

Diplomarbeit

Thema

Berechnung des symmetrischen und antimetrischen Beulverhaltens eines orthotropen Schalenstreifens

von

Ulf Bunge

Matr. Nr. 122 485

im Sommersemester 1996

bei

Prof. Dr.-Ing. J. Wiedemann

Dipl.-Ing. L. Herbeck

Institut für Luft- und Raumfahrt

Technische Universität Berlin

Inhaltsverzeichnis

Kapitel		Seite
	Bezeichnungen	4
1	Einführung	6
2	Modellformulierung	9
2.1	Voraussetzungen und Annahmen.....	9
2.2	Gleichgewichtsbedingungen	11
2.3	Materialgesetz.....	13
2.4	Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen.....	14
2.5	Kompatibilität	15
2.6	Randbedingungen.....	15
3	Verfahrensentwicklung	18
3.1	Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen.....	18
3.2	Proportionalitätsfaktoren und Vereinfachung.....	21
3.3	Aufteilung in symmetrische und antimetrische Lösungen	25
3.4	Überprüfung der Randbedingungen	28
3.5	Zusammenfassung und numerische Umsetzung.....	32
4	Vergleich mit einigen analytischen Lösungen	35
4.1	Variationsparameter und Abkürzungen.....	35
4.2	Der Beulwert	37
4.3	Beulwert in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis, ebener Schalenstreifen.....	39
4.4	Beulwert über Krümmung für gelenkige Lagerung	45

5	Girlandenkurven	53
5.1	Krümmungsmaß 5.....	53
5.2	Krümmungsmaß 15.....	59
5.3	Andere Krümmungsmaße.....	63
5.4	Schlußfolgerungen für Automatisierung	65
6	Ergebnisse	66
6.1	Ergebnisse zur Krümmungsvariation	66
6.1.1	Symmetrie.....	66
6.1.2	Antimetrie.....	70
6.1.3	Vergleich von Symmetrie und Antimetrie	72
6.1.4	Ein Ergebnis mit veränderlicher Scherzahl	76
6.2	Ergebnisse zur Einspannungsvariation	77
6.2.1	Symmetrie.....	77
6.2.2	Antimetrie.....	80
7	Beulformen	84
8	Zusammenfassung	87
Anhang		90
A	Übertragungsmatrizenmethode.....	90
B	Abbildungen.....	97
C	Literaturverzeichnis.....	106

Bezeichnungen

α_w, β_w	1	wirksames Seitenverhältnis der Platte und Kehrwert
β_{wmn}, β_{vmn}	1	Kehrwerte wirksamer Seitenverhältnisse für Platte und Scheibe mit Halbwellenanzahlen
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$	1	Verzerrungen, längs und quer, Schubverzerrung
ϵ	1	Hauptsteifigkeitsverhältnis
η	1	Kreuzzahl
φ, ψ	°	Winkel in Abb. 2.2
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	1/m	Krümmungen, längs und quer, Drillung
λ	1	Nullstelle des charakteristischen Polynomes im Quadrat
μ	1	Nullstelle des charakteristischen Polynomes
ν	1	Querkontraktionszahl
ρ	1	(geometrisches) Krümmungsmaß
Ω	1	Krümmungsparameter
ζ	1	Scherzahl
a, b	m	Länge und Breite des Beulfeldes
a/b	1	Beulfeldseitenverhältnis
$\underline{\underline{A}}$		Koeffizientenmatrix
a_{ij}		Matrizelemente für Antimetrie
$A, B, C, D,$		Matrizelemente, allgemein
B_i, C_i		Integrationskonstanten
dx, dy	m	vollständige Differentiale
B_x, B_y, B_{xy}	Nm	Biegesteifigkeiten, längs und quer, Kreuzsteifigkeit
c_{ij}, C_{ij}	N	i,j=1,2,3: Scheibensteifigkeiten
	Nm	i,j=4,5,6: Plattensteifigkeiten
c_{ij}^*, C_{ij}^*	1/N	i,j=1,2,3: Scheibennachgiebigkeiten
	1/Nm	i,j=4,5,6: Plattennachgiebigkeiten
$\underline{\underline{C}}_S, \underline{\underline{C}}_P, \underline{\underline{C}}_K$		Scheiben- und Plattensteifigkeitsmatrix, Koppelmatrix
$\underline{\underline{C}}$		Einspannmatrix
C_R	Nm	Randeinspannfedersteifigkeit
D_x, D_y, D_{xy}	N	Dehnsteifigkeiten, längs und quer, Schersteifigkeit
e_n	1/m ⁷	Polynomkoeffizienten
E	N/m ²	Elastizitätsmodul
$F(x,y)$	Nm	Airysche Spannungsfunktion
G	N/m ²	Schubmodul
i		imaginäre Einheit
k_n	1	Proportionalitätsfaktor

