß identisch von den zwei bestimmten Werten und der eins erfüllt werden. So einfach das theoretisch ist, so kompliziert gestaltet sich diese Beurteilung bei der numerischen Berechnung, wenn Rundungsfehler und Ungenauigkeiten bei der Nullstellenbestimmung einen solchen Einfluß gewinnen, daß Fehler und tatsächliche Reste in der gleichen Größenordnung liegen.

Es wäre von Vorteil gewesen, wenn man schon an Hand der Matrix 3.3-3 sagen könnte, welche Zeilen in Abhängigkeit der Nullstellen λ linear abhängig werden können, doch dies ist nicht möglich, und wie die numerische Auswertung zeigt, scheint das auch nicht eindeutig zu sein. Eine sichere Aussage ist allerdings nicht möglich, da numerische Ungenauigkeiten dies nicht erkennen lassen.

Mit den so berechneten Proportionalitätsfaktoren und den bestimmten Nullstellen werden dann mit den Ansätzen wieder die Randbedingungen überprüft. Die ersten beiden Randbedingungen sind vorher schon in Verschiebungen, also in w , formuliert worden und können somit analog übernommen werden. Das sind die Gln. 3.2-9 und 3.2-11. Die Randbedingung $u = 0$ nimmt jetzt folgende Form an:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} \left(rku_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \mp mku_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) &= 0 \quad , \\ \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} \left(mku_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm rku_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.3-6)$$

Sie entspricht Gl. 3.2-15, wobei dieselbe Reihenfolge für rechten und linken Rand und Real- und Imaginärteil gewählt ist. Die Randbedingung $n_y = 0$, Gl. 3.2-13, wird zu:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} \left\{ C_{12} \frac{\pi}{a} \left(\mp rku_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) - mku_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \right. \\ + C_{22} \frac{1}{b} \left(\mp rk v_n r \lambda_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) - rk v_n m \lambda_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) - mk v_n r \lambda_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \pm mk v_n m \lambda_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \\ \left. + C_{22} \frac{1}{r} \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right\} = 0 \quad , \\ \sum_{n=1}^8 e^{\mp \frac{m\lambda_n}{2}} \left\{ C_{12} \frac{\pi}{a} \left(rku_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \mp mku_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \right. \\ + C_{22} \frac{1}{b} \left(rk v_n r \lambda_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \mp rk v_n m \lambda_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \mp mk v_n r \lambda_n \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) - mk v_n m \lambda_n \cos\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right) \\ \left. + C_{22} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (3.3-7)$$

Mit den Gln. 3.2-9, 3.2-11, 3.3-6 und 3.3-7 stehen wieder die benötigten 16 Zeilen zur Verfügung. Das Verfahren läuft im weiteren wie das erste.

3.4 Zusammenfassung und numerische Umsetzung

Der erste Schritt bei der Bestimmung des Beulwertes ist die Berechnung der acht Nullstellen des Polynom achten Grades in λ , welches sich aus der Bedingung ergibt, daß der gewählte Ansatz die Differentialgleichungen erfüllen muß, die das Modell der Scheibe beschreiben. Es handelt sich dabei um ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, woraus sich die Bedingung ergibt, daß die Determinante der Koeffizientenmatrix nach Auswertung der Ansätze Null sein muß.

Mit den so berechneten Nullstellen ist dann zu überprüfen, ob der Ansatz die Randbedingungen erfüllt, was mit acht Nullstellen und acht Gleichungen, bei Auftrennung in Real- und Imaginärteil der doppelten Anzahl, wiederum auf ein lineares, homogenes Gleichungssystem führt, dessen Koeffizientenmatrix eine verschwindende Determinante haben muß.

Sind beide Determinanten Null, so besteht die Möglichkeit, daß es sich für die gewählte Wertekombination um einen Beulwert handelt. Zu ihm gehört aber ein bestimmtes Seitenverhältnis, so daß nicht nur über die Last p_x zu iterieren ist, sondern übergeordnet auch über das Seitenverhältnis a/b , um den minimalen Beulwert zu erhalten. Als Minimalforderung ist also für beliebige Seitenverhältnisse über p_x zu iterieren und ein Minimum in p_x bezüglich a/b aufzusuchen. Jeder Iterationsschritt beinhaltet also komplett die oben beschriebenen Schritte.

Die so bestimmte Beullast gilt dann nur für die vorgegebenen Parameter, die sich aus Schalensteifigkeiten, Lastverhältnis Schub zu Druck und Randeinspannungsfedersteifigkeit zusammensetzen. Diese Parameter sind dann übergeordnet zu variieren.

Numerisch umgesetzt wird das Verfahren mittels eines Programmes in FORTRAN 77. Die Nullstellenberechnung wird mittels eines Algorithmus aus [8] durchgeführt, während die Bestimmung der Determinante auf die öffentliche Programmbibliothek SCILIB (SCientific LIBrary) zurückgreift, die von der ZRZ an der TU Berlin zur Verfügung gestellt wird. In dieser Bibliothek sind Algorithmen zur Operation mit Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssystemen zu finden. Sie sind sehr umfangreich und unterliegen auf Grund der öffentlichen Zugänglichkeit einer ständigen Kontrolle. Tests ergeben eine große Zuverlässigkeit, und die Bestimmung der Nullstellen der Determinante sind auch solange unproblematisch, wie die eingegebenen Matrizen nicht so schlecht konditioniert sind, daß sie

numerisch singular werden. Speziell wird die routine MINV aus der Bibliothek VEKMAT.f und die zugehörigen subroutines daraus und aus LINPACK.f. Diese routine kann lineare Gleichungssysteme lösen, Matrizen invertieren und faktorisieren und deren Determinante bestimmen. Mit dieser routine erfolgt auch zu Kontrollzwecken eine Lösung des Gleichungssystems zur Bestimmung der Proportionalitätsfaktoren, welche aber genauer aus einer halbanalytischen Bestimmung durch Umformung und Auftrennung der zwei oder drei Gleichungen (je nach Verfahren) gewonnen werden.

Die Bestimmung der Nullstellen mittels des Algorithmus BAUNULL aus [8] hingegen scheint den Anforderungen nicht gewachsen, wie sich im Verlauf der Rechnungen herausstellt. Dies ergibt sich bei der Berechnung der Proportionalitätsfaktoren nach Gln. 3.2-5 oder 3.3-5, denn besonders bei den letzten Nullstellen, die das Programm liefert, ergibt die Kontrolle mit der entsprechenden Matrix häufig Reste, die nicht mehr als numerisch Null interpretiert werden können. Trotzdem muß in Ermangelung besserer Werte mit diesen weiter gearbeitet werden. Und es ergeben sich richtige Endergebnisse, doch der Einfluß dieser Ungenauigkeit auf die anderen falschen Endergebnisse ist nur schwer abzuschätzen.

Daß die letzten Nullstellen an Qualität verlieren liegt am verwendeten Verfahren von Bauhuber, [8]. Die Nullstellen werden mit Newton iteriert und anschließend einer zweidimensionalen Spiralisierung in der komplexen Zahlenebene unterworfen (der Betrag einer Schranke ist ein Kreis). Mit einer gefundenen Nullstelle wird das Deflationspolynom (analytisch durch Polynomdivision, numerisch) mittels des Horner-Schemas berechnet, wobei ein möglicher Rest vernachlässigt wird. Auf dieselbe Art wird eine weitere Nullstelle des um einen Grad niedrigeren Polynomes bestimmt. Daß dabei die Qualität der Nullstellen abnimmt, ist offensichtlich.

Ein Rückgriff auf kommerzielle Programmbibliotheken mit eventuell besseren Nullstellenbestimmungen ist nicht in Frage gekommen und andere einbindbare Algorithmen stehen nicht zur Verfügung. Es sei also hier schon auf diesen Schwachpunkt hingewiesen, der im fünften Kapitel nochmals diskutiert wird. Hieraus ergibt sich auch eine deutliche Verbesserungsmöglichkeit, die sich jedoch sehr aufwendig gestalten kann.

Das Auffinden eines Beulwertes findet konkret so statt, daß mit variabler Schrittweite über p_x iteriert wird. Dabei paßt sich die Schrittweite adaptiv dem Verlauf, wie er im vierten Kapitel beschrieben wird, an, indem auf Tendenzen (steigend, fallend, wieder steigend) im Verlauf und über Vergleiche vorheriger Werte genaue Anpassungen stattfinden, so daß die Schrittweite dann verfeinert wird, wenn große Änderungen stattfinden. Hierbei wird auch von Rücksprüngen Gebrauch gemacht. Mit dem Verfahren wird so kein relatives Minimum übergangen.

4 Numerische Auswertung

In diesem Kapitel werden Ergebnisse der numerischen Auswertung vorgestellt, wobei teilweise vergleichend auch bekannte analytische und halbanalytische Lösungen einbezogen sind. Da bei der numerischen Auswertung viele Probleme entstanden sind, werden diese bei dem jeweiligen Fall, bei dem das Problem das erste mal auftritt, erwähnt und genauer erläutert. Die Bezeichnungen richten sich nach Wiedemann [1], sofern nichts anderes erklärt wird. Die Erläuterungen werden nach den Verfahren getrennt.

4.1 Erstes Verfahren

4.1.1 Die isotrope, ebene und gelenkig gelagerte Schale

Anfangen wird mit dem einfachsten Fall der isotropen, ebenen und allseitig gelenkig gelagerten Schale, deren Druckbeulwert analytisch bestimmbar ist. Nach [1] gilt für ein Seitenverhältnis von eins

$$k = \frac{p_{\text{skr}} b^2}{\pi^2 \sqrt{B_x B_y}} = 4 . \quad (4.1-1)$$

Die Parameter dieser Rechnung sind im weiteren Einspannfedersteifigkeit $C_R=0$ und $\text{Schub}/\text{Druck} = \Psi=0$. Durch die Vorgabe eines großen Radius ist eine ebene Platte erreicht, deren Krümmungsmaß wie folgt bestimmt werden kann [1, S.54]:

$$\Omega = \frac{b^4}{r^2} \sqrt{\frac{D_x D_y}{B_x B_y}} . \quad (4.1-2)$$

Zur Unterscheidung sei noch auf das Auftragungskrümmungsmaß Ω^* hingewiesen, das in den Diagrammen bei der Krümmungsvariation verwendet wird, um einen linearen Verlauf bei stärkerer Krümmung zu erhalten, [1]:

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{\Omega}{1+\zeta}} , \text{ mit } \zeta = \frac{\sqrt{D_x D_y}}{D_{xy}} , \quad (4.1-3)$$

wobei die Scherzahl ζ eins bleibt, weil die Scheibensteifigkeiten isotrop gehalten werden. Bei der Orthotropie wird also eine Beschränkung auf eine Variation der Kreuzzahl η vorgenommen. Das Trägheitsradienverhältnis ε und die Scherzahl ζ , deren Definitionen [1] zu entnehmen sind, werden konstant eins gehalten. Unter anderem liegt das an den entstandenen Zeitproblemen. Eine Untersuchung wäre aber angebracht, da auch diese Parameter eine Auswirkung haben.

Bei diesem vermeintlich einfachsten Fall ist anfangs kein sinnvolles Ergebnis zu erzeugen, d.h. konkret, daß der Verlauf der Determinante bei Variation von p_x kein Minimum auffinden läßt und sehr sprunghaft ist. Nach Elimination programmiertechnischer Fehler tritt keine Verbesserung ein, so daß numerische Probleme vermutet werden, was sich bestätigen läßt. Der programmierte Algorithmus ist tatsächlich nicht in der Lage, den oben angegebenen Grenzfall so zu rechnen, denn ein Lastverhältnis von Null und ein sehr großer Radius verursachen numerisch stets singuläre Matrizen, was mit dem Charakter des Polynomes in λ zusammenhängt. Dessen Koeffizienten, Gl. 3.1-7, mit dem Faktor Ψ verschwinden in diesem Fall und das Polynom hat nur noch gerade Potenzen. In diesem Fall ergibt sich eine schwach besetzte Matrix, die nach [6] zerlegbar ist. Wird diese Zerlegung nicht vorgenommen, so bereitet die numerische Auswertung oben angesprochene Probleme. Aus denselben Gründen darf auch der Radius nicht beliebig groß vorgegeben werden.

Praktisch muß der ebene Fall durch einen Krümmungsparameter von mindestens 10^{-2} und der reine Druck durch ein Lastverhältnis von mindestens 10^{-5} beschrieben werden, um auswertbare Kurven zu erhalten. Da diese Werte den Fall aber sehr genau wiedergeben, ist [1] zu entnehmen. In den folgenden zwei Abbildungen soll das Verhalten des Verlaufes der Determinante bei einer Variation über p_x bei verschiedenem Ψ beschrieben werden. Dargestellt ist jeweils der natürliche Logarithmus des Betrages beider Determinanten.

Allen Rechnungen zu diesem Fall liegt eine Schale mit einer analytischen Beullast von $2602,97 \text{ N/mm}$ zugrunde. Diese Beullast wird bei einem Lastverhältnis von 0,1 nicht erreicht, da der Einfluß des Schubes nicht zu vernachlässigen ist. Bei einem Lastverhältnis von 10^{-5} liegt man mit mehr als zwei Nachkommastellen genau auf der analytischen Beullast des reinen Drucks. Diese Genauigkeit ist ausreichend und in Abb. 4.1 ist das ausgeprägte Minimum der Determinante an der Stelle der Beullast zu erkennen.

Bei einem noch kleineren Lastverhältnis von 10^{-9} ist die Charakteristik des Verlaufes anders. Das Minimum ist nicht mehr so ausgeprägt und liegt nicht mehr beim richtigen Wert. Außerdem ist der Verlauf sehr unsauber, so daß numerische Probleme das Programm in diesem Bereich unbrauchbar werden lassen, Abb. 4.2. Es ist zu beachten, daß es sich dabei immer um den Verlauf zweier Determinanten handelt, deren Minima im sauberen Bereich an derselben Stelle liegen, so daß numerische Schwankungen hier auszuschließen sind. Die Werte sind zwar falsch, aber stabil !

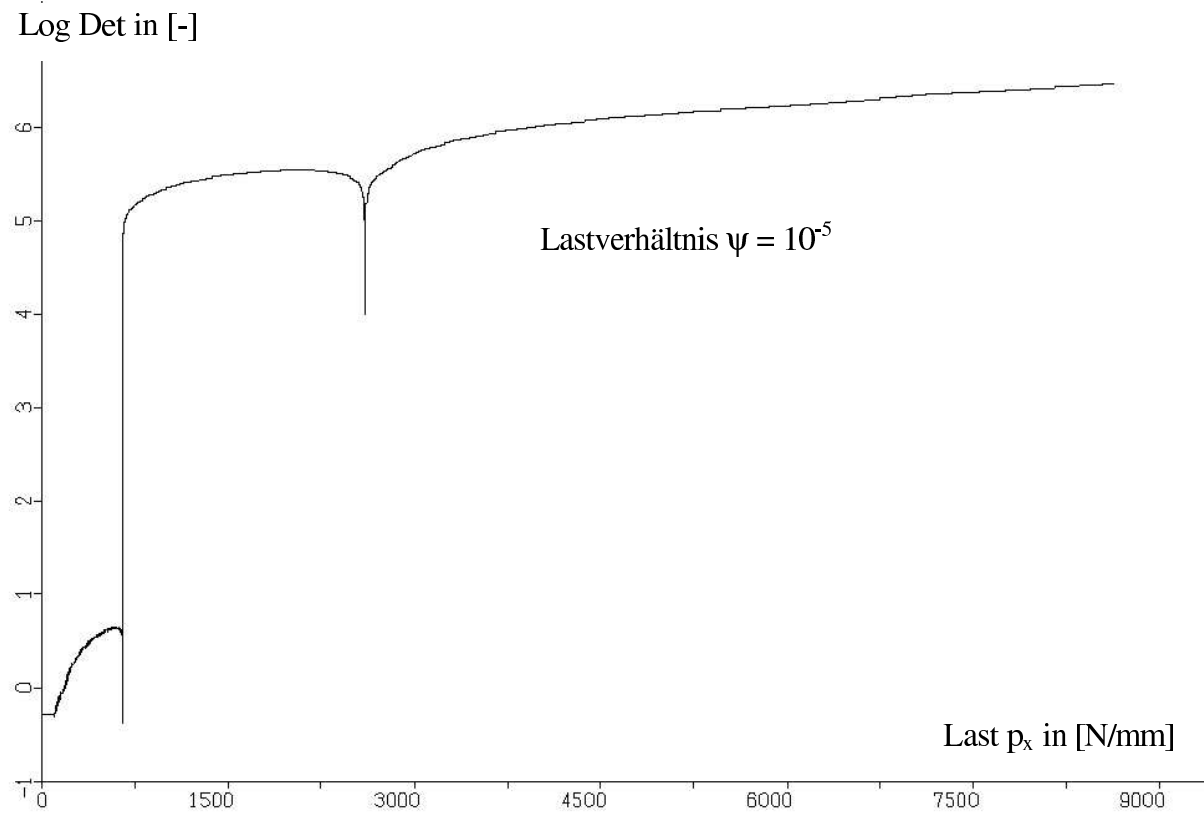


Abb. 4.1: Determinante über der Last p_x

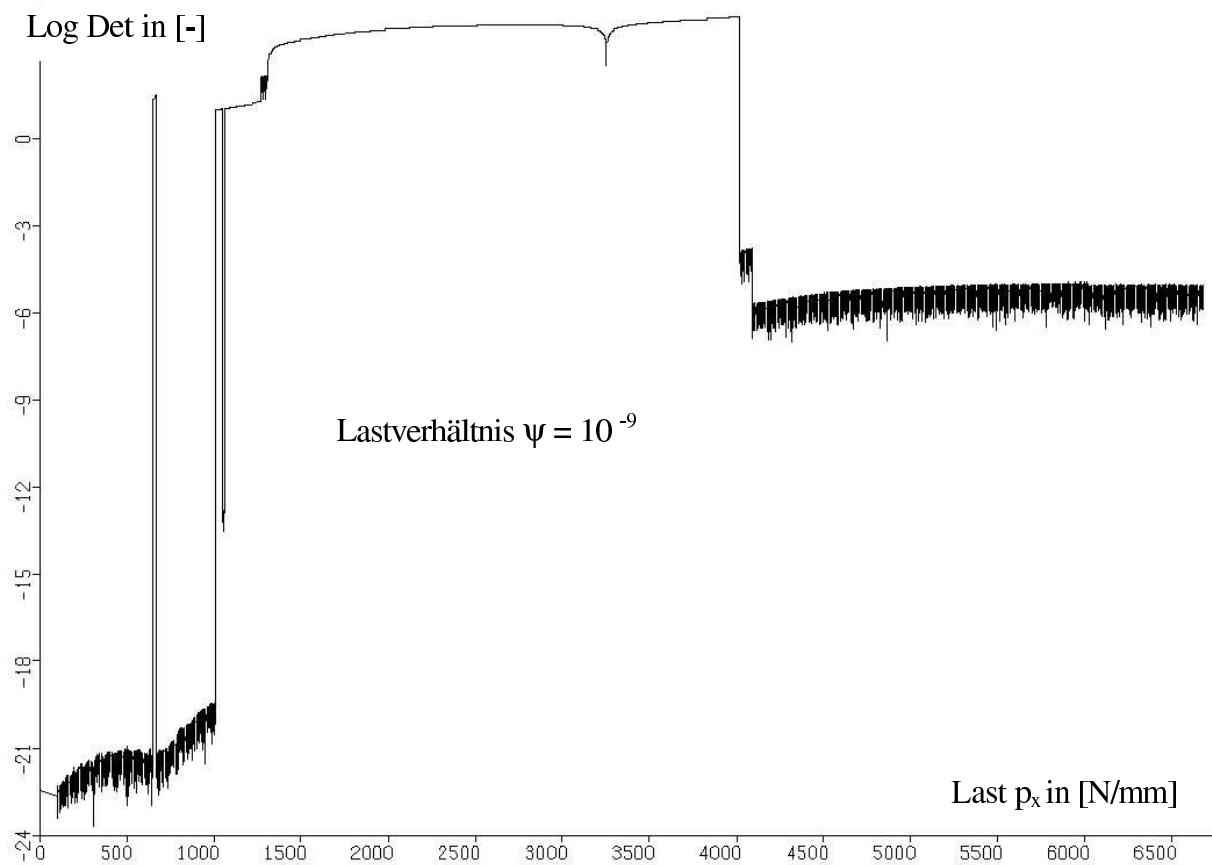


Abb. 4.2: Determinante über der Last p_x

Das Programm liefert für diese Schale auch das richtige Seitenverhältnis, wenn man von bekannten Werten ausgeht, denn wie der Abb. 4.1 zu entnehmen ist, liefert es zusätzlich andere Minima, die bei einer automatisierten Iteration auszuschließen sind. Da die Charakteristik der Minima und ihre Reihenfolge bei Variation des Seitenverhältnisses a/b aber erhalten bleibt, was bei anderen Parametern nicht so sein muß, ist das Auffinden des richtigen Minimums unproblematisch. Abb. 4.3 zeigt die Last über einem Seitenverhältnis von 0,1 bis 1,5, und es ist gut zu erkennen, daß ein Seitenverhältnis von 0,1 kein Problem darstellt, selbst wenn die Beullast dann fast 70000 N/mm erreicht.