k	1	Beulwert
\underline{k}		Vektor mit Konstanten
l	m	geometrische Länge, Gesamtlänge
m, n		Beulhalbwellenanzahl in Längs- und Querrichtung
\underline{M}		Matrix der allgemeinen Lösungen
m_x, m_y, m_{xy}	N	Plattenmomente
m_{yR}	N	Randeinspannmoment
n_x, n_y, n_{xy}	N/m	Scheibenkräfte
n_{xz}, n_{yz}	N/m	Plattenquerkräfte
p_x	N/m	Drucklast
p_{xy}	N/m	Schublast
p_k, p_{kr}	N/m	kritische Last, Beullast
r	m	Radius
r, φ, z	$m, ^\circ, m$	Zylinderkoordinaten
s_{ij}		Matrixelemente für Symmetrie
t	m	Schalendicke
\underline{U}		Übertragungsmatrix
u_{ij}		Elemente der Übertragungsmatrix
u, v, w	m	Verschiebungen in x-, y- und z-Richtung
$\underline{v}, \underline{v}^*$		Zustandsvektor ohne und mit Einspannwirkung
\underline{v}^T		transponierter Zustandsvektor
x, y, z	m	physikalische Zylinderkoordinaten
$()^*$		Amplitudenwert
$()_k, ()_n, ()_{(k)}$		Zählindizes
\Re^n		n-dimensionaler Raum
$(\underline{\cdot})^{-1}$		invertierte Matrix

1 Einführung

In dieser Diplomarbeit soll das symmetrische und antimetrische Beulverhalten eines beliebig gekrümmten Schalenstreifens unter reiner Drucklast untersucht werden. Dabei ist der Einfluß von Orthotropie und beliebiger Randeinspannung zu berücksichtigen.

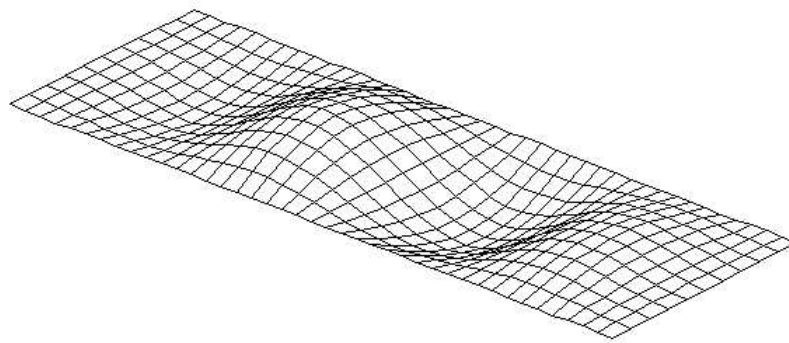


Abb. 1.1: Symmetrische Beulform

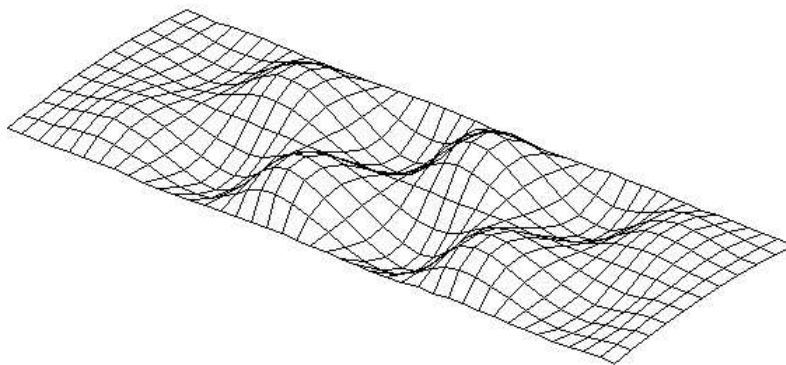


Abb. 1.2: Antimetrische Beulform

In den Abbildungen 1.1 und 1.2 sind Beulformen für gelenkige Längsrandlagerung als Ergebnisse von FEM-Rechnungen dargestellt, damit der Unterschied zwischen symmetrischer und antimetrischer Beulform verdeutlicht wird. Eine grafische Darstellung der Ergebnisse dieser Diplomarbeit als Beulformen gestaltet sich dagegen äußerst schwierig, wie im Kapitel sieben noch ausführlich erklärt wird.

Diese Arbeit baut auf eine Studienarbeit [2] und eine Diplomarbeit [3] auf, die zum selben Themenkomplex erarbeitet wurden. Es finden die Erfahrungen, die in diesen Arbeiten gemacht worden sind, einen starken Eingang in diese Arbeit, ebenso wie häufig Ergebnisse daraus angesprochen werden. Zum Teil können Begründungen und Erklärungen für bisher ungeklärte

Fragen aufgezeigt werden, da besonders gegenüber [2] eine wesentliche Einschränkung vorgenommen und gegenüber [3] eine mathematische Vereinfachung in der analytischen Ebene eingeführt wird, die sich aus [11] ergibt. Die Einschränkung besteht aus der Vernachlässigung von Schubbelastung, woraus sich die Möglichkeit der Vereinfachung durch Auftrennung in symmetrische und antimetrische Lösungsfunktionen ergibt.

Die Stabilitätsanalyse erlangt in der Luft- und Raumfahrttechnik deswegen besondere Bedeutung, weil die gewichtsoptimale Auslegung meist auf schlanke und dünnwandige Bauteile mit kleinem Strukturkennwert führt, [1]. Häufig sind solche Bauteile von sehr komplizierter geometrischer Gestalt, deren Berechnung eine Reduzierung auf analytisch oder halbanalytisch behandelbare Modelle verlangt. Ein Beispiel dafür ist ein Hautfeld eines Tragflügels zwischen zwei Stringern. Modelliert man die Stützwirkung eines Stringers mittels einer Einspannfedersteifigkeit, nimmt am Ort der Stringer eine unverschiebliche Lagerung an und beschränkt sich auf nur ein Feld zwischen zwei Stringern, so kommt man zu dem Modell, das in dieser Arbeit behandelt werden soll, wobei noch die vereinfachende Annahme äquidistanter Stringer eingegangen ist. Die Beschränkung auf ein Teilfeld ist deswegen möglich, weil beim lokalen Beulen vom benachbarten Hautfeld keine Stützwirkung ausgeht, [1].

Die Berücksichtigung möglicher Faserverbundbauweisen erfolgt über das Materialgesetz, das Orthotropie zuläßt. Allgemeine Anisotropie und Exzentrizität finden allerdings in dieser Arbeit keine Berücksichtigung, es werden lediglich die zur Beschreibung orthotropen Materials in [1] angegebenen Parameter verwendet.

Die bekannten Lösungen für das gegebene Modell werden bereits von Schmalstieg [3] aufgezählt, und in den Rahmen laufender und abgeschlossener Forschungen eingegliedert, [5].

Das folgende, zweite Kapitel dieser Arbeit, welches sich vom zweiten Kapitel von [2] nur geringfügig unterscheidet, beinhaltet die zur Formulierung des Problems erforderlichen Gleichungen und die ihnen zugrundeliegenden Voraussetzungen. Aus diesen Gleichungen wird dann im dritten Kapitel ein Verfahren zur Bestimmung des Beulwertes angegeben. Hierbei wird ein Ansatz für eine nach Airy für ebene Spannungszustände eingeführte Spannungsfunktion gemacht (Man beachte, daß ein ebener Spannungszustand auch in einer gekrümmten Schale vorliegen kann, der Begriff der Ebenheit des Spannungszustandes hat also nichts mit geometrischer Krümmung zu tun). Eine Erläuterung der numerischen Umsetzung des Verfahrens in ein Programm schließt das dritte Kapitel ab. Das dritte Kapitel hält sich ebenfalls an das entsprechende Kapitel aus [2], unterscheidet sich aber in wesentlichen Teilen, z.B. in den Vereinfachungen und der Aufteilung in Symmetrie und Antimetrie.