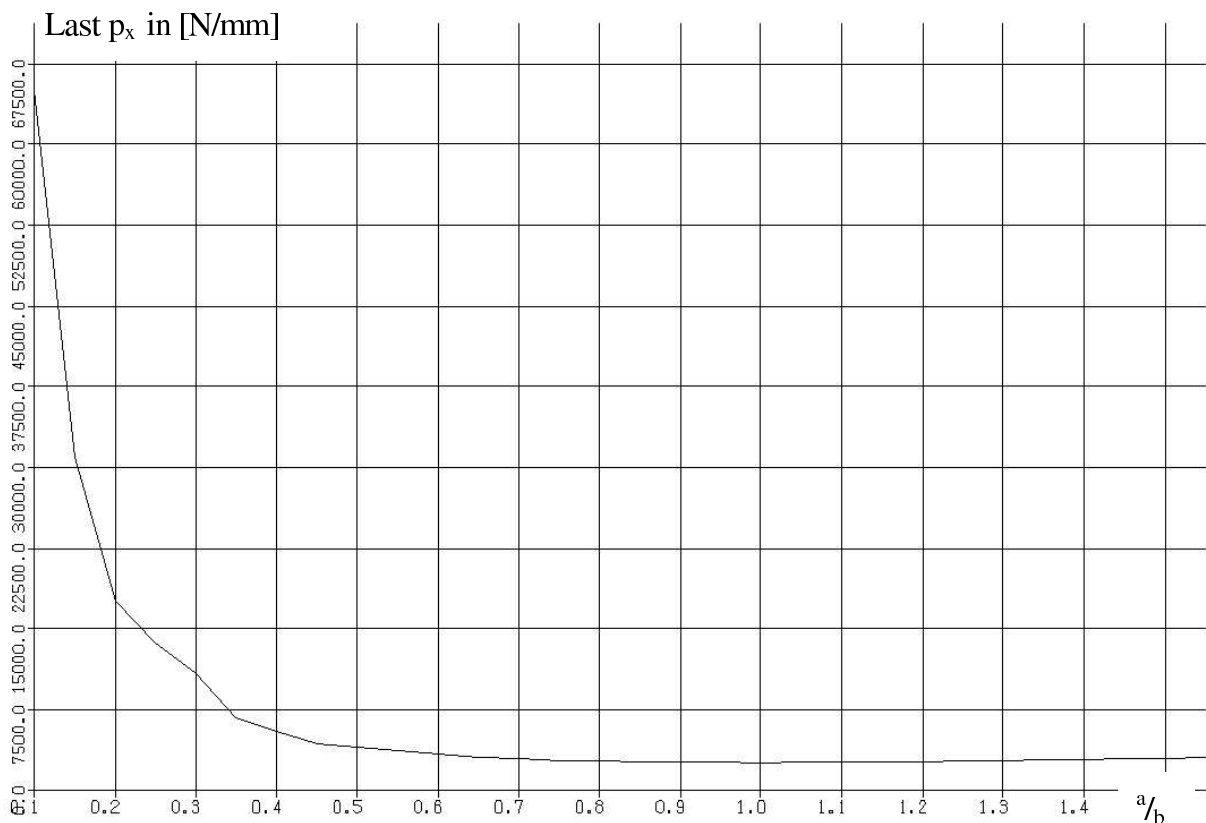


Abb. 4.3: Drucklast p_x über dem Beulfeldseitenverhältnis a/b

In Abb. 4.1 tritt vor dem Minimum, das der gesuchten Lösung entspricht, noch ein weiteres Minimum bei ungefähr 650 N/mm auf. Dieser Wert beruht auf der Charakteristik des Verlaufes der Nullstellen, was bereits von Schmalstieg [10] angeführt und mit einem Wechsel der Dominanz von Real- und Imaginärteil begründet wird. In den folgenden Abbildungen soll darauf genauer eingegangen werden, unter anderem wird dabei ein Kriterium gesucht, um bei einer automatisierten Variation einen solchen Wert ausschließen zu können, da ein solches trichterförmiges Minimum sonst fehlerhaft ebenfalls als Beulwert gefunden werden kann. Bei Einzelwertüberprüfungen ist dies natürlich unproblematisch, da aber schon in [10] darauf hingewiesen wird, daß sich dieser Wert z.B. bei Krümmungsvariation anders verhält als die gesuchte Lösung, kann die Reihenfolge für eine Automation kein hinreichendes Kriterium für einen Beulwert sein.

In den Abb. 4.4 bis 4.7 sind die Verläufe der Real- und Imaginärteile der ersten, dritten, fünften und siebten Nullstelle über der Last dargestellt, wobei wiederum dieselbe Schale zugrundeliegt. Die Bilder sind einer Variation von p_x entnommen, wobei die Schrittweiten automatisch angepaßt werden. Das bedeutet, sobald ein Trichter der Form wie in Abb. 4.1 aufgefunden ist, wird die Schrittweite von 10^4 N/mm adaptiv bis 10^{-8} N/mm verringert, um das Minimum möglichst genau zu bestimmen. Dadurch entstehen die zu erkennenden Häufungspunkte bei 650 N/mm und 2603 N/mm .

Es werden nicht alle acht Nullstellen dargestellt, da in dem Fall des quasi-reinen Drucks die Nullstellen noch eine gewisse Ähnlichkeit aufweisen, die bei reinem Druck dazu führen, daß die Nullstellen paarweise im Betrag gleiche Real- und Imaginärteile haben, sich aber in den jeweiligen Vorzeichen unterscheiden [10]. Das resultiert aus den Koeffizienten des Polynomes und ändert sich bei Hinzunahme von Schub, siehe Gl. 3.1-7.

Abb. 4.4 repräsentiert das Verhalten der ersten beiden Nullstellen. Es ist zu erkennen, daß beim ersten Minimum der Determinante bei $p_x = 650 \text{ N/mm}$ beide Anteile zu Null werden. Zwischen 1000 N/mm und 2000 N/mm tritt dann ein Vorzeichenwechsel beim Imaginärteil auf, was einen weiteren Nulldurchgang bedeutet. Beim gesuchten Minimum, dem eigentlichen Beulwert, tritt kein veränderter Verlauf der Nullstellen auf. Dies deutet darauf hin, daß das erste Minimum tatsächlich vom Verhalten der Nullstellen verursacht wird. Bei der dritten Nullstelle, Abb. 4.5, tritt dieser Nulldurchgang direkt bei dem ersten Minimum auf, ansonsten entsprechen die Verläufe einander.

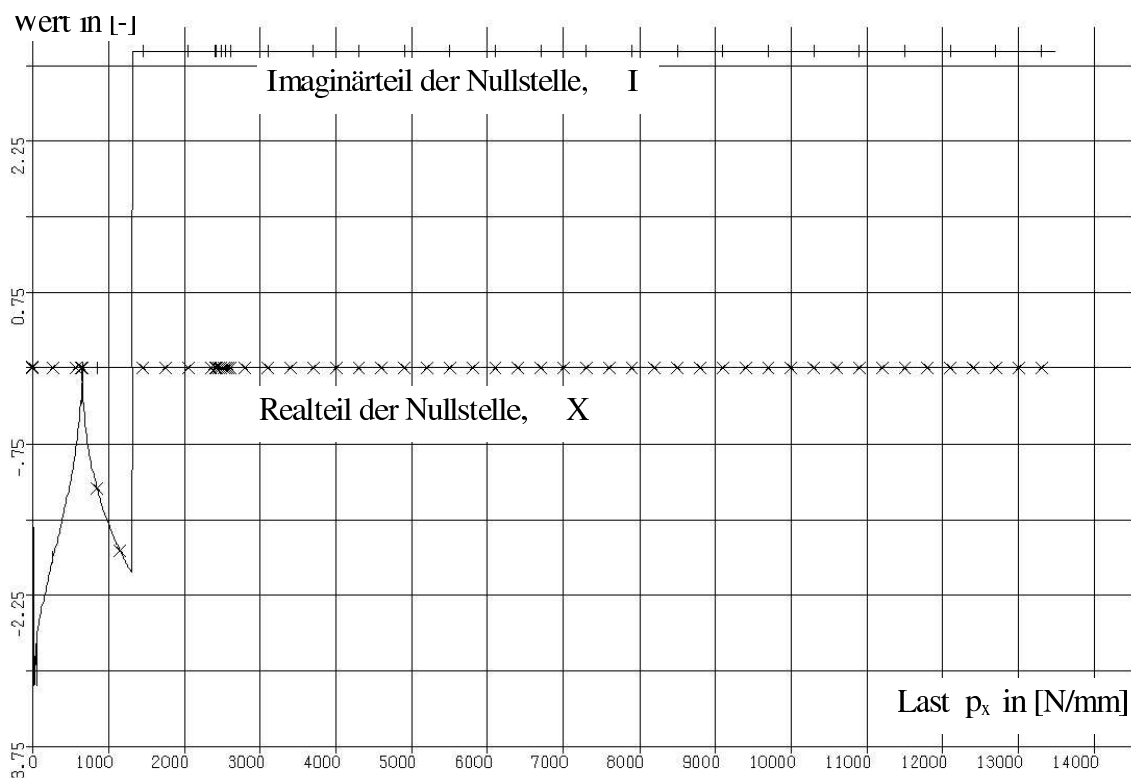


Abb. 4.4: Anteile der ersten Nullstelle über der Last p_x

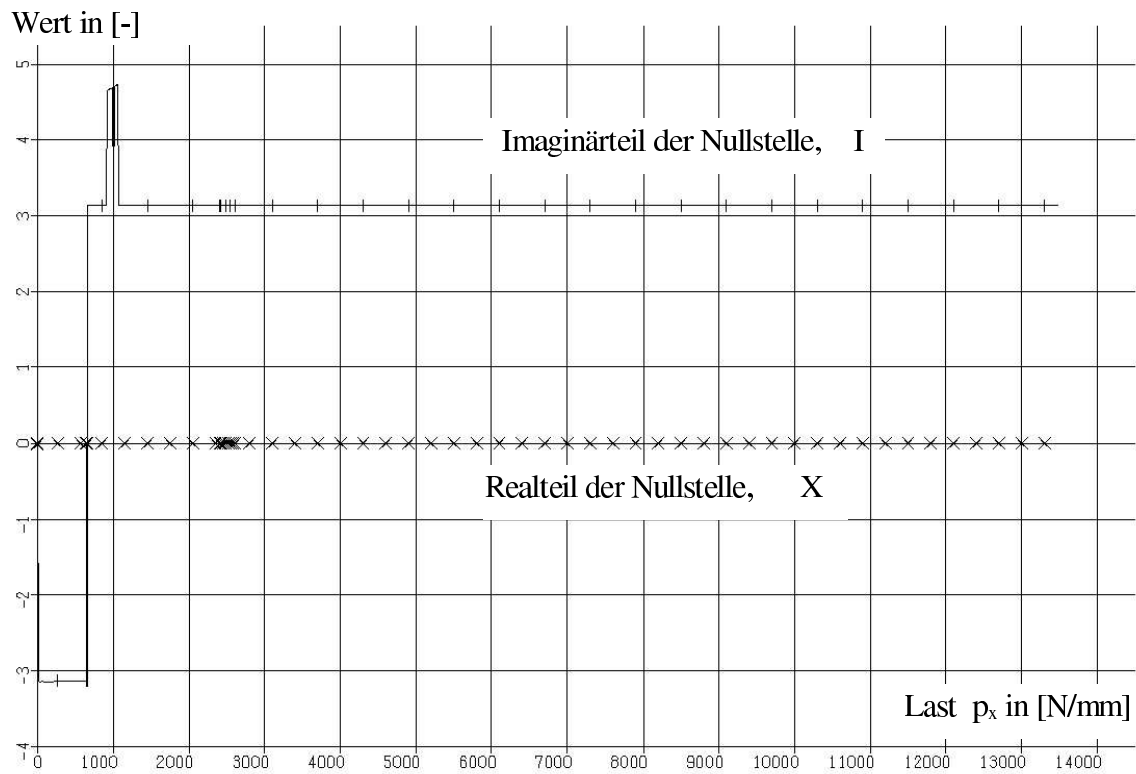


Abb. 4.5: Anteile der dritten Nullstelle über der Last p_x

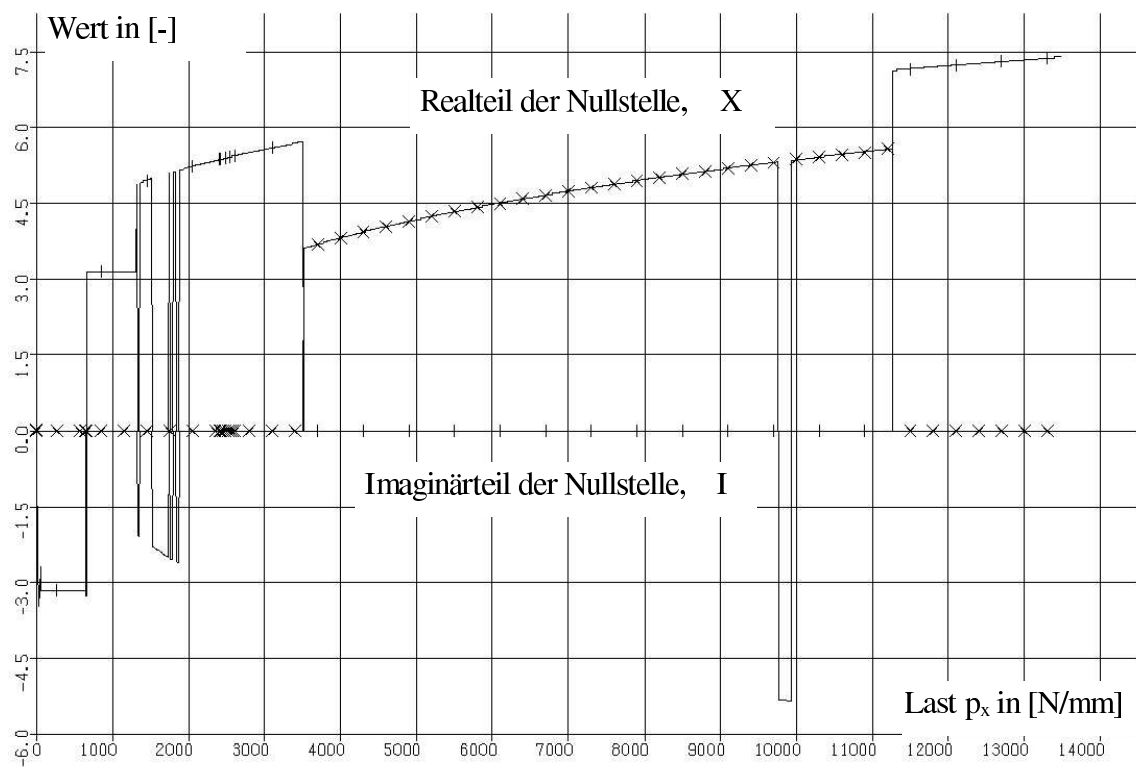


Abb. 4.6: Anteile der fünften Nullstelle über der Last p_x

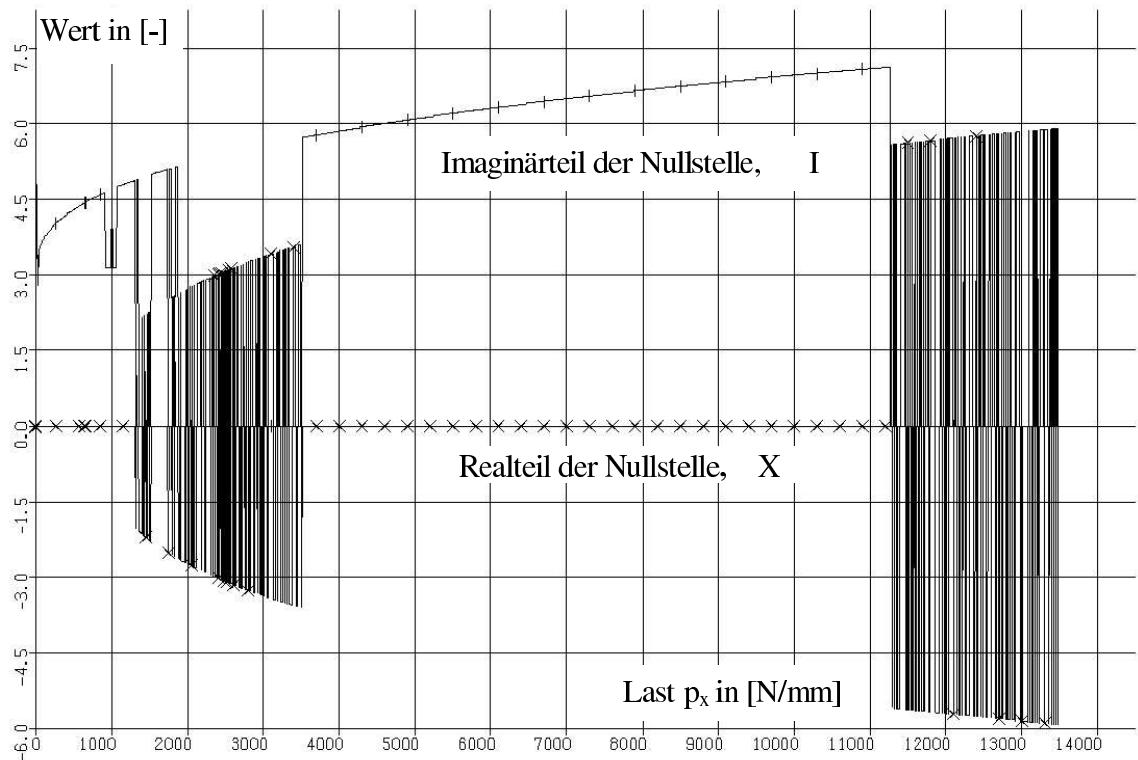


Abb. 4.7: Anteile der siebten Nullstelle über der Last p_x

Der Verlauf der fünften und siebten Nullstelle dagegen, Abb. 4.6 und 4.7, weist eine ganz andere Charakteristik auf, und es wird deutlich, daß keine Möglichkeit besteht, das erste Minimum auf Grund dieser Verläufe der Nullstellen zu identifizieren und somit eventuell auszuschließen. Außerdem sind besonders bei dem letzten Bild numerische Instabilitäten bei der Bestimmung des Vorzeichens der Anteile zu erkennen. Dies deutet auf eine schlechtere Qualität der bestimmten Werte hin, was auf Grund des programmierten Verfahrens vermutet und bei Kontrollen der damit bestimmten Proportionalitätsfaktoren bestätigt wird. Es fällt weiter auf, daß Abb. 4.7 und 4.6 zum Teil komplementäre Verläufe darstellen, die Reihenfolge der bestimmten Nullstellen wechselt also und die Verläufe sind zumindest vom Betrag her stetig. Dies spricht allerdings eher gegen eine schlechtere Qualität der Nullstellen.

4.1.2 Variation der Einspannung

Ob die automatische Variation der Einspannung, also von C_R , möglich ist und zu welchen Ergebnissen sie führt, wird ebenfalls am einfachsten Fall der isotropen und ebenen Schale überprüft, da deren Grenzwerte bekannt sind. Die Ergebnisse für den Beulwert k und das Seitenverhältnis a/b werden in der Abb. 4.8 dargestellt.

Im ersten Versuch wird so programmiert, wie die Gleichungen angegeben sind. Die Werte laufen mit steigendem C_R über die bekannten Werte der festen Einspannung hinaus und sind

somit falsch. Ab $C_R = 25 \text{ Nm}$ ist kein Wert mehr zu finden, da dort unerklärliche numerische Instabilitäten auftreten. Da keine diesem Problem zugrundeliegenden Fehler im Programm zu finden sind, wird die Zeile der Matrix mit C_R , Gln. 3.2-10, so umgeschrieben, daß C_R unter dem Bruchstrich steht. Damit können wesentlich größere Werte stabiler gerechnet werden und es tritt Konvergenz ein, aber wie Abb. 4.8 zu entnehmen ist, die Werte sind falsch.