Im vierten Kapitel sind einige analytische Gleichungen zur Berechnung des Beulwertes, sowie die verwendeten Größen angegeben und erklärt. Darauf aufbauend werden mit den analytischen Gleichungen erzeugte Beulwerte mit Ergebnissen des Programmes verglichen, die

Vergleiche schließen sich an die ebenfalls in [2] und [3] gemachten an und setzen deren Kenntnis voraus.

Im fünften Kapitel werden mit dem Programm erzeugte Girlandenkurven für Symmetrie und Antimetrie bei verschiedenen Krümmungen gezeigt, um eventuell fehlerhafte Ergebnisse erklären zu können. Die große Anzahl der Abbildungen ergibt sich aus der Tatsache, daß immer doppelte Darstellungen sowohl für Symmetrie als auch für Antimetrie erfolgen.

Zusätzlich sind im folgenden sechsten Kapitel noch die direkten Vergleiche beider Lösungen angegeben, wobei der Einfluß der Krümmung und der Einspannfedersteifigkeit untersucht wird. Soweit Ergebnisse vorhanden sind, werden sie für die verschiedenen Orthotropieparameter angegeben. Interessant ist hierbei die Fragestellung, ob die antimetrische Lösung nicht unter die symmetrische gelangt, denn so wäre nicht gerechtfertigt, grundsätzlich eine Beschränkung auf die symmetrische Lösung vorzunehmen, was häufig gemacht wird.

Das siebte Kapitel enthält die Beulformen und deren Darstellung für gelenkige Lagerung, soweit diese berechenbar sind. Warum das nicht immer der Fall ist, wird kurz geschildert.

Im Anschluß folgt als achtes Kapitel eine kurze Zusammenfassung mit den daraus resultierenden wichtigsten Schlußfolgerungen, und es werden Empfehlungen für den Umgang mit dem Verfahren gegeben.

Der Anhang enthält zusätzliche Abbildungen, eine kurze Beschreibung der Übertragungsmatrizenmethode und das Literaturverzeichnis. Die Übertragungsmatrizenmethode ist aufbauend auf [2] als ursprüngliches Thema vorgesehen gewesen, doch hat sich schon nach drei Wochen die Komplexität der numerischen Auswertung gezeigt, die der Ergebnisorientiertheit der Arbeit nicht Rechnung getragen hätte. Aus diesem Grund ist das Verfahren nicht weiter verfolgt worden.

2 Modellformulierung

In diesem Kapitel sollen die Voraussetzungen und Annahmen für die Berechnungen kurz geschildert und eine Aufzählung der zur mathematischen Beschreibung des Problems benötigten Gleichungen in einzelnen Unterkapiteln gegeben werden. Dies sind die Gleichgewichtsbedingungen, das Materialgesetz, die Verschiebungs- Verzerrungs- Relationen, die Kompatibilitätsbedingung und die Randbedingungen. Über die Verwendung der Gleichungen wird noch keine Aussage gemacht.

2.1 Voraussetzungen und Annahmen

Die Voraussetzungen, die den Berechnungen zugrunde liegen, sind die der geometrisch und physikalisch linearen Theorie schwach gekrümmter Schalen [6]. Im wesentlichen sind das:

- die Verschiebungen sind klein gegenüber den geometrischen Abmessungen,
- die tangentialen Verschiebungen in der Schalenfläche und ihre Ableitungen sind klein gegenüber der radialen Verschiebung w ,
- die Ableitungen der radialen Verschiebung sind klein gegenüber eins,
- die Dicke t der Schale ist klein gegenüber dem Radius r ,
- Der Einfluß der ohnehin kleinen Plattenquerkräfte auf das Gleichgewicht der Scheibenkräfte braucht nicht berücksichtigt werden.

Die letzte Annahme hat ihre Begründung in Erfahrungen, die bei vorangegangenen Untersuchungen gemacht worden sind. Es hat sich bei ähnlichen Problemen, bei denen keine Belastungen auftreten, die nicht in der Schalenfläche liegen, herausgestellt, daß die Vernachlässigung dieses Einflusses keine Unterschiede in den Ergebnissen für die Beulwerte gekrümmter Schalen verursacht hat.

Eine Erklärung, die sich dafür anbietet, ist die Tatsache, daß sich bei stärker gekrümmten Schalen und bei Zylindern im speziellen immer mehrere Beulen über den Umfang ausbilden können. Aufgrund dessen kann das Problem immer wieder auf einen Schalenstreifen der Breite einer Beule in Umfangsrichtung zurückgeführt werden. Dies ist dann wieder ein Problem sehr

schwacher Krümmung, bei dem die Annahme zulässig ist. Dies rechtfertigt die Erweiterung der Rechnungen auf stärker gekrümmte Schalen mit dieser Methode.