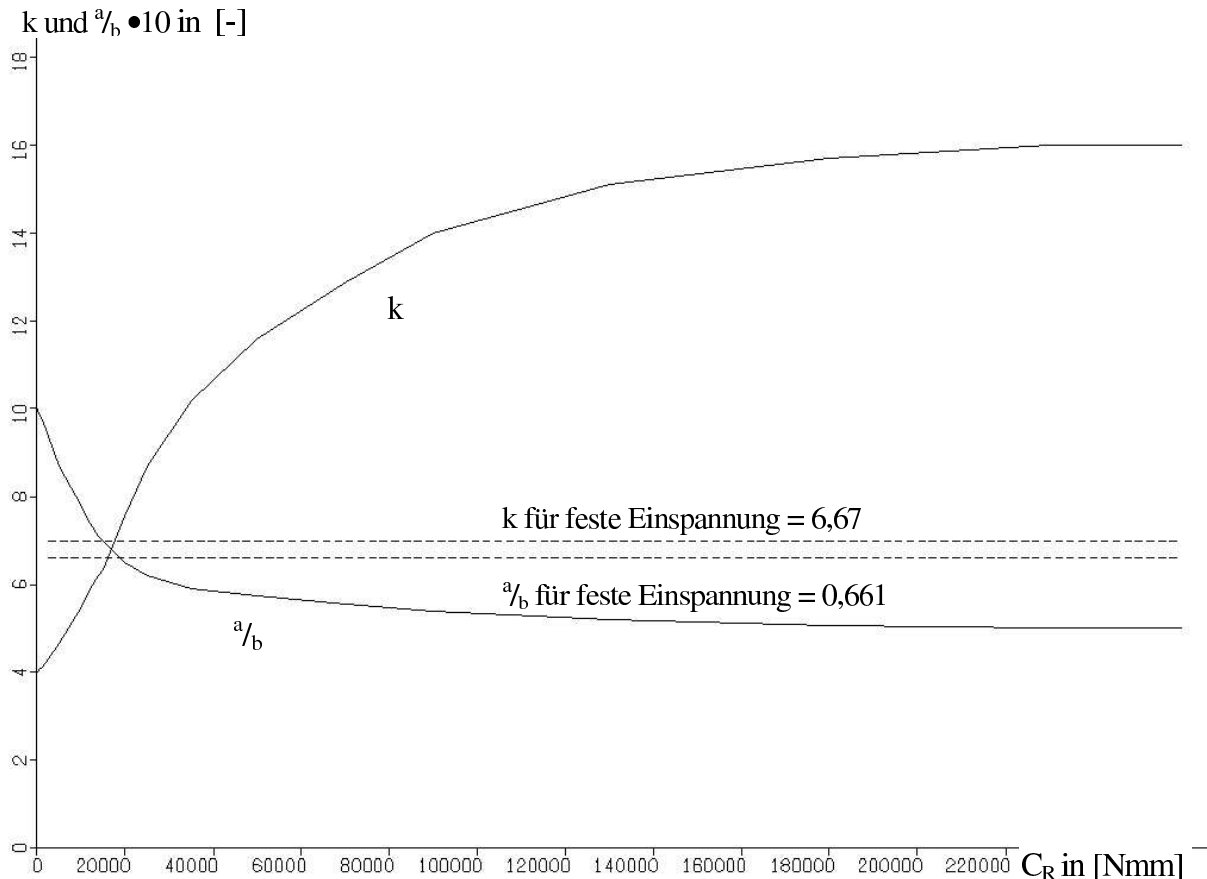


Abb. 4.8: Beulwert k und Seitenverhältnis a/b über Einspannfedersteifigkeit C_R

Es ist auch nach langem und intensivem Suchen nicht möglich gewesen, einen Fehler im Programm oder der Theorie zu finden, was nicht bedeutet, das es keinen gibt. Daraufhin wird das erste Verfahren abgebrochen. Es wird das zweite Verfahren angewendet, mit dem Schmalstieg, [10], allerdings ohne Schubbelastung gearbeitet hat.

4.1.3 Weitere Rechnungen

Weitere Rechnungen sind zu dem ersten Verfahren nicht dokumentiert, und es sind nur zu wenige mit zu vielen Problemen erfolgt, so daß keine Aussage über das Verhalten bei Schub und Krümmung gemacht werden kann. Schub und Einspannung werden beim zweiten Verfahren nicht richtig erfaßt, Krümmung allerdings. Es wäre interessant, wie sich das beim ersten Verfahren entwickeln würde, doch aus Zeitgründen, die sich aus ebenfalls schwerwiegenden Problemen mit dem zweiten Verfahren ergeben, wird auf das erste nicht mehr zurückgegriffen.

4.2 Zweites Verfahren

4.2.1 Variation der Krümmung und Orthotropie

Beim zweiten Verfahren wird mit der Variation der Krümmung begonnen, da diese Rechnung schon in [10] erfolgreich durchgeführt wird, womit eine sehr gute Vergleichsmöglichkeit zur Verfügung steht. Auch dieses Ergebnis ist nur mit zusätzlichem Aufwand und einem neuen Zusatz bei der automatischen Iteration zu erhalten. Die entstehenden Probleme resultieren aus der Tatsache, daß bei Krümmungsvariation die Reihenfolge der Nullstellen der Determinante Änderungen unterliegt und zusätzlich der Rohrbeulwert Relevanz erlangt [10]. Anhand von Bildern soll das Erhalten der korrekten Lösungen geschildert werden.

Begonnen wird mit einem Ergebnis zu einer Kreuzzahl $\eta = 2$, wobei diese über eine Änderung der Steifigkeit B_{xy} erreicht wird,

$$\eta = \frac{B_{xy}}{\sqrt{B_x B_y}} \quad , \quad (4.2-1)$$

so daß nach [1] wirksames und geometrisches Beulseitenverhältnis gleich eins bleiben müssen. Dies erreicht das Verfahren zumindest im unteren Krümmungsbereich. In Abb. 4.9 ist das erste Ergebnis einer Variation der Krümmung zu sehen, welche viele falsche Lösungen enthält und vollkommen unbrauchbar ist. Es werden zehn Werteverläufe dargestellt.

Erst wenn man einen engeren Suchbereich vorgibt, was unbedingt notwendig ist, werden die Ergebnisse besser, Abb. 4.10. Hierbei wird deutlich, daß man eine ungefähre Abschätzung der zu erwartenden Ergebnisse immer vorausgehen lassen muß. Am günstigsten ist es, wenn man von einem bekannten Wert ausgehen kann, wie es hier der Fall ist, da der Beulwert des ebenen Schalenstreifens für $\eta = 2$ bekannt ist,[1],

$$k = 2(1 + \eta) \quad , \quad (4.2-2)$$

für Streifen mit einem geometrischen Seitenverhältnis von $L/b > 1$, für $\Omega^* = 0$.

Da die so aufgefundenen Werte aber noch zu tief liegen und nicht auf die Rohrbeulgerade gehen, muß eine weitere Beeinflussung der Suche stattfinden. Man macht sich dabei das zu erwartende Verhalten in der Art zunutze, indem man vorgibt, daß die Kurven monoton steigend sein müssen, indem man aus vorherigen Werten linear extrapoliert und dann eine minimale Steigung errechnet. Diese darf von weiteren Werten nicht unterschritten werden, was zu dem in Abb. 4.11 dargestellten Ergebnis führt.

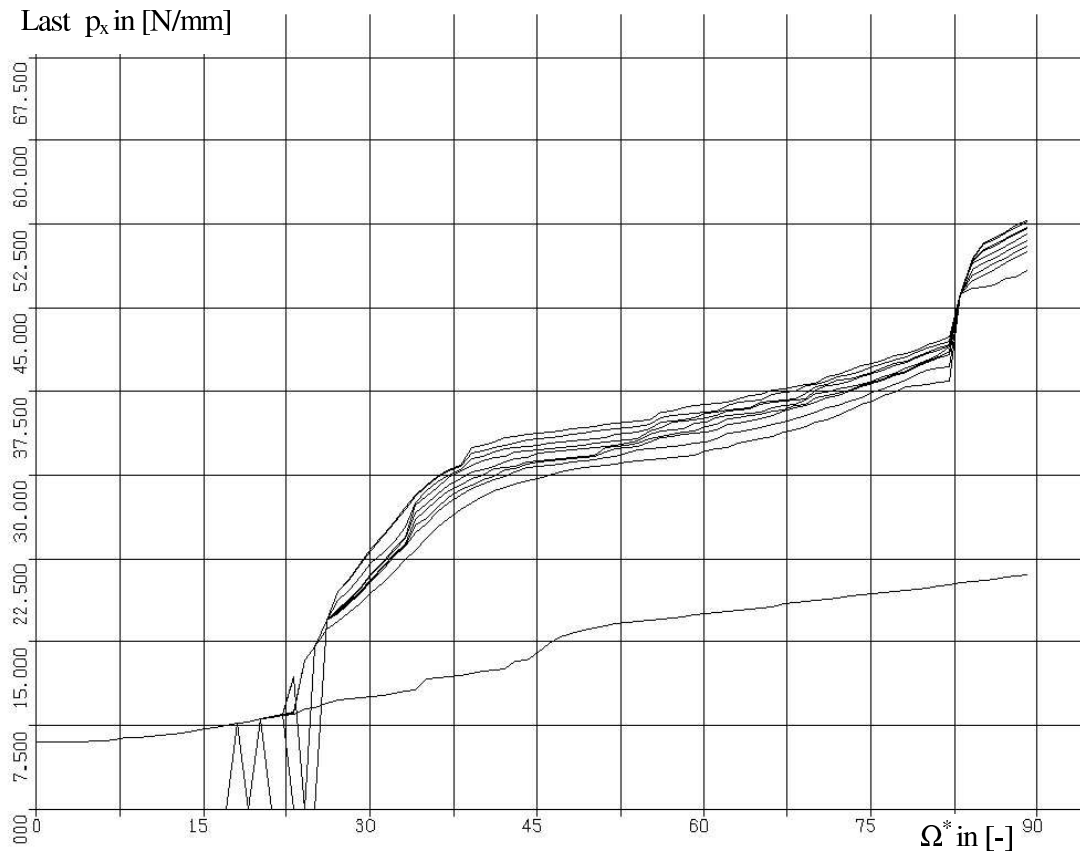


Abb. 4.9: Last p_x über Auftragungskrümmungsmaß Ω^*

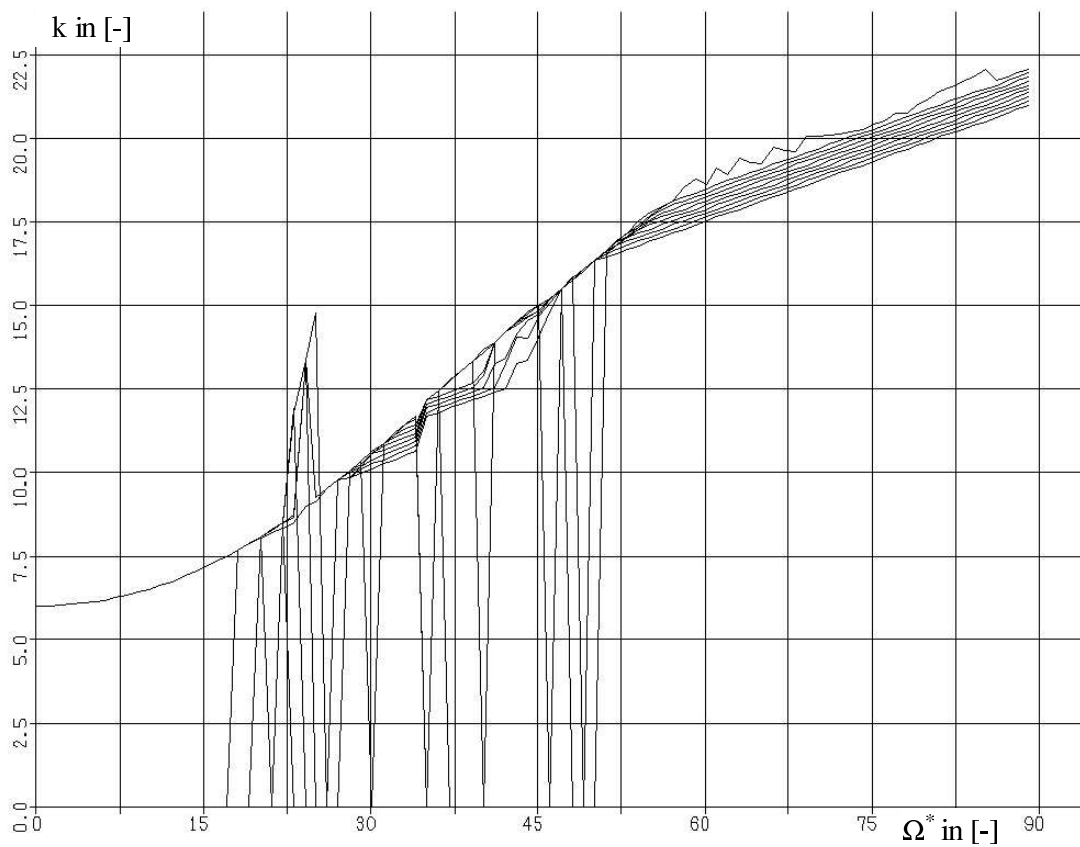


Abb. 4.10: Beulwert k über Auftragungskrümmungsmaß Ω^*

Abb. 4.11 sind eine einzige untere Kurve und mehrere wesentlich höherliegende Kurven zu entnehmen, so daß hier eine Austrennung des richtigen, nämlich des tiefsten Wertes leicht möglich ist. Nutzt man das aus und beschränkt sich auf drei Werte, die unter gegebenen Beschränkungen gefunden werden sollen, so erhält man Abb. 4.12. Hierbei wird im Bereich der gefundenen Kurve nochmals eine Testsuche durchgeführt, um sicherzustellen, daß die Lösung eindeutig ist. Diese Suche geht vom gefundenen Wert in beide Richtungen aus, unterliegt aber trotzdem der Beschränkung, daß die minimale Steigung nicht unterschritten werden darf. Und der zweite Wert zur Kontrolle soll nur bis maximal zehn Prozent oberhalb des ersten gesucht werden. Man erkennt, daß aber zwei Werte genau auf einer Kurve liegen. Ein dritter wird nicht gefunden, er ist im ganzen Bereich Null. Dies zeigt die Sicherheit und Eindeutigkeit des gefundenen Wertes. Unter anderem ist es auch möglich, die nächsthöheren Lösungen zu finden, was in Abb. 4.13 für Isotropie als Beispiel gezeigt wird.

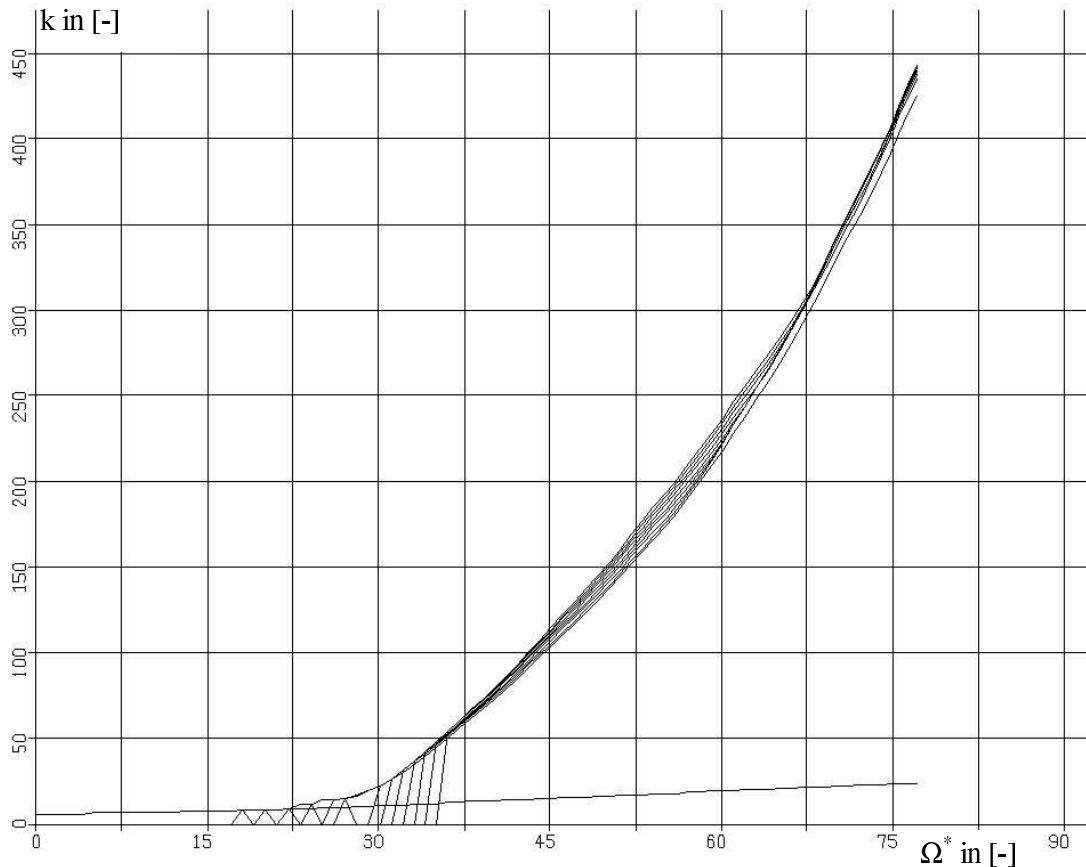
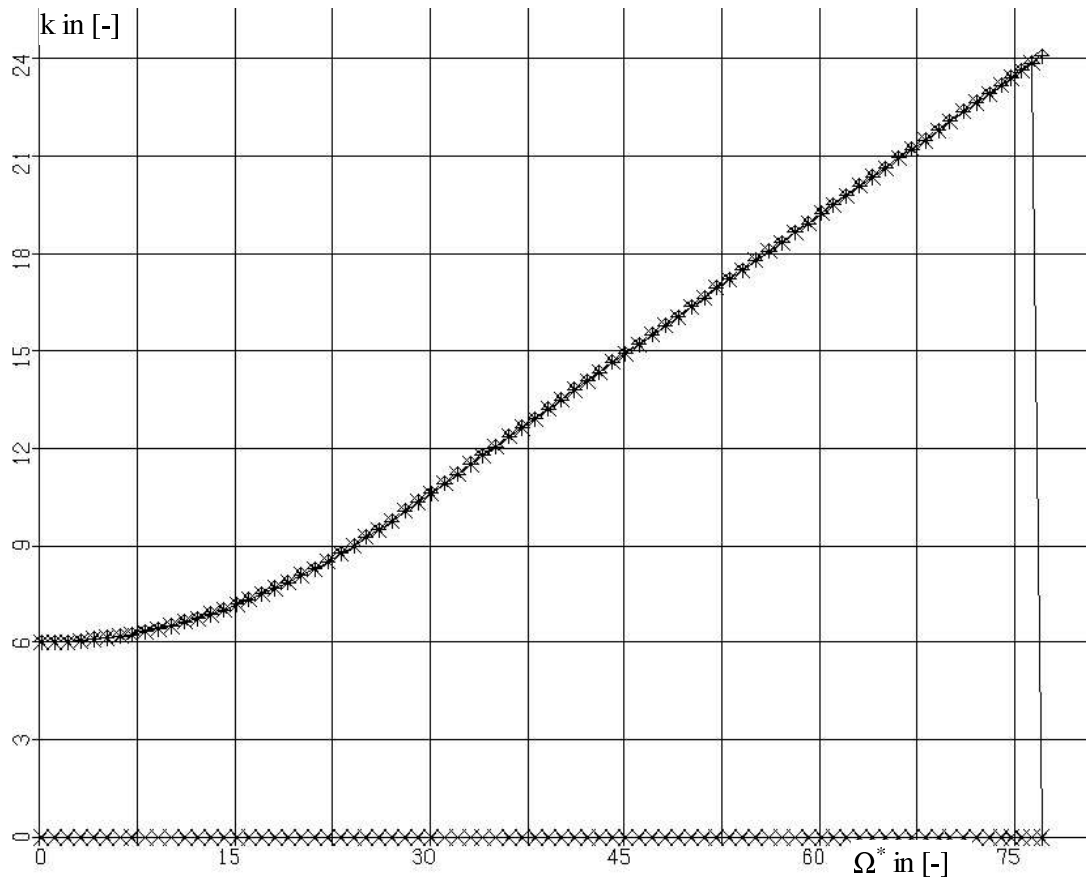


Abb. 4.11: Beulwert k über Auftragskrümmungsmaß Ω^*



**Abb. 4.12: Beulwert k über Auftragungskrümmungsmaß Ω^* für
Kreuzzahl $\eta = 2$**

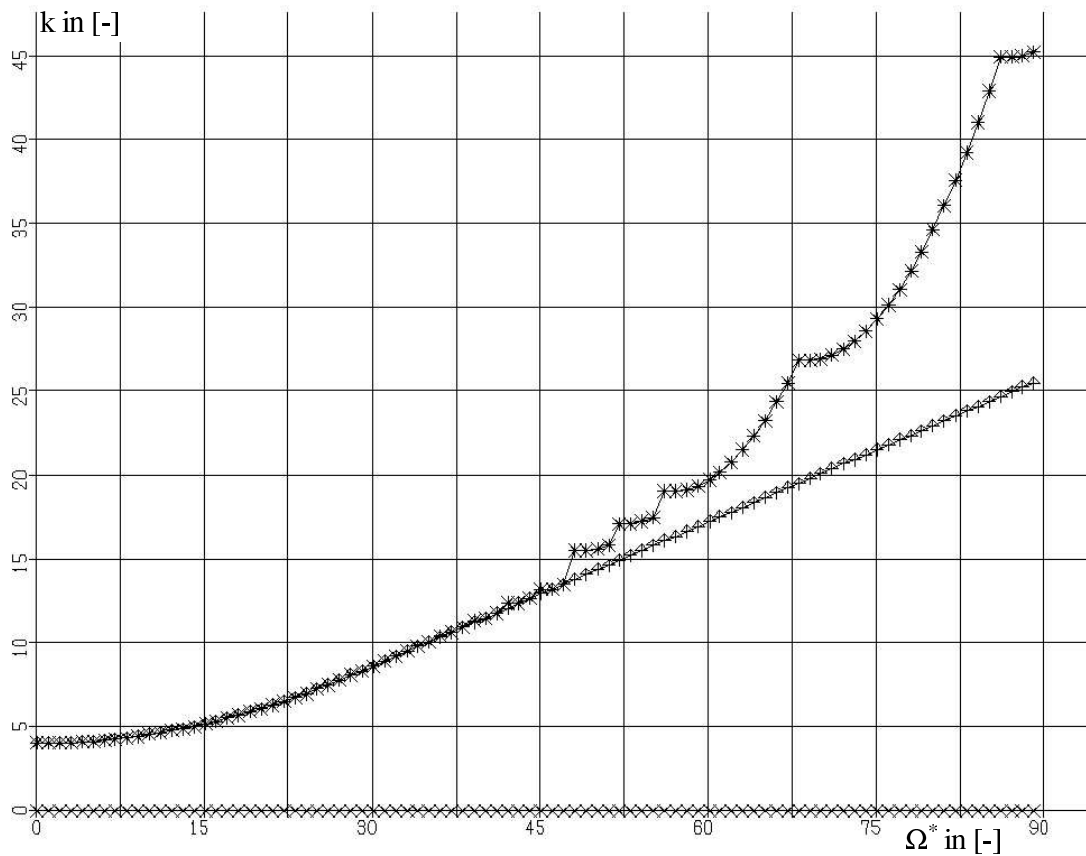


Abb. 4.13: Beulwert k über Auftragungskrümmungsmaß Ω^* bei Isotropie

Zur Bestimmung des Beulseitenverhältnisses muß angemerkt werden, daß dieses unbestimmt wird, sobald man in den Bereich des linearen Verlaufes des Beulwertes über dem Auftragskrümmungsmaß Ω^* kommt. Um bei der Iteration trotzdem zu einem Ergebnis zu kommen, wird ein Kriterium angesetzt, daß ein Beulwert dann gefunden ist, wenn eine minimale Änderung der Beullast bei einer bestimmten Änderung des Seitenverhältnisses nicht mehr erreicht wird. Tendenziell steigen die Seitenverhältnisse aber mit der Krümmung, sobald der lineare Bereich erreicht ist, ein Verhalten, daß genau anders als erwartet eintritt, aber da die Beulwerte stimmen, werden die Seitenverhältnisse als tatsächlich unbestimmt angenommen. Die angesprochene Unbestimmtheit des Seitenverhältnisses verursacht im weiteren Verlauf Probleme bei der Darstellung der Beulform.

In Abb. 4.14 sind die Ergebnisse für verschiedene Kreuzzahlen aufgetragen. Diese Ergebnisse decken sich mit denen aus [10].

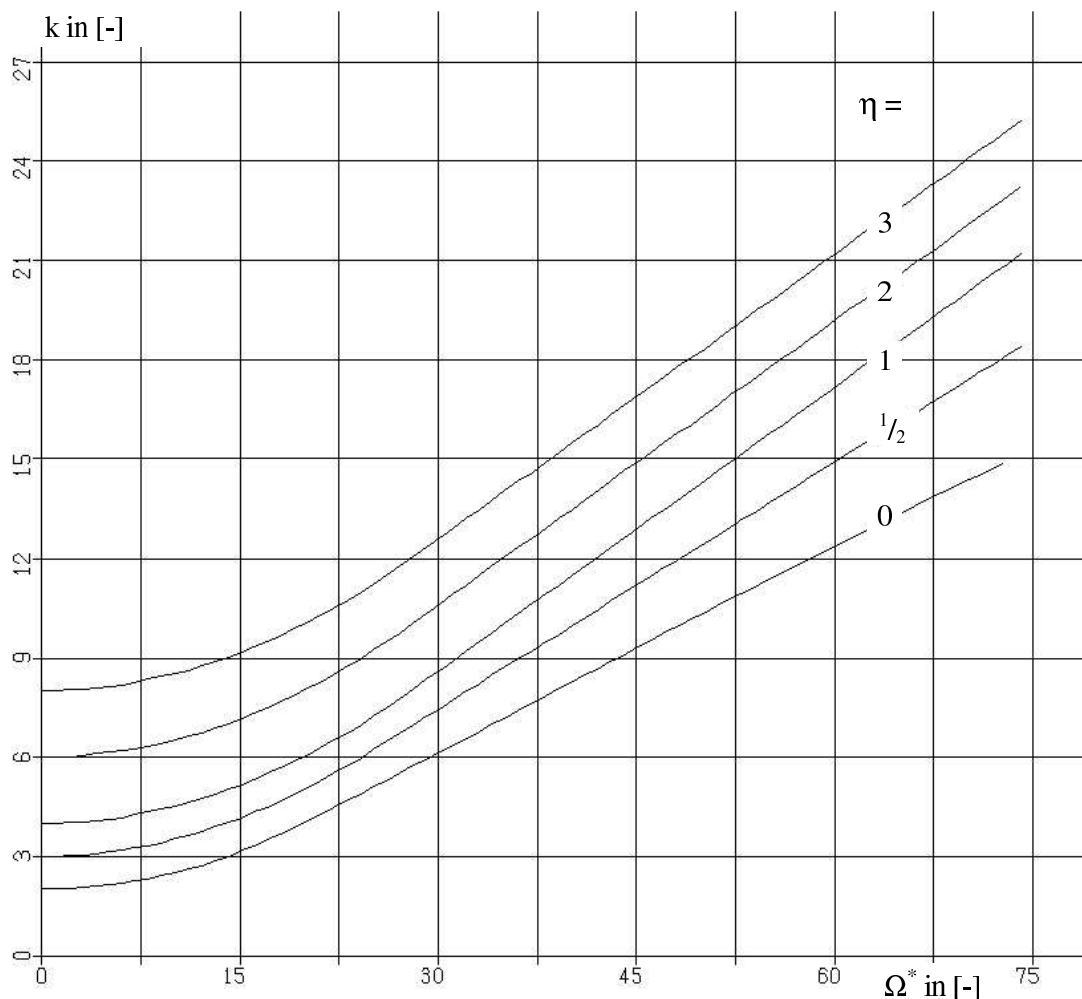


Abb. 4.14: Beulwert k über Auftragskrümmungsmaß Ω^*

Die Ergebnisse stimmen mit [1] für Kreuzzahlen größer als eins nicht überein. Es ist zu erkennen, daß die linearen Verläufe für $\eta > 1$ eine gleiche Steigung haben, während [1] einen Einlauf in Geraden verschiedener Steigung durch den Ursprung angibt:

$$k \approx \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{1+\eta}{1+\zeta}} \Omega = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{1+\eta} \Omega^* . \quad (4.2-3)$$

Ein Vergleich mit zusätzlich dazu durchgeführten FEM-Rechnungen mittels NASTRAN zeigt Abb. 4.15.

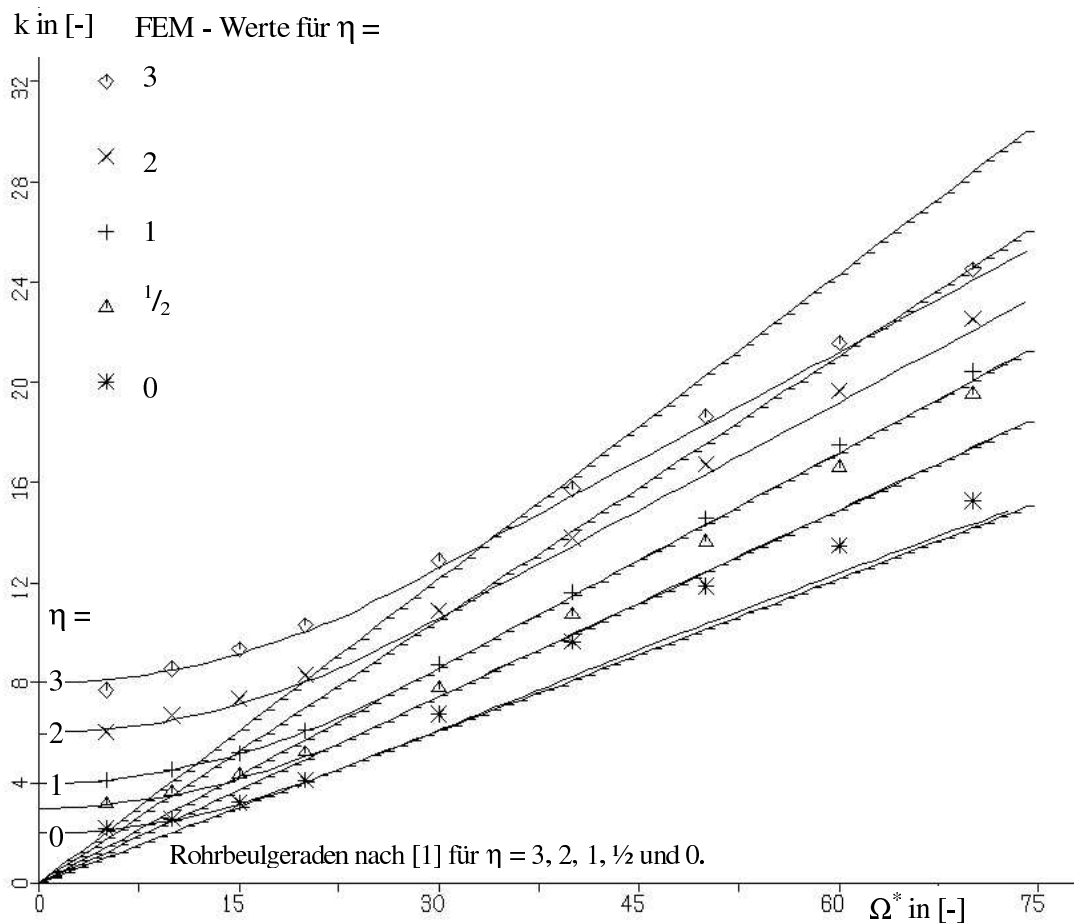


Abb. 4.15: Vergleich von drei Lösungen

Die FEM-Werte bestätigen die gefundenen Kurven für Kreuzzahlen von eins und größer, wobei die Werte tendenziell etwas oberhalb liegen, außer den Ergebnissen bei $\Omega^* = 5$ für $\eta = 3$ und 2. Für Kreuzzahlen kleiner als eins sind die FEM-Ergebnisse nur bis zu einem Auftragungskrümmungsmaß von 20 akzeptabel, darüber liegen sie zu hoch, wobei sie nicht auf einer Geraden liegen, wie die Werte zu $\eta = 0$ deutlich zeigen.

Die Variation der Krümmung wird bei den FEM-Modellen über die Hautdicke vorgenommen, während die Orthotropie über eine Materialkarte modelliert wird. Auch in dieser sind nur die

für B_{xy} relevanten Daten so verändert, daß man die gewünschten Kreuzzahlen erhält. Genau wie beim Modell der halbanalytischen Berechnungen sind somit die Scheibensteifigkeiten isotrop belassen.

Eine Klärung des abweichenden Verhaltens der FEM-Ergebnisse besonders bei den kleineren Kreuzzahlen für größere Krümmungen ist nicht eindeutig möglich. Über diverse Parametereinstellungen, die besonders bei gekrümmten Schalenelementen und allgemeinen Materialkarten Bedeutung erlangen, siehe [12], ist immer eine Normierung der Ergebnisse auf die bekannten und richtigen Ergebnisse möglich, aber es müssen diese Parameter dann auf alle Rechnungen gleich angewendet werden. Eine Erklärung für die unterschiedlichen Ergebnisse mögen aber Girlandenkurven sein, auf denen die FEM-Ergebnisse liegen (nicht untersucht) und die Randbedingung der Auswertung in [1], daß das Seitenverhältnis fest bei eins gehalten und nicht freigegeben wird, so daß das Programm ganz andere, tiefere Lösungen mit anderen Seitenverhältnissen findet.

4.2.2 Variation der Einspannung

Die Variation der Einspannung bzw. der Einspannfedersteifigkeit C_R führt mit diesem Verfahren ebenfalls zu fehlerhaften Ergebnissen. Abb. 4.16 zeigt das Ergebnis, wobei bei einer Überschreitung des Beulwertes von 6,97, dem Wert der festen Einspannung, und einer Unterschreitung des zugehörigen Seitenverhältnisses von 0,61 abgebrochen wird, da eine weitere Rechnung sinnlos ist. Es liegt ebenfalls eine ebene und isotrope Schale unter reinem Druck vor.

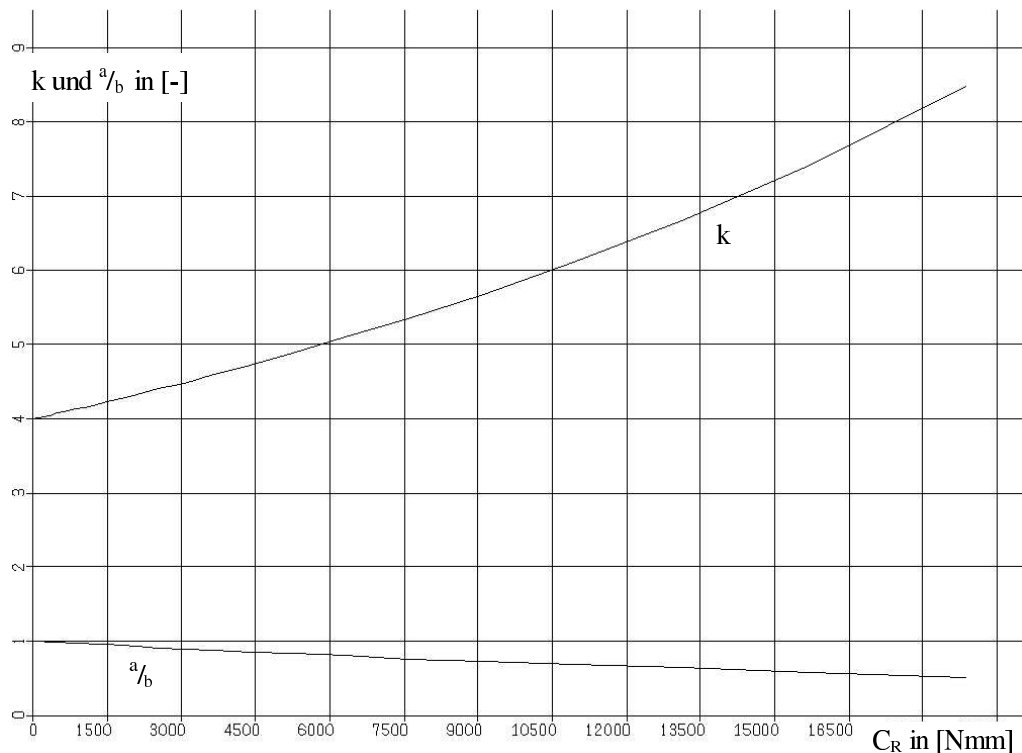


Abb. 4.16 : Beulwert k und Seitenverhältnis a/b über Einspannfedersteifigkeit C_R

Im Zuge der Kontrollen und der Fehlersuche sind neben Verläufen von Determinanten über der Last auch Diagramme des Beulwertes über dem Seitenverhältnis erzeugt worden. Dabei ist eindeutig die Tendenz festzustellen, daß mit steigender Einspannfedersteifigkeit die Kurven steiler und die Minima dementsprechend ausgeprägter werden. Abb. 4.16 und 4.17 sollen das für $C_R = 10000$ und den doppelten Wert verdeutlichen.

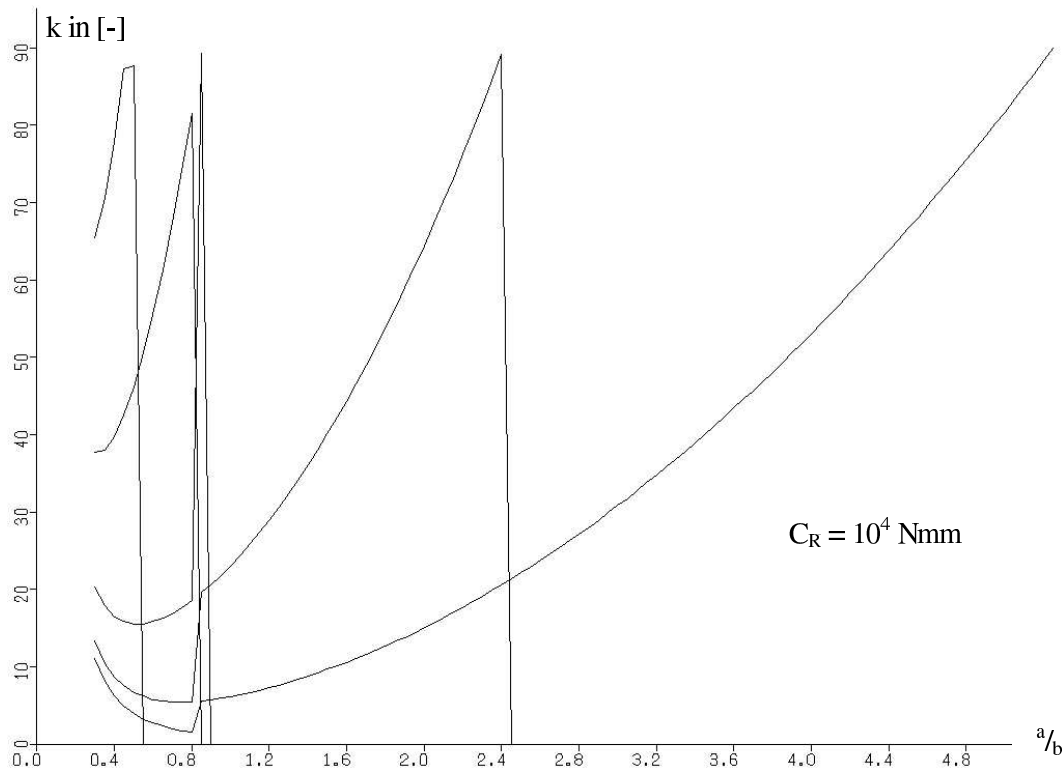


Abb. 4.17: Beulwert k über Seitenverhältnis a/b

Der Sprung in der ersten Abbildung ist dadurch zu erklären, daß eine untere Grenze gesetzt ist, unterhalb der nicht mehr gesucht wird, weshalb die Reihenfolge der Werte wechselt. Läßt man diese Kontrolle fallen, was im zweiten Bild geschehen ist, so ist zu erkennen, daß der unterste Wert gegen Null geht. Weiterhin sind deutliche numerische Probleme beim Auffinden der Werte zu erkennen, wenn man vom Seitenverhältnis mit dem minimalen Beulwert abweicht.

Im zweiten Diagramm ist auch zu erkennen, daß das Seitenverhältnis mit dem minimalen Beulwert, der auf der zweiten Kurve liegt, tatsächlich schon etwas unterhalb 0,6 liegt, womit die fehlerhaften Werte der automatisierten Variation aus Abb. 4.16 bestätigt sind. Ein Fehler in der Automation der Variation und Beulwertsuche kann wieder ausgeschlossen werden. Das bedeutet aber nicht, daß tatsächlich alle Lösungen gefunden sind.

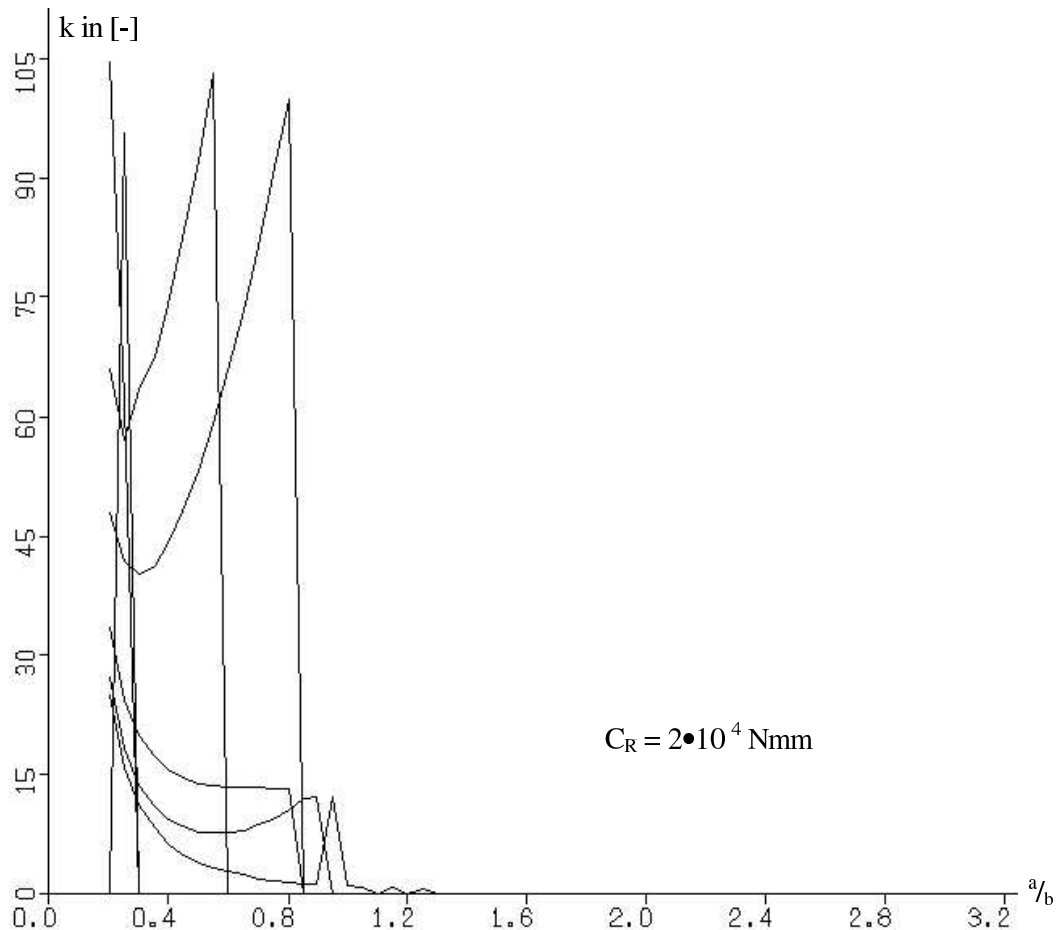


Abb. 4.18 :Beulwert k über Seitenverhältnis a/b

4.2.3 Kombinierte Belastung, Schub und Druck

Das Verhalten bei Schub wird ebenfalls an einer ebenen und gelenkig gelagerten Schale untersucht, da deren Grenzwerte, also die Beulwerte für reinen Druck und reinen Schub bekannt sind [1]:

$$\frac{p_{xykr}}{t} = \tau_{kr} = k_{\tau} E \left(\frac{t}{b} \right)^2, \quad \text{mit } k_{\tau} = 4,8 \quad (4.2-4)$$

für die isotrope, ebene und gelenkig gelagerte Schale. Die automatisierte Iteration bringt hier mittlerweile keine Probleme mehr, jedoch sind die Ergebnisse falsch, so daß nach erneuter und wiederholt ergebnisloser Fehlersuche in Programm und Theorie zu Einzelpunktberechnung übergegangen wird, deren Ergebnisse in Form einer Interaktionskurve in Abb. 4.19 dargestellt sind. Sie geben die automatisiert gefundenen Kurven wieder.

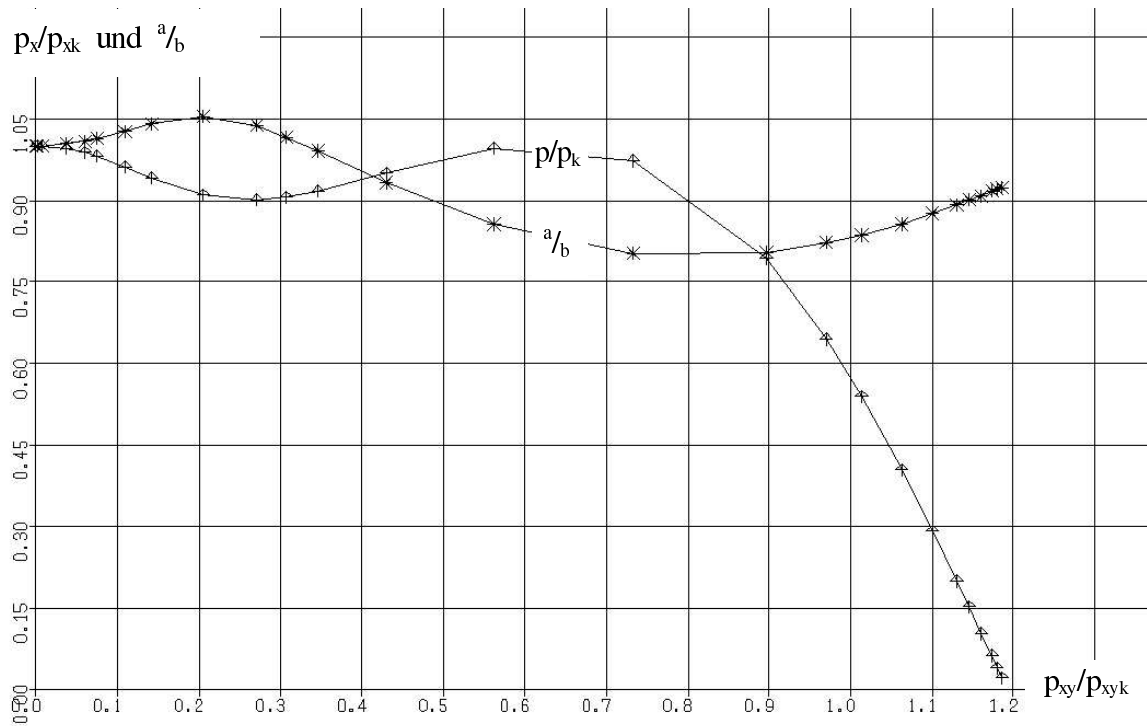
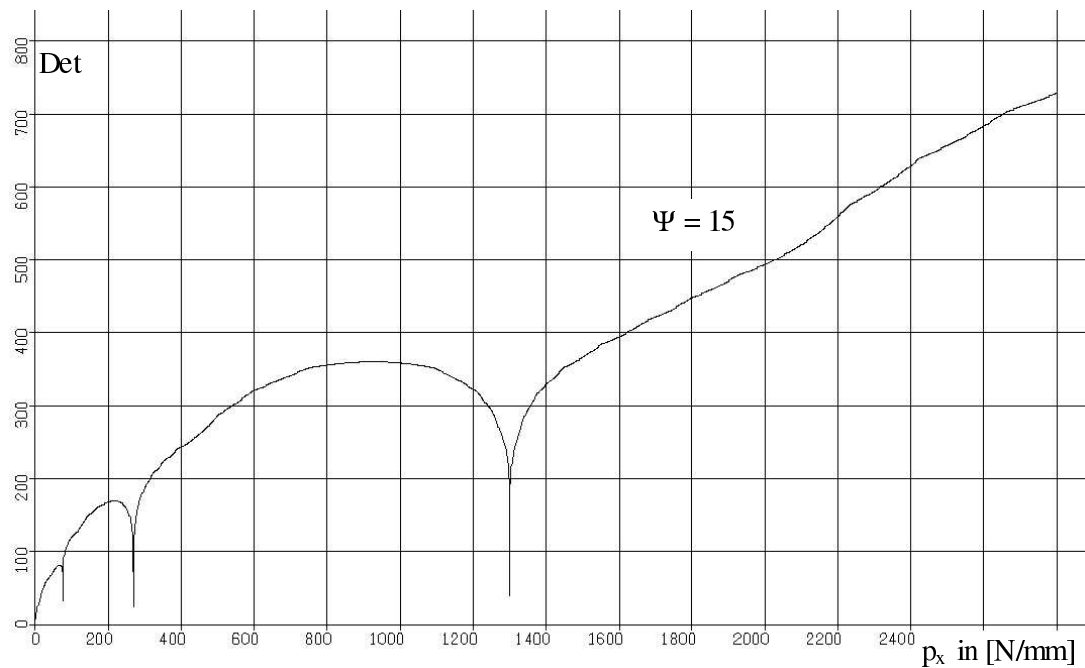


Abb. 4.19: Interaktionskurve

Der reine Schubbeulwert wird um das 1,2-fache überschritten, und der Verlauf der Kurve ist mit zunehmendem Schub nicht monoton fallend, der Schub führt also zu vollkommen falschen Ergebnissen.

Um sonstige Fehler auszuschließen, wird bei jedem Wert das Verhalten des Beulwertes über dem Seitenverhältnis und der Verlauf der Determinante über der Last kontrolliert. Obwohl der Verlauf der Determinante über der Last p_x sich bei steigendem Ψ dahingehend ändert, daß die Minima enger beieinanderliegen, so ist das Auffinden der Minima kein Problem. Es ist lediglich eine deutlich kleinere Schrittweite für p_x zu wählen. Abb.4.20 zeigt einen solchen Verlauf für ein Lastverhältnis von 15. Prinzipiell bleibt dieses Verhalten selbst bei vielfach größeren Werten erhalten, so daß das Auffinden der Werte unproblematisch bleibt, selbst wenn man quasi reinen Schub berechnet. Warum diese Werte aber falsch sind, ist nicht zu klären.

Abb. 4.20 :Determinante über der Last p_x

4.2.4 Beulformen

Anhand des Ansatzes für $w(x,y)$, Gl. 3.1-5 oder Gl. 3.3-2, kann mit den gefundenen Nullstellen durch Superposition, Gl. 3.1-8, eine Funktion für die Beulverschiebung $w(x,y)$ angegeben werden, die graphisch darstellbar ist. Für den Fall der ebenen und schwach gekrümmten und gelenkig gelagerten Schale gelingt das sehr gut, wobei einige Manipulationen nötig sind, denn es ist nicht eindeutig, welcher Teil der linear unabhängigen Lösungen (Real- oder Imaginärteil) zu verwenden ist. Beides stellen linear unabhängige Lösungen dar.

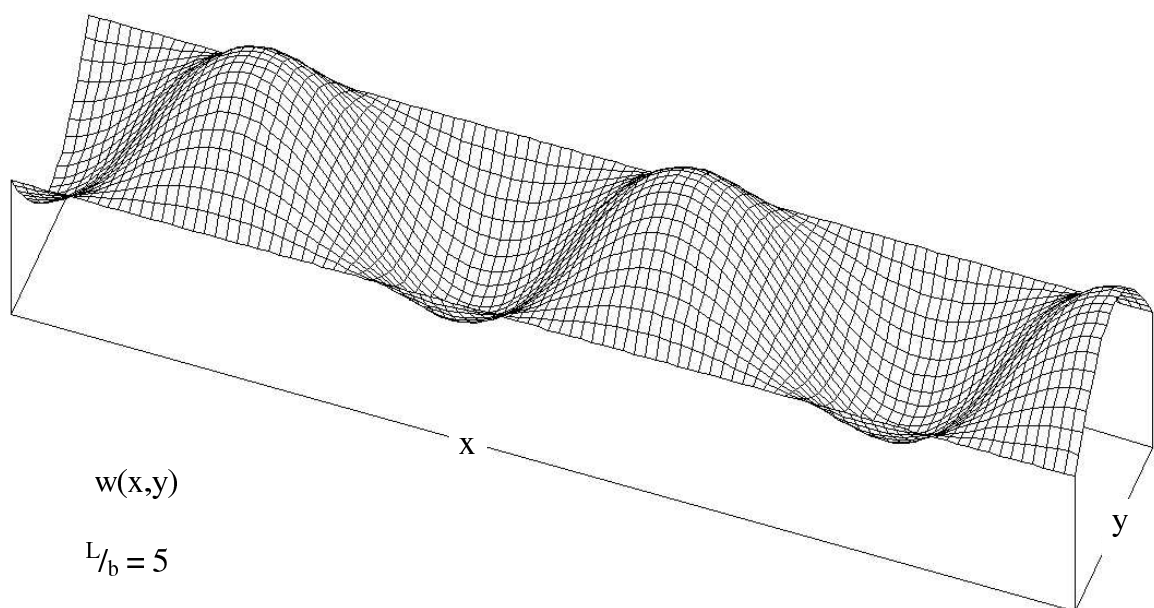


Abb. 4.21: Beulform des schwach gekrümmten Streifens

Diese Abbildung ist das Ergebnis für isotrope und orthotrope, ebene und schwach gekrümmte Schalen, wobei eine Gesamtlänge von der fünffachen Breite vorgegeben wird. Bei stärkerer Krümmung, bei der das Seitenverhältnis unbestimmt wird, gelingt es nicht, an den Rändern tatsächlich eine Verschiebung von Null zu erhalten und die Verläufe werden in Längsrichtung sehr eckig. Eventuell wäre eine Nachiteration der Seitenverhältnisse notwendig, denn es kann sein, daß das in Kap. 4.2.1 erklärte Kriterium zum Auffinden des Beulwertes ausreicht, aber das Seitenverhältnis für eine Darstellung noch zu ungenau ist. Da die Darstellung der Beulformen aber nicht gefordert ist, wird damit nicht noch mehr Zeit verbracht. Außerdem ist anzumerken, daß nach den FEM-Ergebnissen die Seitenverhältnisse mit steigender Krümmung abnehmen, und da das Programm dies nicht liefert, kann eine Beulformdarstellung eventuell dadurch erschwert werden.

Einige Darstellungen von Beulformen aus den FEM-Rechnungen zur Krümmungsvariation sollen zum Vergleich gezeigt werden. Sie geben die Tendenz steigender Beulenzahl bei steigender Krümmung wieder und gelten für alle Kreuzzahlen, da die wirksamen Seitenverhältnisse konstant eins bleiben. Selbst bei einem Wert von $\Omega^* = 25$ bleibt das Seitenverhältnis noch eins, so wie das Verfahren es liefert.

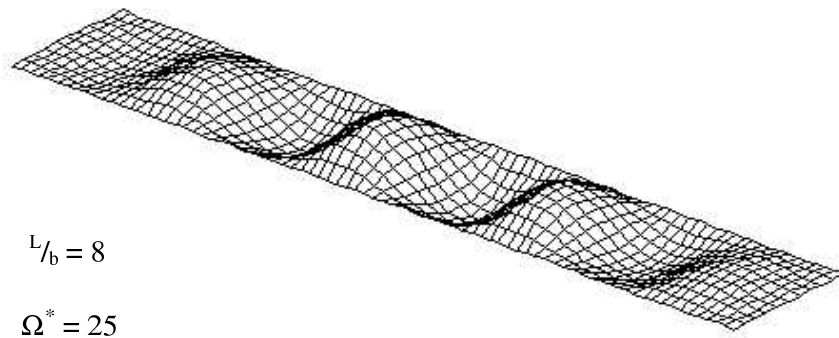
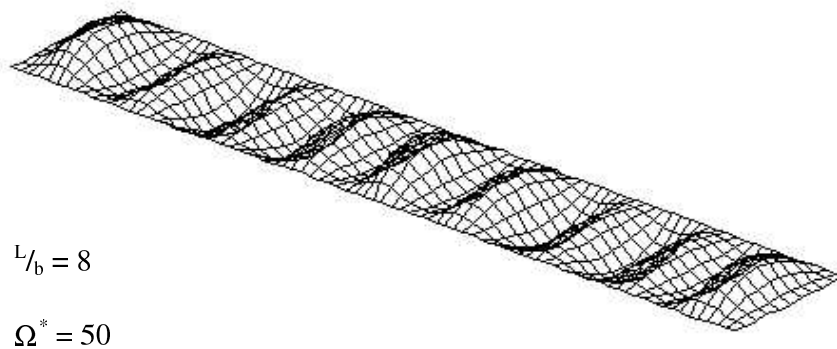
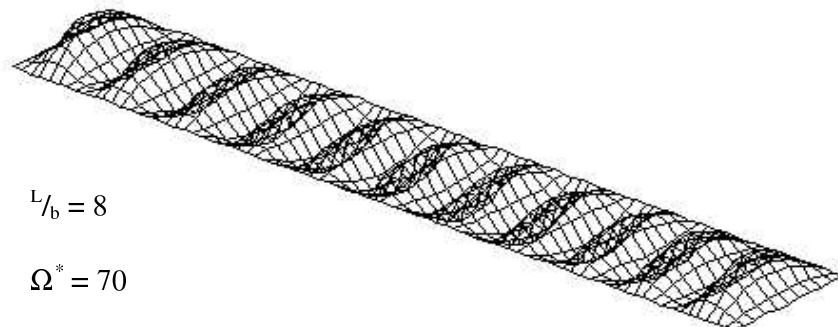


Abb. 4.22: Beulform nach NASTRAN

**Abb. 4.23: Beulform nach NASTRAN**

Es ist zu beachten, daß die kurzen Ränder der FEM-Modelle nicht nur gestützt, sondern auch eingespannt sind, um dem analytischen Modell zu entsprechen und Krafteinleitungsprobleme (Randinstabilitäten) zu vermeiden.

**Abb. 4.24: Beulform nach NASTRAN**

4.2.5 Weitere Rechnungen

Weitergehende Rechnungen machen keinen Sinn, wenn nicht bei den einfachsten Fällen die bekannten Lösungen nachvollzogen werden können. Man könnte mit neuen Werten dann keine

neuen Ergebnisse erzeugen, da keine Grundlage für deren Richtigkeit besteht. Daß die mit Sicherheit vorhandenen Fehler nicht gefunden werden, liegt unter anderem daran, daß Zeitbeschränkungen bestehen, aber die Qualität der gefundenen Werte, z.B. bei der Schubvariation, lassen hoffen, daß, wenn ein Fehler entdeckt wird, es keine Schwierigkeiten machen wird, die hoffentlich richtigen Werte zu finden. Es kann jedoch nicht gesagt werden, wie aufwendig sich das gestalten würde.

4.3 Zusammenfassung und Genauigkeit

Das einzige brauchbare Ergebnis ist die Variation der Krümmung und die Berücksichtigung der Orthotropie beim zweiten Verfahren. Sowohl die Variation des Schubes als auch die der Einspannfedersteifigkeit führen zu falschen Ergebnissen, nachdem es schon sehr kompliziert ist, überhaupt eine Konvergenz zu finden. Das Verhalten des ersten Verfahrens bei Variation von Schub und Krümmung und unter Beachtung von Orthotropie wird aus vorher angesprochenen Gründen nicht weiter untersucht.

Zur Genauigkeit der Ergebnisse bleibt zu vermerken, daß es im einfachsten Fall der ebenen und gelenkig gelagerten Schale möglich ist, mit Schrittweiten von 10^{-10} N/mm die Beullast auf 9 Nachkommastellen mit der analytischen Lösung übereinstimmend zu berechnen, diese Genauigkeit wird jedoch nicht ausgenutzt, da sie sowieso unrealistisch ist. Bei der Variation der Krümmung im linearen Bereich dagegen wird nur noch eine Genauigkeit von einer Nachkommastelle erreicht, da hier das neue Kriterium über das Seitenverhältnis zum Tragen kommt. Eine höhere Genauigkeit steigert außerdem die Rechenzeit überproportional.

Dieselben Genauigkeiten können bei den anderen Variationen zugrundegelegt werden, jedoch sind die Werte falsch.

Fordert man höhere Genauigkeiten als 10^{-14} , so kommt man an die Grenze der Zahlendarstellung und es passiert immer häufiger, daß das Programm sich aufhängt und nicht weiterläuft. Der Rechenlauf muß dann abgebrochen werden. Praktisch wird eine Genauigkeit von einer Nachkommastelle ausreichend sein, so daß diese Probleme ausgeschlossen bleiben.

Abschließend bleibt zu sagen, daß es keinen Unterschied macht, welches Verfahren verwendet wird. Die numerischen Probleme bleiben erhalten und die Hinzunahme von Schub erschwert beide Verfahren so sehr, daß ihre praktische Anwendbarkeit angezweifelt werden kann.

5 Bewertung und Einordnung

In diesem Kapitel wird das Verfahren beurteilt, indem die Herangehensweise kritisch untersucht, Lücken, Fehler und numerische Probleme aufgezeigt und ein Ausblick auf weitergehende Möglichkeiten gegeben wird. Hierbei soll auch der Zeitaufwand angesprochen werden, der dazu geführt hat, daß nur wenige und davon viele fehlerhafte Ergebnisse erzeugt worden sind. Vorausgreifend kann gesagt werden, daß es nicht auszuschließen ist, daß mit mehr Zeit und Erfahrung wesentlich mehr und richtige Ergebnisse zu erhalten sind, es kann jedoch gesagt werden, daß dafür ein erheblicher Aufwand zu betreiben ist.

Denn, wie der Arbeit zu entnehmen ist, tauchen bei jeder neuen Rechnung weitere Probleme auf, die geklärt werden müßten und teilweise gar nicht geklärt werden können. Die Probleme sind teilweise neu, aber auch bekannt, wobei z.B. das Minimum auf Grund des Verhaltens der Nullstellen zu erwähnen ist. Neu ist das Verhalten bei Hinzunahme von Schub, wobei dies zu total fehlerhaften Ergebnissen führt. Ob die Hinzunahme des Schubes und die damit verbundene Steigerung der Komplexität der Gleichungen allerdings ursächlich mit den Fehlern bei der Variation der Einspannfedersteifigkeit zusammenhängen, kann nur vermutet werden. Begründet werden kann das mit der Tatsache, daß diese Variation bei Schmalstieg funktioniert hat und ein Einfluß des Lastverhältnisses auf das Ergebnis vorhanden ist (Abb.4.1 und 4.2). Es besteht aber auch die Möglichkeit, daß das Auffinden der richtigen Lösung so kompliziert wird, daß einfach nur noch mehr Aufwand erforderlich ist. Dies spricht jedoch gegen die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens, denn es müssen zu viele Tricks angewendet werden, um die richtige Lösung zu isolieren, was eigentlich auch nur dann möglich ist, wenn die Lösungen schon bekannt sind.

Ein solches Verhalten führt nämlich jedesmal zu einer erneuten, zeitintensiven Überprüfung des sehr umfangreichen Programmes, wobei die Teile besondere Beachtung finden, in denen relevante Parameter, also z.B. ψ , enthalten sind. Sind keine Fehler zu finden, werden die Theorie und die daraus resultierenden Gleichungen erneut überprüft. Im Falle des Lastverhältnisses sind keine Fehler zu finden, was aber nicht bedeutet, daß es keine mehr gibt. Es muß einen oder mehrere Fehler geben, es kann lediglich nicht geklärt werden, welche Ursachen den fehlerhaften Ergebnissen zugrunde liegen. Diese Aussage ist allerdings nicht sicher, denn es besteht durchaus die Möglichkeit, daß das fehlerhafte Verhalten ein stabiler Verlauf ist, der so sehr neben der richtigen Lösung liegt, weil numerische Ungenauigkeiten, wie z.B. bei der Bestimmung der Nullstellen, einfach zu diesem Ergebnis führen, obwohl die Theorie richtig umgesetzt und programmiert worden ist.

Hierfür spricht unter anderem die Tatsache, daß schon die Polynomkoeffizienten von unterschiedlicher Größenordnung sind. Schaut man sich Gl. 3.1-7 an, so wird das nicht sofort offensichtlich, aber mit einer Normierung der Koeffizienten und deren Ausgabe kann man sich das verdeutlichen, wobei diese Normierung, mit e_8 vorgenommen, die stabilsten Ergebnisse liefert.

Interessant ist auch die Empfindlichkeit der Ergebnisse z.B. bei der Variation der Randeinspannung C_R . Werden die Gln. 3.2-11 so programmiert wie angegeben, so ist für den Beulwert und das Beulfeldseitenverhältnis keine Konvergenz zu erhalten, wenn man es sehr groß werden läßt. Die angegebenen, wenn auch falschen, so aber konvergierenden Ergebnisse sind nur zu erhalten, wenn diese Gleichungen mit $1/C_R$ multipliziert werden. Theoretisch dürfte dies auf die Nullstellen der Determinante keinen Einfluß haben, aber praktisch sind solche Feinheiten von großer Relevanz. Dies wird insbesondere dann deutlich, wenn man versucht, Anteile von Nullstellen, die mit Werten von 10^{-15} oder weniger als Ergebnis der Nullstellenberechnung erhalten werden, tatsächlich zu Null setzt. Es liegt die Vermutung nahe, daß solche Werte gegenüber Anteilen in der Größenordnung von π vernachlässigbar sind, doch tut man das tatsächlich, so wird das Verfahren unbrauchbar, was wiederum auf zu viele Nullen in der Determinante zurückzuführen ist. Hinsichtlich der Genauigkeit der Ergebnisse ist dies natürlich besonders interessant, aber nicht zu erklären.

Ein solches Verhalten vorherzusehen ist schwer möglich, so daß erfolgreiche Rechnungen mit richtigen Ergebnissen jedesmal ein Resultat zeitintensiven, systematischen Suchens sind, wobei häufig Zufall und Glück über Gelingen und Scheitern bestimmen. Es sind also noch lange nicht alle Möglichkeiten ausgeschöpft.

Ein weiterer Faktor, der einen Einfluß auf die Qualität der Lösungen hat, sind die verwendeten Algorithmen. Speziell sei dabei nochmals die Bestimmung der Nullstellen erwähnt, denn sie erscheint nicht sehr gut, was besonders deswegen ungünstig ist, weil diese Rechnung am Anfang steht und die Nullstellen weiter verwendet werden. Bei einfachen Rechnungen hat dies keinen Einfluß, doch sobald die Anforderungen steigen (variable Einspannung, Schubbelastung), besteht die Möglichkeit, daß die Fehler in den bestimmten Nullstellen an Einfluß gewinnen. Zumindest bietet sich diese Erklärung für die Fehler an, und es wäre wünschenswert, das ganze Verfahren einmal mit einem besseren Algorithmus zur Nullstellenbestimmung durchzurechnen. Jedenfalls wäre dies ein Ansatz für weitergehende Untersuchungen mit diesem Verfahren.

Beachtet man diesen angesprochenen Aufwand, so steht dieses halbanalytische Verfahren im Vergleich zur Methode der Finiten Elemente nicht sehr gut da. Theoretisch wäre dieses Verfahren der FE Methode natürlich überlegen, da die Rechenzeit wesentlich kürzer ist und aufwendige Modellierungen entfallen. Desweiteren sind aber die vorhandenen FEM Programme weit entwickelt und die Methode der Finiten Elemente gut ausgebaut, was jedoch

nicht bedeutet, daß sie unfehlbar ist. Dies wird besonders bei den Ergebnissen der FEM-Rechnungen, die in Abb. 4.15 dargestellt sind, deutlich. Auch ist der Zeitaufwand für die Arbeit mit einem so umfangreichen und universell einsetzbaren Programm wie NASTRAN nicht zu unterschätzen, da Einarbeitung und Kontrolle der Modelle an bekannten Lösungen sehr zeitintensiv sein können.

Ein wertender Vergleich beider Verfahren macht keinen Sinn, da es immer am besten ist, wenn man mehrere Verfahren hat, die gegenseitig zur Kontrolle dienen können. Für das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren scheinen mit Einbeziehung von Schub die Grenzen erreicht, zumindest im Rahmen einer Studienarbeit. Erweiterungen auf allgemeine Anisotropie ist soweit nicht in Angriff zu nehmen. Ein Kompromiß wäre ein single-purpose-FEM-Programm zur Berechnung, das nur diesem Modell Rechnung trägt. Man würde nur ein Koordinatensystem und einen Elementtyp benötigen, so daß aufwendige Transformationen oder Integrationsverfahren nicht notwendig sind. Der Vorteil gegenüber universellen Programmen wäre eine größere Schnelligkeit und höhere Spezialisierung.

Abschließend bleibt zu sagen, daß das Verfahren noch lange nicht ausgetestet ist. Ein Beispiel ist z. B. die Frage, welchen Einfluß der Bezug von y auf r oder b in den Ansatzfunktionen hat. In [10] wird auf r bezogen, in dieser Arbeit auf b , so daß sich auch andere Polynomkoeffizienten ergeben. Ein direkter Einfluß auf die numerische Stabilität des Verfahrens mag ausgeschlossen werden, doch es können durchaus andere Ergebnisse resultieren, besonders im ebenen Fall.

Eine Quelle, die aber von diesem Verfahren abrät, ist [13]. Sie spricht sich für das Übertragungsmatrizenverfahren aus und macht damit wesentlich erfolgreichere Untersuchungen. Eventuell sollte dies für weitere Rechnungen aufgegriffen werden.

Anhang A: Tensoranalytische Beschreibung

Dieses Kapitel hat seine Begründung in der Tatsache, daß kaum einer Arbeit eine genaue Ableitung der verwendeten Gleichungen vorangeht. Damit besteht die Gefahr, Voraussetzungen und Vernachlässigungen aus den Augen zu verlieren. Außerdem sind die nichtlinearen Gleichungen notwendig für weitergehende Betrachtungen, wenn z.B. das Nachbeulverhalten interessiert. Am Anfang dieser Arbeit bestand das Interesse, dies in einer auf diese Arbeit aufbauenden Diplomarbeit zu untersuchen, allerdings waren die Probleme, die selbst mit den linearen Gleichungen auftauchen sollten, noch nicht abzusehen.

A.1 Allgemeine Einführung

In diesem Anhang soll eine kurze Erklärung der tensoriellen Notation geboten und dabei als Anwendung die Herleitung der nichtlinearen Verschiebungs- Verzerrungsrelationen des dreidimensionalen Kontinuums kurz dargestellt werden. Dabei soll weder der symbolischen noch der Index- Schreibweise ein Vorzug gegeben werden, sondern einer Mischung aus beiden, die sich danach richtet, welche Darstellung für eine bestimmte Anwendung übersichtlicher ist. Dieses Vorgehen hat sich in letzter Zeit zunehmend durchgesetzt und wird auch in Zukunft mehr Anwendung finden, siehe [4].

Daß diese Darstellung keine vollständige sein kann, liegt an der zeitlichen und inhaltlichen Abgrenzung dieser Arbeit. Dennoch soll ein Darstellung der wesentlichsten Grundlagen vorausgeschickt werden.

Zur Tensorrechnung in allgemeinen, krummlinigen Koordinaten müssen vorher einige Vereinbarungen getroffen werden, von denen die wichtigsten kurz erläutert werden :

- Einsteinsche Summationskonvention: Über alle in einem Produkt doppelt vorkommenden, verschieden gestellten Indizes ist von eins bis n zu summieren, wobei n die Dimension des Raumes ist, in dem gerechnet wird (2 in der klassischen Schalen- oder zweidimensionalen Feldtheorie (Kontinuumsphysik), 3 im dreidimensionalen Raum oder der dreidimensionalen Feldtheorie), zum Beispiel :

$$a_{ij}^k b^i_k = \sum_i \sum_k a_{ij}^k b^i_k \quad . \quad (A1-1)$$

Die Notwendigkeit der Unterscheidung entfällt bei kartesischen Basen, bei Basen aus orthonormierten Basisvektoren sei die Summationskonvention also auch auf zwei gleichgestellte Indizes angewendet.

- Untere Indizes an Basisvektoren und Tensorkoordinaten werden kovariant, obere kontravariant genannt. Diese Unterscheidung ist bei kartesischen Koordinaten deswegen nicht notwendig, da ko- und kontravariante Basis zusammenfallen. Beide Darstellungen sind gleichwertig, wie am Beispiel eines Vektors gezeigt wird :

$$\underline{a} = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z = a_i \underline{g}^i = a^i \underline{g}_i . \quad (\text{A1-2})$$

- Kartesische Koordinaten werden mit x_i , die kartesische Basis mit \underline{e}_i , krummlinige Koordinaten mit Θ^i und die kovariante Basis krummliniger Koordinaten mit \underline{g}_i bezeichnet. Es gelten die Zusammenhänge

$$\Theta^i = \Theta^i(x_j) = \Theta^i(x_1, x_2, x_3) \quad , \quad x_i = x_i(\Theta^j) = x_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \quad , \quad (\text{A1-3})$$

aus denen mit der Kettenregel für die vollständigen Differentiale folgt:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \Theta^j} d\Theta^j \quad , \quad d\Theta^i = \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_j} dx_j \quad , \quad (\text{A1-4})$$

wobei die Anmerkungen gemacht werden müssen, daß Indizes unter einem Bruchstrich wie kovariante Indizes behandelt werden und daß in diesem Ausdruck die oben angesprochenen Besonderheiten der kartesischen Basis wirksam werden, da im zweiten Teil der Gleichung A1-4 der Index j zweimal unten steht. Man hätte ihn auch oben an das x schreiben können, doch ist dies in kartesischen Basen nicht üblich.

- Mit den oben genannten Zusammenhängen wird die krummlinige Basis wie folgt definiert:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \Theta^i} \underline{e}_j \quad , \quad \underline{g}^i = \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_j} \underline{e}_j \quad , \quad (\text{A1-5,a,b})$$

die j -te kartesische Koordinate des i -ten ko- und kontravarianten Basisvektors lassen sich aus dieser Darstellungsgleichung zu folgenden Ausdrücken entnehmen:

$$\left(\underline{g}_i \right)_j = \frac{\partial x_j}{\partial \Theta^i} \quad , \quad \left(\underline{g}^i \right)_j = \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_j} . \quad (\text{A1-6})$$

- Tensoren werden wie folgt dargestellt:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= a^i \underline{g}_i = a_i \underline{g}^i, & \text{Tensor 1. Stufe,} \\ \underline{\underline{a}} &= a^{ij} \underline{g}_i \underline{g}_j = a^i_j \underline{g}_i \underline{g}^j = a_i^j \underline{g}^i \underline{g}_j = a_{ij} \underline{g}^i \underline{g}^j, & \text{Tensor 2. Stufe,} \end{aligned} \quad (\text{A1-7})$$

Steht kein Punkt zwischen den Tensoren (hier Basisvektoren), dann ist es ein tensorielles oder dyadisches Produkt, sonst ein skalar, wobei für jeden Punkt in symbolischer Schreibweise eine Überschiebung (Indexgleichsetzung benachbarter, verschieden gestellter Indizes, siehe [5]) in Indexschreibweise vorzunehmen ist.

Tensoren werden meistens über ihr Transformationsverhalten definiert. Aus diesem Grund sei hier das Transformationsverhalten von Tensoren bei einem Übergang von einem Koordinatensystem in ein anderes ausführlich beschrieben. Um zu den Transformationsbeziehungen zu kommen, muß Gleichung A1-5,a mit der partiellen Ableitung der Θ^i nach den x_k und Gleichung A1-5b mit der partiellen Ableitung der x_k nach den Θ^i überschoben (skalar multipliziert) werden. Das sieht so aus:

$$\begin{aligned} \underline{g}_i &= \frac{\partial x_j}{\partial \Theta^i} \underline{e}_j & \left| \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_k} \right. & , \Rightarrow \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_k} \underline{g}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \Theta^i} \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_k} \underline{e}_j = \underline{e}_k, \\ \underline{g}^i &= \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_j} \underline{e}_j & \left| \frac{\partial x_k}{\partial \Theta^i} \right. & , \Rightarrow \frac{\partial x_k}{\partial \Theta^i} \underline{g}^i = \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial \Theta^i} \underline{e}_j = \underline{e}_k. \end{aligned} \quad (\text{A1-8})$$

Der letzte Schritt in Gleichung A1-8 ist die Ausnutzung der Orthogonalität der partiellen Ableitungen. Sie läßt sich leicht veranschaulichen, indem man mit dem Kronecker - Delta arbeitet. Es ist offensichtlich, daß folgendes gilt:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Theta^i}{\partial \Theta^k} = \delta^i_k = \delta_k^i = \delta_i^k = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}, \quad (\text{A1-9})$$

womit in Gleichung A1-8 durch Erweitern folgt, daß

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \Theta^j} \frac{\partial \Theta^j}{\partial x_k} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial \Theta^i}{\partial \Theta^k} = \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \Theta^k} = \delta_{ik}. \quad (\text{A1-10})$$

Mit dem bereitgestellten Formelapparat können die Transformationsgleichungen erklärt werden. Es seien zwei beliebige Koordinatensysteme durch folgende Transformationsbeziehungen zwischen ihnen selbst und den kartesischen Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned} \Theta^i &= \Theta^i(x_j), \quad x_i = x_i(\Theta^j), \\ \tilde{\Theta}^i &= \tilde{\Theta}^i(x_j), \quad x_i = x_i(\tilde{\Theta}^j), \end{aligned} \quad (\text{A1-11})$$

Aus Gleichung A1-8 folgt mit Umbenennung der Indizes

$$\underline{e}_i = \frac{\partial \Theta^j}{\partial x_i} \underline{g}_j = \frac{\partial x_i}{\partial \Theta^j} \underline{g}^j = \frac{\partial \tilde{\Theta}^j}{\partial x_i} \tilde{\underline{g}}_j = \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{\Theta}^j} \tilde{\underline{g}}^j . \quad (\text{A1-12})$$

Nimmt man aus dieser Identität den zweiten und vierten Term getrennt vom dritten und fünften heraus, überschiebt dann wie unten angegeben, so ergeben sich die allgemeinen Transformationsbeziehungen für Basen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta^j}{\partial x_i} \underline{g}_j &= \frac{\partial \tilde{\Theta}^j}{\partial x_i} \tilde{\underline{g}}_j \quad \left| \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{\Theta}^m} \right. , \Rightarrow \frac{\partial \Theta^j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{\Theta}^m} \underline{g}_j = \frac{\partial \tilde{\Theta}^j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{\Theta}^m} \tilde{\underline{g}}_j , \\ &\Rightarrow \frac{\partial \Theta^j}{\partial \tilde{\Theta}^m} \underline{g}_j = \delta_{jm} \tilde{\underline{g}}_j , \\ \frac{\partial x_i}{\partial \Theta^j} \underline{g}^j &= \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{\Theta}^j} \tilde{\underline{g}}^j \quad \left| \frac{\partial \tilde{\Theta}^m}{\partial x_i} \right. , \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial \Theta^j} \frac{\partial \tilde{\Theta}^m}{\partial x_i} \underline{g}^j = \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{\Theta}^j} \frac{\partial \tilde{\Theta}^m}{\partial x_i} \tilde{\underline{g}}^j , \\ &\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\Theta}^m}{\partial \Theta^j} \underline{g}^j = \delta_{jm} \tilde{\underline{g}}^j , \\ \Rightarrow \quad \tilde{\underline{g}}_m &= \frac{\partial \Theta^j}{\partial \tilde{\Theta}^m} \underline{g}_j , \quad \tilde{\underline{g}}^m = \frac{\partial \tilde{\Theta}^m}{\partial \Theta^j} \underline{g}^j . \end{aligned} \quad (\text{A1-13})$$

In diesen Gleichungen sind auf Grund der Gleichberechtigung der Koordinatensysteme die geschweiften und ungeschweiften Größen vertauschbar, was praktisch bedeutet, daß nur die Tilde vertauscht wird, wobei die Gültigkeit der Aussagen erhalten bleibt. Aus diesen Transformationsgleichungen für die Basen kann man sofort die Transformationsvorschrift für Tensorkoordinaten ablesen, weil sich gleichgestellte Tensorindizes wie entsprechende Basisvektoren transformieren. Am Beispiel eines Vektors sei dies an Hand der Darstellungsgleichung ausführlich erklärt, für einen Tensor zweiter Stufe werden die Transformationsvorschriften nur noch angegeben:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= a^i \underline{g}_i = \tilde{a}^i \tilde{\underline{g}}_i = \tilde{a}^i \frac{\partial \Theta^j}{\partial \tilde{\Theta}^i} \underline{g}_j , \\ &= a_i \underline{g}^i = \tilde{a}_i \tilde{\underline{g}}^i = \tilde{a}_i \frac{\partial \tilde{\Theta}^m}{\partial \Theta^i} \underline{g}^m . \end{aligned} \quad (\text{A1-14})$$

Um nun einen Koeffizientenvergleich durchführen zu können, müssen beide Seiten in derselben Basis dargestellt werden. Dies erreicht man durch folgende Indexumbenennungen der gebundenen Indizes (Summationsindizes):

$$a^i \underline{g}_i = \tilde{a}^i \frac{\partial \Theta^j}{\partial \tilde{\Theta}^i} \underline{g}_j = \tilde{a}^k \frac{\partial \Theta^j}{\partial \tilde{\Theta}^k} \underline{g}_j . \quad (\text{A1-15})$$

Somit können die Transformationsgleichungen vollständig angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^i &= \frac{\partial \tilde{\Theta}^i}{\partial \Theta^m} a^m, \quad a^i = \frac{\partial \Theta^i}{\partial \tilde{\Theta}^m} \tilde{a}^m, & \tilde{a}_i &= \frac{\partial \Theta^m}{\partial \tilde{\Theta}^i} a_m, \quad a_i = \frac{\partial \tilde{\Theta}^m}{\partial \Theta^i} \tilde{a}_m \\
\tilde{a}^{ij} &= \frac{\partial \tilde{\Theta}^i}{\partial \Theta^m} \frac{\partial \tilde{\Theta}^j}{\partial \Theta^n} a^{mn}, \quad a^{ij} = \frac{\partial \Theta^i}{\partial \tilde{\Theta}^m} \frac{\partial \Theta^j}{\partial \tilde{\Theta}^n} \tilde{a}^{mn}, & \tilde{a}^i_j &= \frac{\partial \tilde{\Theta}^i}{\partial \Theta^m} \frac{\partial \Theta^n}{\partial \tilde{\Theta}^j} a^m_n, \dots \\
\tilde{a}_i^j &= \frac{\partial \Theta^m}{\partial \tilde{\Theta}^i} \frac{\partial \tilde{\Theta}^j}{\partial \Theta^n} a_m^n, \dots & \tilde{a}_{ij} &= \frac{\partial \Theta^m}{\partial \tilde{\Theta}^i} \frac{\partial \Theta^n}{\partial \tilde{\Theta}^j} a_{mn}, \dots \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{A1-16}$$

Um Tensorkoordinaten differenzieren zu können, was notwendig ist, um die Verzerrungen zu berechnen, müssen weitere Überlegungen vorausgehen. Als erster Schritt sollen die kovarianten Basisvektoren partiell nach den krummlinigen Koordinaten abgeleitet werden:

$$\underline{g}_{i,j} \equiv \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \Theta^j} = \frac{\partial}{\partial \Theta^j} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \Theta^i} \underline{e}_k \right) = \frac{\partial^2 x_k}{\partial \Theta^j \partial \Theta^i} \underline{e}_k = \frac{\partial^2 x_k}{\partial \Theta^j \partial \Theta^i} \frac{\partial \Theta^m}{\partial x_k} \underline{g}_m, \tag{A1-17}$$

wobei zuerst Gleichung A1-5 und dann Gleichung A1-8 verwendet wurde. Die darin auftauchenden partiellen Differentialquotienten nennt man Christoffel-Symbole zweiter Art:

$$\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m = \frac{\partial^2 x_k}{\partial \Theta^i \partial \Theta^j} \frac{\partial \Theta^m}{\partial x_k}, \tag{A1-18}$$

mit denen Ableitung der Basisvektoren verkürzt geschrieben werden kann. Es läßt sich leicht zeigen, daß auch die kontravarianten Basisvektoren mit diesen Symbolen abgeleitet werden können,

$$\underline{g}_{i,j} = \Gamma_{ij}^m \underline{g}_m, \quad \underline{g}^i_{,j} = -\Gamma_{jm}^i \underline{g}^m. \tag{A1-19}$$

Diese Christoffel-Symbole lassen sich mittels der Metrik einer Basis berechnen. Die Metrik eines Koordinatensystems in einem Punkt des Raumes ist durch die Länge der Basisvektoren und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln in diesem Punkt festgelegt. Die Metrikkoeffizienten sind die Koeffizienten des Einheitstensors (δ -Tensor), die in gemischt ko- oder kontravarianter Darstellung dem Kronecker-Delta entsprechen. Im folgenden seien die vier Darstellungen des δ -Tensors angegeben und ohne Herleitung die Berechnungsvorschrift für die Metrikkoeffizienten g_{ij} :

$$\begin{aligned}
\underline{\delta} &= g^{ij} \underline{g}_i \underline{g}_j = \delta_i^j \underline{g}_j \underline{g}^i = \delta_i^j \underline{g}^i \underline{g}_j = g_{ij} \underline{g}^i \underline{g}^j, \\
g^{ij} &= g^{ji} = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j, \quad g_{ij} = g_{ji} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j, \\
\delta_i^j &= \delta_j^i = \underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{A1-20}$$

Man sieht hier, daß ko- und kontravariante Basisvektoren die Orthogonalitätsrelation erfüllen. Bei Rechnungen in allgemeinen Koordinatensystemen ist es daher häufig sehr angenehm, sowohl mit kovarianter als auch mit kontravarianter Darstellung von Tensoren zu arbeiten, da sich so viele Vereinfachungen ergeben.

Nun soll die Möglichkeit der Berechnung der Christoffel-Symbole aus den Metrikkoeffizienten aufgezeigt werden, da sich damit umständlichere Differentiationen umgehen lassen :

$$\Gamma_{lm}^n = \frac{1}{2} g^{nk} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial \Theta^m} + \frac{\partial g_{km}}{\partial \Theta^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial \Theta^k} \right) , \quad (A1-21)$$

zwar müssen hier die Metrikkoeffizienten differenziert werden, doch gestaltet sich diese einfache partielle Differentiation praktischer als die in Gleichung A1-18 .

Mit diesen vorausgegangenen Überlegungen können die partiellen und kovarianten Ableitungen von Tensoren und Tensorkoordinaten hingeschrieben werden. Exemplarisch soll dies an Hand einer Ableitung eines Tensors zweiter Stufe in gemischter (ko - und kontravarianter) Darstellung geschehen, zuvor jedoch sei nochmals auf folgende Schreibweise hingewiesen:

$$(\)_{,k} \equiv \frac{\partial (\)}{\partial \Theta^k} . \quad (A1-22)$$

Dann ergibt sich nach der Produktregel folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \underline{a}_{\underline{i},k} &= \left(a^i_j \underline{g}_i \underline{g}^j \right)_{,k} = a^i_{j,k} \underline{g}_i \underline{g}^j + a^i_j \underline{g}_{i,k} \underline{g}^j + a^i_j \underline{g}_i \underline{g}^j_{,k} , \\ &= a^i_{j,k} \underline{g}_i \underline{g}^j + a^i_j \Gamma_{ik}^m \underline{g}_m \underline{g}^j - a^i_j \underline{g}_i \Gamma_{km}^j \underline{g}^m , \end{aligned} \quad (A1-23)$$

woraus mit Indexumbennungen der gebundenen Indizes folgt:

$$\underline{a}_{\underline{i},k} = \left(a^i_{j,k} + a^l_j \Gamma_{lk}^i - a^i_l \Gamma_{kj}^l \right) \underline{g}_i \underline{g}^j , \quad (A1-24)$$

wobei der Ausdruck in Klammern als kovariante oder absolute Ableitung krummliniger Tensorkoordinaten bezeichnet und wie folgt abgekürzt wird:

$$a^i_j \Big|_k \equiv a^i_{j,k} + \Gamma_{lk}^i a^l_j - \Gamma_{kj}^l a^i_l . \quad (A1-25)$$

Analog ergeben sich die kovarianten Ableitungen anderer Tensorkoordinaten zum Beispiel zu

$$\begin{aligned}
\underline{a}_{,k} &= \underline{a}|_k \\
\underline{a}_{,k} &= \underline{a}_i|_k \underline{g}^i = \underline{a}^i|_k \underline{g}_i, \\
&= (\underline{a}_{i,k} - \Gamma_{ik}^m \underline{a}_m) \underline{g}^i = (\underline{a}^i_{,k} + \Gamma_{mk}^i \underline{a}^m) \underline{g}_i, \\
\underline{\underline{a}}_{,k} &= \underline{a}^{ij}|_k \underline{g}_i \underline{g}_j = \underline{a}_{ij}|_k \underline{g}^i \underline{g}^j \dots\dots
\end{aligned} \tag{A1-26}$$

Die Bezeichnung der kovarianten Ableitung ist lediglich gewählt worden, um von der gewöhnlichen Ableitung zu unterscheiden. Bei einem Skalar (1. Zeile in Gleichung A1-26) stimmen beide Ableitungen überein, da es keine Basis gibt, die mit abgeleitet werden muß. Dies ist die Besonderheit bei Tensoren, die durch die vorangegangenen Darstellungen aufgezeigt werden sollte.

Bevor mit Berechnungen begonnen wird, soll nochmals das Heben und Senken von Tensorindizes an einem Beispiel erläutert werden, da dies eine grundlegende Operation darstellt. Für einen Vektor gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{a} &= \underline{a}_i \underline{g}^i = \underline{a}^i \underline{g}_i \quad | \cdot \underline{g}^j \Rightarrow \underline{a}_i \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j = \underline{a}^i \underline{g}_i \cdot \underline{g}^j, \\
&\Rightarrow \underline{a}_i \underline{g}^{ij} = \underline{a}^i \delta_i^j, \\
&\Rightarrow \underline{a}_i \underline{g}^{ij} = \underline{a}^j.
\end{aligned} \tag{A1-27}$$

Dabei sind die Zusammenhänge aus Gleichung A1-20 ausgenutzt worden. Mit den Metrikkoeffizienten können Tensorindizes von Tensoren beliebiger Stufe also herauf- und heruntergezogen werden:

$$\begin{aligned}
\underline{g}^i &= g^{im} \underline{g}_m, \quad \underline{g}_i = g_{im} \underline{g}^m \\
\underline{a}^{ij} &= g^{im} \underline{a}_m^j = g^{jn} \underline{a}_n^i = g^{im} g^{jn} \underline{a}_{mn}, \\
\underline{a}_i^j &= g_{im} g^{jn} \underline{a}_n^m \dots\dots
\end{aligned} \tag{A1-28}$$

Hier ist auch zu erkennen, daß die Metrikkoeffizienten, also die Koeffizienten des Einheitstensors in rein ko - oder kontravarianter Darstellung, auch als Koeffizienten der Basisvektoren in der Darstellung durch die Basisvektoren mit dem genau anders gestellten Index interpretiert werden können (1. Zeile der Gleichung A1-28). Und um noch einer begrifflichen Verwirrung vorzubeugen, sei erwähnt, daß eine Tensorkoordinate bezüglich einer kovarianten Basis kontravariant dargestellt wird und umgekehrt, siehe Gleichung A1-7.

Zum Abschluß der allgemeinen Einführung wird der Verzerrungstensor nach Green wie folgt definiert:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\underline{g}_i \cdot \underline{v}_{,j} + \underline{g}_j \cdot \underline{v}_{,i} + \underline{v}_{,i} \cdot \underline{v}_{,j} \right), \tag{A1-29}$$

wobei \underline{v} der Verschiebungsvektor im \mathbb{R}^3 ist. Dieser Verzerrungstensor beschreibt, wie sich die Abstände von Massenpunkten im Raum bei Verformung ändern, und er ergibt sich aus der Differenz zwischen einem verformten und einem unverformten Bogenelement im Raum. Dafür muß zwischen den Basen im verformten und im unverformten Körper unterschieden werden, wozu vereinbart wird, daß alle Größen im verformten Körper mit großen, im unverformten Körper mit kleinen Buchstaben geschrieben werden. Für die Ortsvektoren zu einem Punkt gilt dann:

$$\begin{aligned}\underline{r}(\Theta^j) &= \underline{r}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = x_i(\Theta^i) \underline{e}_i \quad , \\ \underline{R}(\Theta^j) &= \underline{r}(\Theta^j) + \underline{v}(\Theta^j) = X_i(\Theta^i) \underline{e}_i \quad .\end{aligned}\tag{A1-30}$$

Bildet man die partiellen Ableitungen eines Ortsvektors, so ergibt sich die kovariante Basis in diesem Punkt, denn es gilt:

$$\underline{r}_{,k} = (x_i \underline{e}_i)_{,k} = \frac{\partial x_i}{\partial \Theta^k} \underline{e}_i = \underline{g}_k \quad ,\tag{A1-31}$$

nach Gleichung A1-5,a. Durch differenzieren von \underline{R} erhält man analog \underline{G} , und wenn diese Basis berechnet ist, so können auch deren Metrikkoeffizienten in Analogie zu Gleichung A1-20 berechnet werden:

$$\begin{aligned}\underline{G}_i &= \underline{R}_{,i} = \underline{r}_{,i} + \underline{v}_{,i} = \underline{g}_i + \underline{v}_{,i} \quad , \\ G_{ij} &= \underline{G}_i \cdot \underline{G}_j = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j + \underline{g}_i \cdot \underline{v}_{,j} + \underline{g}_j \cdot \underline{v}_{,i} + \underline{v}_{,i} \cdot \underline{v}_{,j} \quad .\end{aligned}\tag{A1-32}$$

Mit diesen Metrikkoeffizienten kann man unter anderem die Bogenelemente im verformten und unverformten Zustand berechnen:

$$\begin{aligned}ds^2 &= d\underline{r} \cdot d\underline{r} = \underline{r}_{,i} d\Theta^i \cdot \underline{r}_{,j} d\Theta^j = g_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \quad , \\ dS^2 &= d\underline{R} \cdot d\underline{R} = \underline{R}_{,i} d\Theta^i \cdot \underline{R}_{,j} d\Theta^j = G_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \quad .\end{aligned}\tag{A1-33}$$

Die Differenz ergibt sich zu :

$$dS^2 - ds^2 = (G_{ij} - g_{ij}) d\Theta^i d\Theta^j = 2\gamma_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \quad ,\tag{A1-34}$$

und man definiert den Verzerrungstensor dann wie folgt

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) \quad .\tag{A1-35}$$

Mit Gleichung A1-32 und A1-20 ergibt sich somit die in Gleichung A1-29 angegebene Berechnungsvorschrift für den Verzerrungstensor im dreidimensionalen Raum. Da für seine Berechnung keine weiteren Voraussetzungen nötig sind, anders als in der Schalentheorie, in die

noch die Feldtheorie im zweidimensionalen Raum (Geometrie auf der Fläche im euklidischen Raum) Eingang findet, soll mit ihm gerechnet werden. Im weiteren werden dann nur die ebenen Verzerrungen berechnet, die interessieren und die Vereinfachungen der Schalentheorie auf andere Art und Weise eingeführt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß es sich bei dem Verzerrungstensor um die Lagrangesche Darstellung im Koordinatensystem des unverformten Körpers handelt (1. Teil der Gleichung A1-36):

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \gamma_{ij} \underline{\underline{g}}^i \underline{\underline{g}}^j = \Gamma_{ij} \underline{\underline{G}}^i \underline{\underline{G}}^j \quad . \quad (\text{A1-36})$$

Soll eine Vorverformung (z.B. Vorkrümmung $w_0(x,y)$) mit berücksichtigt werden, so wäre die Eulersche Darstellung im Koordinatensystem des vorverformten Körpers als Ausgangsdarstellung zu nehmen oder ein entsprechend veränderter Verschiebungsvektor anzusetzen. Eine nicht vollständige Darstellung dieser Ergebnisse, in die bereits Vereinfachungen eingegangen sind, findet man in [2].

A.2 Formulierung in Zylinderkoordinaten

In diesem Kapitel sollen die Koordinaten des Verzerrungstensors in Zylinderkoordinaten für ein dreidimensionales Kontinuum berechnet werden. Entsprechend den in Anhang A1 gemachten Erklärungen müssen dafür zuerst Basis und Metrik der Zylinderkoordinaten berechnet werden, zuerst jedoch werden die Zylinderkoordinaten eingeführt :

$$\Theta^1 = r \quad , \quad \Theta^2 = \varphi \quad , \quad \Theta^3 = z \quad . \quad (\text{A2-1})$$

Die Zusammenhänge zwischen kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten sind durch folgende Gleichungen gegeben :

$$\begin{aligned} x &= x_1(\Theta^i) = r \cos(\varphi) = \Theta^1 \cos(\Theta^2) \quad , \\ y &= x_2(\Theta^i) = r \sin(\varphi) = \Theta^1 \sin(\Theta^2) \quad , \\ z &= x_3(\Theta^i) = z = \Theta^3 \quad , \\ r &= \Theta^1(x_i) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \quad , \\ \varphi &= \Theta^2(x_i) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad , \\ z &= \Theta^3(x_i) = z = x_3 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A2-2})$$

Mit Gleichung A1-5,a und b ergeben sich die Basisvektoren dann zu :

$$\begin{aligned}
\underline{g}_1 = \underline{g}^1 &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} , \\
\underline{g}_2 &= \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{g}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} \sin(\varphi) \\ \frac{1}{r} \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} , \\
\underline{g}_3 = \underline{g}^3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{A2-3}$$

Damit können nach Gleichung A1-19 die Metrikkoeffizienten berechnet werden. Sie werden als Matrix dargestellt, in der die Koordinaten des Einheitstensors dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
[g_{ij}] = [\underline{g}_i \cdot \underline{g}_j] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad [g^{ij}] = [\underline{g}^i \cdot \underline{g}^j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \\
[\underline{g}_i \cdot \underline{g}^j] = [\underline{g}^i \cdot \underline{g}_j] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}] .
\end{aligned} \tag{A2-4}$$

Die diagonale Besetzung der Matrix der Metrikkoeffizienten weist darauf hin, daß die Basisvektoren orthogonal zueinander sind, und die Einsen in den zwei Positionen darauf, daß die entsprechenden Basisvektoren Einheitsvektoren sind, was beides aus den Eigenschaften eines Skalarproduktes für Vektoren folgt. Die Beträge des zweiten ko- und kontravarianten Basisvektors sind reziprok.

Aus Gleichung A1-21 lassen sich jetzt die Christoffel-Symbole berechnen. Dies sind insgesamt 27 Stück (3 Indizes mit dem Wertebereich 3), doch ergeben sich nur wenige, die ungleich Null sind. Dies liegt darin begründet, daß es nur einen Metrikkoeffizient gibt, der nicht konstant ist. Es ergeben sich folgende Christoffel-Symbole, die als einzige ungleich Null sind:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} , \quad \Gamma_{22}^1 = -r . \tag{A2-5}$$

Damit kann die Berechnung des Verzerrungstensors erfolgen, wenn für den Verschiebungsvektor folgender Ansatz gemacht wird:

$$\underline{v} = v_i(\Theta^k) \underline{g}^i = v^i(\Theta^k) \underline{g}_i . \tag{A2-6}$$

Mit diesem Ansatz sollen die Anteile des Verzerrungstensors getrennt berechnet werden, Gleichung A1-32. Zuerst wird das erste Skalarprodukt ausgewertet:

$$\begin{aligned}\underline{g}_i \cdot \underline{v}_{,j} &= \underline{g}_i \cdot \left(v_k|_j \underline{g}^k \right) = v_k|_j \underline{g}_i \cdot \underline{g}^k = v_k|_j \delta_{ik} = v_i|_j, \\ &= v_{i,j} - \Gamma_{ij}^m v_m\end{aligned}\quad , \quad (A2-7)$$

oder in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{aligned}\left[\underline{g}_i \cdot \underline{v}_{,j} \right] &= \begin{bmatrix} v_{1,1} - \Gamma_{11}^m v_m & v_{1,2} - \Gamma_{12}^m v_m & v_{1,3} - \Gamma_{13}^m v_m \\ v_{2,1} - \Gamma_{21}^m v_m & v_{2,2} - \Gamma_{22}^m v_m & v_{2,3} - \Gamma_{23}^m v_m \\ v_{3,1} - \Gamma_{31}^m v_m & v_{3,2} - \Gamma_{32}^m v_m & v_{3,3} - \Gamma_{33}^m v_m \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} - \frac{1}{r} v_2 & v_{1,3} \\ v_{2,1} - \frac{1}{r} v_2 & v_{2,2} + r v_1 & v_{2,3} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (A2-8)$$

Der zweite Summand im Ausdruck für den Verzerrungstensor ist gerade das transponierte von dem zuvor berechneten, da die Indizes vertauscht sind. Wie oben zu erkennen ist, handelt es sich aber um einen symmetrischen Tensoranteil, was letztendlich bedeutet, daß es sich um denselben Ausdruck handelt. Eine erneute Berechnung ist also nicht notwendig.

Es muß nur noch der letzte Anteil berechnet werden. Mit der kovarianten Ableitung des Verschiebungsvektors nach Gleichung A1-26:

$$\underline{v}_{,i} = v_k|_i \underline{g}^k = \left(v_{k,i} - \Gamma_{ki}^m v_m \right) \underline{g}^k, \quad \underline{v}_{,j} = v_p|_j \underline{g}^p = \left(v_{p,j} - \Gamma_{pj}^n v_n \right) \underline{g}^p, \quad (A2-9)$$

folgt für diesen letzten Term:

$$\begin{aligned}\underline{v}_{,i} \cdot \underline{v}_{,j} &= \left(v_{k,i} - \Gamma_{ki}^m v_m \right) \left(v_{p,j} - \Gamma_{pj}^n v_n \right) \underline{g}^k \cdot \underline{g}^p, \\ &= \left(v_{k,i} - \Gamma_{ki}^m v_m \right) \left(v_{p,j} - \Gamma_{pj}^n v_n \right) g^{kp}.\end{aligned}\quad (A2-10)$$

Dieser Ausdruck soll ausgewertet werden, und zwar für jedes Paar i,j einzeln. Es ist darauf zu achten, daß $k=p$ sein muß, da sonst der Metrikkoeffizient Null ist (Gleichung A2-4), was die erste Vereinfachung liefert. Dann werden noch die vielen Nullen bei den Christoffel-Symbolen ausgenutzt, so daß sich folgende Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned}
\underline{v}_{,1} \cdot \underline{v}_{,1} &= (v_{k,1} - \Gamma_{k1}^m v_m) (v_{p,1} - \Gamma_{p1}^n v_n) g^{kp} \quad , \\
&= \sum_{k=1}^3 (v_{k,1} - \Gamma_{k1}^m v_m) (v_{k,1} - \Gamma_{k1}^n v_n) g^{kk} \quad , \\
&= g^{11} (v_{1,1}) (v_{1,1}) + g^{22} (v_{2,1} - \Gamma_{21}^2 v_2) (v_{2,1} - \Gamma_{21}^2 v_2) + g^{33} (v_{3,1}) (v_{3,1}) \quad .
\end{aligned} \tag{A2-11}$$

$$\begin{aligned}
\underline{v}_{,1} \cdot \underline{v}_{,2} &= \underline{v}_{,2} \cdot \underline{v}_{,1} = (v_{k,1} - \Gamma_{k1}^m v_m) (v_{p,2} - \Gamma_{p2}^n v_n) g^{kp} \quad , \\
&= \sum_{k=1}^3 (v_{k,1} - \Gamma_{k1}^m v_m) (v_{k,2} - \Gamma_{k2}^n v_n) g^{kk} \quad , \\
&= g^{11} (v_{1,1}) (v_{1,2} - \Gamma_{12}^2 v_2) + g^{22} (v_{2,1} - \Gamma_{21}^2 v_2) (v_{2,2} - \Gamma_{22}^1 v_1) + g^{33} (v_{3,1}) (v_{3,2}) \quad .
\end{aligned} \tag{A2-12}$$

$$\begin{aligned}
\underline{v}_{,1} \cdot \underline{v}_{,3} &= \underline{v}_{,3} \cdot \underline{v}_{,1} = (v_{k,1} - \Gamma_{k1}^m v_m) (v_{p,3} - \Gamma_{p3}^n v_n) g^{kp} \quad , \\
&= \sum_{k=1}^3 (v_{k,1} - \Gamma_{k1}^m v_m) (v_{k,3} - \Gamma_{k3}^n v_n) g^{kk} \quad , \\
&= g^{11} (v_{1,1}) (v_{1,3}) + g^{22} (v_{2,1} - \Gamma_{21}^2 v_2) (v_{2,3}) + g^{33} (v_{3,1}) (v_{3,3}) \quad .
\end{aligned} \tag{A2-13}$$

$$\begin{aligned}
\underline{v}_{,2} \cdot \underline{v}_{,2} &= (v_{k,2} - \Gamma_{k2}^m v_m) (v_{p,2} - \Gamma_{p2}^n v_n) g^{kp} \quad , \\
&= \sum_{k=1}^3 (v_{k,2} - \Gamma_{k2}^m v_m) (v_{k,2} - \Gamma_{k2}^n v_n) g^{kk} \quad , \\
&= g^{11} (v_{1,2} - \Gamma_{12}^2 v_2)^2 + g^{22} (v_{2,2} - \Gamma_{22}^1 v_1)^2 + g^{33} (v_{3,2})^2 \quad .
\end{aligned} \tag{A2-14}$$

$$\begin{aligned}
\underline{v}_{,2} \cdot \underline{v}_{,3} &= \underline{v}_{,3} \cdot \underline{v}_{,2} = (v_{k,2} - \Gamma_{k2}^m v_m) (v_{p,3} - \Gamma_{p3}^n v_n) g^{kp} \quad , \\
&= \sum_{k=1}^3 (v_{k,2} - \Gamma_{k2}^m v_m) (v_{k,3} - \Gamma_{k3}^n v_n) g^{kk} \quad , \\
&= g^{11} (v_{1,2} - \Gamma_{12}^2 v_2) (v_{1,3}) + g^{22} (v_{2,2} - \Gamma_{22}^1 v_1) (v_{2,3}) + g^{33} (v_{3,2}) (v_{3,3}) \quad .
\end{aligned} \tag{A2-15}$$

$$\begin{aligned}
\underline{v}_{,3} \cdot \underline{v}_{,3} &= (v_{k,3} - \Gamma_{k3}^m v_m) (v_{p,3} - \Gamma_{p3}^n v_n) g^{kp} \quad , \\
&= \sum_{k=1}^3 (v_{k,3} - \Gamma_{k3}^m v_m) (v_{k,3} - \Gamma_{k3}^n v_n) g^{kk} \quad , \\
&= g^{11} (v_{1,3})^2 + g^{22} (v_{2,3})^2 + g^{33} (v_{3,3})^2 \quad .
\end{aligned} \tag{A2-16}$$

Damit sind die Koeffizienten des Verzerrungstensors für ein 3-D-Kontinuum, welches in Zylinderkoordinaten beschrieben wird, berechnet. Nun soll eine Umschreibung auf die Bezeichnungsweise, die auch in dieser Arbeit verwendet wird, vorgenommen werden, bevor die Zusammensetzung des Tensors und seine Umschreibung in physikalische Koordinaten erfolgt. Dabei soll allerdings nicht auf den ganzen Formalismus der physikalischen Koordinaten eingegangen werden, sondern lediglich eine sehr anschauliche Erklärung für die Verwendung von physikalischen Koordinaten gebracht werden. Vorerst aber folgende Umschreibung:

Koordinaten

$$r \Rightarrow r ,$$

$$\varphi \Rightarrow \frac{y}{r} , \Rightarrow \frac{\partial(\quad)}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial(\quad)}{\partial y} = r \frac{\partial(\quad)}{\partial y} , \quad (\text{A2-17})$$

$$z \Rightarrow z ,$$

Verschiebungen

$$v_1 \Rightarrow w ,$$

$$v_2 \Rightarrow r v ,$$

$$v_3 \Rightarrow x ,$$

(A2-18)

womit sich dann für den ersten und zweiten Anteil des Verzerrungstensors in Matrixschreibweise folgendes ergibt :

$$\begin{aligned} [\underline{g}_i \cdot \underline{v}_j] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} & r \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{(rv)}{r} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{(rv)}{r} & r \frac{\partial(rv)}{\partial y} + rw & \frac{\partial(vr)}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial r} & r \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} , \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} & r \frac{\partial w}{\partial y} - v & \frac{\partial w}{\partial x} \\ r \frac{\partial v}{\partial r} & r^2 \frac{\partial v}{\partial y} + rw & r \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial r} & r \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (\text{A2-19})$$

Der letzte Anteil wird auch in einer Matrix zusammengefaßt, wobei diese aus Platzgründen in drei Teile zerlegt wird, so daß sie hier dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned}
[\underline{v}_{,i} \cdot \underline{v}_{,j}] = & \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(vr)}{\partial r} - \frac{rv}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(r \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{rv}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial(vr)}{\partial y}\right)^2 + \left(r \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \text{symm} \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{rv}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(vr)}{\partial r} - \frac{rv}{r}\right) \left(r \frac{\partial(vr)}{\partial y} + rw\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(vr)}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial(vr)}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ 0 & 0 & \left(r \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{rv}{r}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial(vr)}{\partial y} + rw\right) \left(\frac{\partial(vr)}{\partial x}\right) + \left(r \frac{\partial u}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \text{symm} & \text{symm} & \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(vr)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{A2-20}$$

Aus der Gleichung A1-29 folgt jetzt mit den berechneten Anteilen für den Verzerrungstensor:

$$[\gamma_{ij}] = \frac{1}{2} \left([\underline{g}_{,i} \cdot \underline{v}_{,j}] + [\underline{g}_{,j} \cdot \underline{v}_{,i}]^T + [\underline{v}_{,i} \cdot \underline{v}_{,j}] \right). \tag{A2-21}$$

Auf eine Gesamtdarstellung soll verzichtet werden, da der Ausdruck zu lang werden würde und kein Erkenntnisgewinn bringt. Statt dessen ist es interessant, die beiden ersten Anteile zu addieren und durch zwei zu teilen. Dies stellt dann den linearen Verzerrungstensor dar, [3].

$$[\gamma_{ij}^{(L)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{r}{2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{2} + \frac{r}{2} \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \text{symm} & r^2 \frac{\partial v}{\partial y} + rw & \frac{r}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{r}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \text{symm} & \text{symm} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{A2-22}$$

Dem aufmerksamen Leser fällt spätestens an dieser Stelle auf, daß diese Verzerrungen nicht ganz denen in Kapitel 2.4 entsprechen. Erstens sind es andere Terme und zweitens stimmen sie in ihren Einheiten nicht überein. Das zweite Problem läßt sich mit den physikalischen Koordinaten beheben, was zum Teil schon durch die Umbenennungen gemacht wurde, doch dabei wurde die Basis, in der der Verzerrungstensor dargestellt wird, nicht berührt. Bedenkt

man, daß die Indizes unten stehen, so wird klar, daß der Verzerrungstensor bezüglich der kontravarianten Basis dargestellt ist:

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \gamma_{ij} \underline{\underline{g}}^i \underline{\underline{g}}^j . \quad (\text{A2-23})$$

Schaut man sich die berechneten Basisvektoren einmal genauer an, Gleichung A2-3, so ist zu erkennen, daß der zweite kontravariante Basisvektor keinen konstanten Betrag hat und eine andere Einheit hat als der erste und dritte. Die Idee der physikalischen Koordinaten ist es, die Tensoren bezüglich konstanter Einheitsvektoren darzustellen, wenn dies möglich ist. In diesem Fall der Zylinderkoordinaten braucht bei dem zweiten kontravarianten Basisvektor nur der Faktor r^{-1} herausgezogen zu werden und den Tensorkoordinaten mit dem entsprechenden Index zugeordnet werden.

Formal geht man dabei über die Metrik (von ‘Maß’), deren Koeffizienten Auskunft über die Beträge der Basisvektoren geben, doch soll darauf hier nicht näher eingegangen werden, da im Falle der Zylinderkoordinaten dieser Zusammenhang auch so ersichtlich ist, denn es gilt :

$$\frac{\underline{\underline{g}}_2}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{\underline{\underline{g}}^2}{\sqrt{g^{22}}} \equiv \underline{\underline{g}}^{(2)} , \quad |\underline{\underline{g}}^{(2)}| = 1 . \quad (\text{A2-24})$$

Dies ist keine allgemeingültige Aussage, sie gilt nur für Basen, deren Basisvektoren orthogonal sind, wie die der Zylinderkoordinaten. Die anderen Vektoren sind identisch und konstant vom Betrag eins, so daß sie gleich als physikalische Basisvektoren übernommen werden können, die dann dadurch gekennzeichnet werden, daß ihre Indizes in spitzen Klammern stehen. Dies wird auch bei Tensorkoordinaten gemacht, wenn sie bezüglich physikalischer Basen angegeben werden. Die Koeffizienten des Verzerrungstensors müssen also mit dem Faktor r^{-1} multipliziert werden, jedesmal, wenn ein Index 2 ist, oder r^{-2} wenn beide Indizes 2 sind. Daraus folgt also:

$$\underline{\underline{\Gamma}}^{(L)} = \gamma_{ij}^{(L)} \underline{\underline{g}}^i \underline{\underline{g}}^j = \gamma_{(ij)}^{(L)} \underline{\underline{g}}^{(i)} \underline{\underline{g}}^{(j)} , \quad (\text{A2-25})$$

$$\left[\gamma_{(ij)}^{(L)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{2r} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \text{symm} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \text{symm} & \text{symm} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} .$$

Damit und mit dem nichtlinearen Anteil, der auch in seinen Koordinaten mit demselben Faktor an denselben Stellen multipliziert werden muß, sind die Verzerrungen vollständig beschrieben. Nun können die Annahmen für Flächentragwerke verarbeitet werden, doch zuvor wird noch der nichtlineare Anteil des Verzerrungstensors vereinfacht und auf physikalische Koordinaten gebracht:

$$\begin{aligned}
\left[\gamma_{(ij)}^{(NL)} \right] = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 & \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{r} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \\ \text{symm} & \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{r} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \text{symm} & \text{symm} & \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A2-26}$$

Jetzt sind alle Anteile berechnet und die Komponenten des gesamten Verzerrungstensors ergeben sich aus:

$$\gamma_{(ij)} = \gamma_{(ij)}^{(L)} + \gamma_{(ij)}^{(NL)} . \tag{A2-27}$$

Als Beispiel soll nun ein Element herausgegriffen werden :

$$\gamma_{(22)} = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r}}_{\text{linearer}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}_{\text{nicht-linearer Anteil}} . \tag{A2-28}$$

Dieser Term enthält mehr Aussagen als für ε_y in vorherigen Gleichungen, doch unter Vernachlässigung von nichtlinearen Termen und bei Einführung der Annahmen für Flächentragwerke entspricht das vorherigen Zusammenhängen.

A.3 Vereinfachungen für Flächentragwerke

Zum Abschluß der tensoranalytischen Beschreibung soll in einer kurzen Zusammenfassung auf die Vereinfachungen eingegangen werden, die den in dieser Arbeit verwendeten Gleichungen zugrunde liegen.

Im wesentlichen können da die Annahmen vom Ebenbleiben der Querschnitte und Senkrechtbleiben der Querschnitte auf der neutralen Ebene genannt werden. Diese Annahmen setzen dünne Flächentragwerke voraus, so daß Schubstarrheit angenommen werden kann. Die Veränderungen der Verschiebung w in radialer, also auf der Neutralebene senkrechter Richtung wird vernachlässigt, da sie klein sind und keine äußere senkrechte Belastung vorhanden ist. Das alles führt zu folgenden Vereinfachungen:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad . \quad (\text{A3-1})$$

Damit ergibt sich für den linearen Anteil des Verzerrungstensors aus Gleichung A2-25:

$$\left[\gamma_{(ij)}^{(L)} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{2r} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \text{symm} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \text{symm} & \text{symm} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} . \quad (\text{A3-2})$$

Hiermit sind alle Größen auf Ableitungen in der Fläche x,y zurückgeführt, so daß eine neue Beschreibung des linearen Anteils des Verzerrungszustandes vorgenommen werden kann, wenn diese Abkürzungen eingeführt werden :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &\equiv \gamma_{(33)}^{(L)} = \frac{\partial u}{\partial x} , \\ \epsilon_y &\equiv \gamma_{(22)}^{(L)} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} , \\ \epsilon_{xy} &\equiv \gamma_{(23)}^{(L)} + \gamma_{(32)}^{(L)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} , \\ \beta_x &\equiv \gamma_{(13)}^{(L)} = \frac{\partial w}{\partial x} , \\ \beta_y &\equiv \gamma_{(12)}^{(L)} + \frac{v}{2r} = \frac{\partial w}{\partial y} , \end{aligned} \quad (\text{A3-3,a-e})$$

wobei die ersten beiden Größen, ϵ_x und ϵ_y , die Verzerrungen in Richtung von x und y darstellen. ϵ_{xy} gibt die Schubverzerrung an, und die beiden β geben die Verdrehungen der Querschnitte an, deren Normalen in x oder y Richtung zeigen. Um die Größen β nur von x und

y abhängig zu bekommen, ist die Addition in Gleichung A3-3,e notwendig. Sie bedeutet praktisch, daß der Term $\frac{v}{2r}$ nicht beachtet wird. A priori sind aber die Verschiebungen, und gerade die tangentialen, klein gegenüber r, so daß der Fehler verschwindend klein ist. Bei starker Krümmung und dicken Bauteilen wäre diese Vernachlässigung aber nicht möglich.

Die anschauliche Interpretation des Termes $\frac{v}{2r}$ bei β_y ist nicht so offensichtlich wie die des Termes $\frac{w}{r}$ bei ϵ_y , doch bietet sich diese an: Die Basis im Punkt besteht natürlich aus geraden Vektoren (y ist die tangentielle Richtung), eine Verschiebung in diese Richtung würde eine scheinbare Querschnittsneigung im Vergleich zum ursprünglichen Zustand bewirken, da sie im Bogen umgeht. Sie stellt jedoch keine tatsächliche Querschnittsneigung dar, muß also wieder abgezogen werden.

Die Voraussetzungen lassen auch Annahmen auf der Ebene der Verschiebungen zu, so daß weitere Vereinfachungen möglich sind. Dazu werden auch die Verschiebungen auf Größen in der Neutralebene zurückgeführt:

$$\begin{aligned} u(r, y, x) &= u_0(y, x) - (r - r_0)\beta_x(y, x) \quad , \\ v(r, y, x) &= v_0(y, x) - (r - r_0)\beta_y(y, x) \quad , \\ w(r, y, x) &= w(y, x) \quad . \end{aligned} \tag{A3-4,a,b,c}$$

Der Wert r_0 steht hierbei für die radiale Koordinate der Neutralebene. Die Notwendigkeit, vor die Verdrehungen ein negatives Vorzeichen zu setzen, ergibt sich aus der Tatsache, daß Ableitungen von $w(x, y)$, die kleiner als Null sind, positive Verschiebungen in x und y hervorrufen. Diese Verschiebungsansätze werden jetzt in die Gleichung A3-3,a,b,c eingesetzt. Dann ergibt sich :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - (r - r_0) \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - (r - r_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \equiv \epsilon_{x0} + (r - r_0)\kappa_x \quad , \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - (r - r_0) \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{w}{r} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - (r - r_0) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{r} \equiv \epsilon_{y0} + \frac{w}{r} + (r - r_0)\kappa_y \quad , \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - (r - r_0) \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - (r - r_0) 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad , \\ &= \epsilon_{xy0} + (r - r_0)\kappa_{xy} \quad . \end{aligned} \tag{A3-5,a,b,c}$$

Hieraus ist auch die Notwendigkeit der Vernachlässigung des oben angesprochenen Termes zu erkennen, da sonst im β_y nochmals ein $v(x, y)$ stehen würde, welches wiederum ein β_y enthält, u.s.w. Der obige Verschiebungsansatz in Gleichung A3-4,b wäre so nicht möglich.

Mit den üblichen Definitionen für Scheibenkräfte und Plattenmoment, die man [1] entnimmt, und der Aufteilung der Verzerrungen in einen über den Querschnitt konstanten Anteil (Index 0, der dann weggelassen wird) und einen über den Querschnitt linearen Teil, der den Momenten

zugeordnet wird, stehen Verschiebungs- Verzerrungsrelationen und Materialgesetz da, wie sie in Kapitel 2.3 und 2.4 formuliert sind. Ein Beispiel soll dies zum Abschluß verdeutlichen :

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} &= G\epsilon_{xy} = G(\epsilon_{xy0} + (r - r_0)\kappa_{xy}) \quad , \\
 n_{xy} &\equiv \int_{r_0 - \frac{t}{2}}^{r_0 + \frac{t}{2}} \tau_{xy} dr = \int_{r_0 - \frac{t}{2}}^{r_0 + \frac{t}{2}} G(\epsilon_{xy0} + (r - r_0)\kappa_{xy}) dr = G \left[r\epsilon_{xy0} + \left(\frac{1}{2} r^2 - rr_0 \right) \kappa_{xy} \right]_{r_0 - \frac{t}{2}}^{r_0 + \frac{t}{2}} , \\
 &= G\epsilon_{xy0} t \quad , \\
 m_{xy} &\equiv \int_{r_0 - \frac{t}{2}}^{r_0 + \frac{t}{2}} (r - r_0) \tau_{xy} dr = G \left[\left(\frac{1}{2} r^2 - rr_0 \right) \epsilon_{xy0} + \left(\frac{r^3}{3} - r_0 r^2 + r_0^2 r \right) \kappa_{xy} \right]_{r_0 - \frac{t}{2}}^{r_0 + \frac{t}{2}} , \\
 &= G\kappa_{xy} \frac{t^3}{12} .
 \end{aligned} \tag{A3-6}$$

Es sei noch angemerkt, daß hierbei Exzentrizität ausgeschlossen wurde.

Anhang B: Literaturverzeichnis

- [1] Wiedemann, J.:
Leichtbau, Band 1: Elemente. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag 1986
- [2] Geier, B.:
Das Beulverhalten versteifter Zylinderschalen: Teil 1 Differentialgleichungen.
Z. Flugwiss. 14 (1966), Heft 7, S.306-323
Seggelke, P.; Geier, B.:
Das Beulverhalten versteifter Zylinderschalen: Teil 2 Beullasten. Z. Flugwiss. 15 (1967), Heft 12, S.477-490
- [3] Klingbeil, E.:
Tensorrechnung für Ingenieure. 2., überarbeitete Auflage, B.I. Hochschultaschenbücher, Band 197. Mannheim, Wien, Zürich: B.I. Wissenschaftsverlag, 1989
- [4] Schade, H.:
Tensoranalysis. 6., verbesserte Auflage. TU Berlin, Skript zur Vorlesung 1994
- [5] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.:
Taschenbuch der Mathematik. 25. Auflage. Stuttgart, Leipzig : B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Thun, Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch. Moskau: Verlag Nauka. 1991
- [6] Dörfler, T.:
Beulverhalten und Optimierung längsversteifter Gurtplatten unter Schub- und Druckbelastung. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1, Nr.229, Düsseldorf: VDI-Verlag 1993
- [7] Pflüger, A.:
Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin: Springer-Verlag 1975
- [8] Engeln-Müllges, G.; Reutter, F.:
Formelsammlung zur Numerischen Mathematik, mit Standard-Fortran 77-Programmen. 6., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Mannheim, Wien, Zürich: B.I. Wissenschaftsverlag 1988
- [9] Basar, Y.; Kraetzig, W. B.:
Mechanik der Flächentragwerke, Theorie, Berechnungsmethoden und Anwendungsbeispiele. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1985

-
- [10] Schmalstieg, M.:
Beulwerte axial belasteter, schwach gekrümmter Schalenstreifen bei beliebiger
Längsrandlagerung. Diplomarbeit, TU Berlin, ILR, unveröffentlicht 1994
- [11] Herbeck, L.:
Das lokale Beulen isotroper, gestringter Schalen unter Axialdruck. Deutscher Luft-
und Raumfahrt-Kongress, 1995, DGLR-JT95-081, Band 2, S.631-640, Bonn 1995
- [12] Caffrey, J. P.; Lee, J. M.:
Linear Static Analysis User's Guide (et al.). Los Angeles, California. The MacNeal-
Schwendler Corporation 1980, 81, 85, 94
- [13] Rittweger, A.:
Statik, Stabilität und Eigenschwingen anisotroper Rotationsschalen beliebigen
Meridians mit Übertragungsmatrizen Methode. Genehmigte Dissertation, RWTH
Aachen, 1992