Die Formulierung des Modells wird in Zylinderkoordinaten vorgenommen, wobei jedoch von der allgemein üblichen Bezeichnungsweise r , φ , z abgewichen wird, um mit bisherigen Arbeiten und Bezeichnungen, die mit Zylinderschalen zu tun haben, konform zu bleiben. Hierfür sei besonders auf [4] verwiesen. Eine ausführliche Beschreibung der tensoranalytischen Notation allgemein und in Zylinderkoordinaten entnehme man [2], sowie [7] und [8]. Eine Skizze des Modells kann zur Veranschaulichung hilfreich sein, Abbildung 2.1.

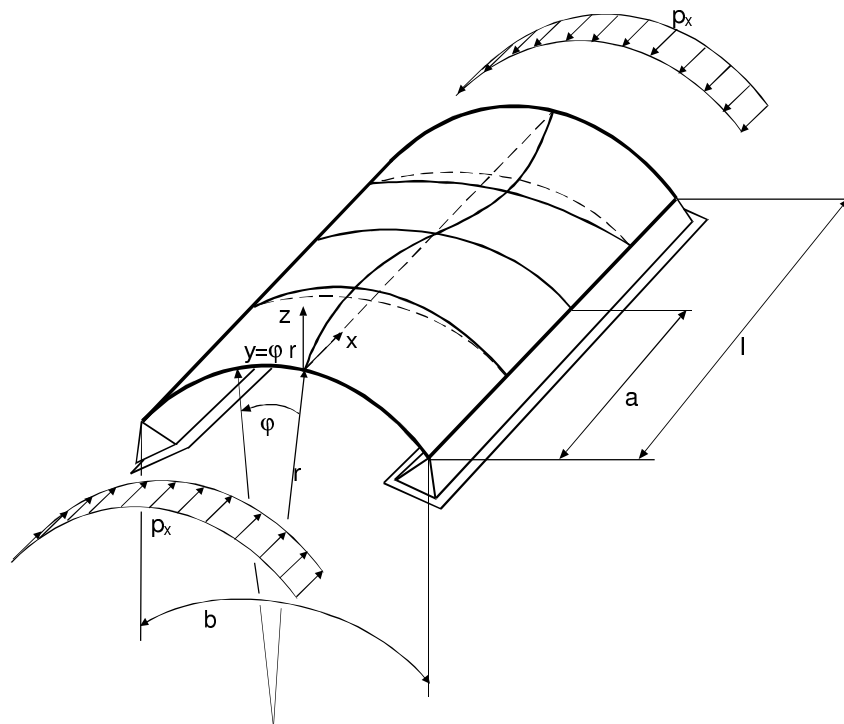


Abb. 2.1: Skizze des Schalenstreifens, aus [10]

Weiterhin wird ein so langer Schalenstreifen vorausgesetzt, daß der Einfluß der Randbedingungen der kurzen Ränder vernachlässigt werden kann, solange an diesem Rand die Verschiebung w behindert ist. Es ist also lediglich egal, ob die Randlagerung dann gelenkig oder fest eingespannt ist, [9]. Praktisch bedeutet das, im isotropen Fall sind Seitenverhältnisse a/b von mindestens drei zu realisieren. Im orthotropen Fall ist allerdings das Verhältnis der Biegesteifigkeiten mit einzubeziehen, und es ist ein wirksames Seitenverhältnis von mindestens drei vorauszusetzen, siehe [1].

2.2 Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen entsprechen denen in [1]. Es sei hier schon darauf hingewiesen, daß die Terme, die sich aus dem Einfluß der Scheibenkräfte auf das Gleichgewicht in radialer Richtung ergeben, Gleichung 2.2-1,e, im weiteren Verlauf der Rechnungen auf Grund der Ansätze, die für $w(x,y)$ und $F(x,y)$ gemacht werden können, ohne Einfluß bleiben. Sie sind aus Gründen der Vollständigkeit mit aufgeführt, werden aber in anderen Quellen schon von vornherein vernachlässigt.

Ein Bild kann das Zustandekommen der Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung veranschaulichen, wobei zu beachten ist, daß die Neigungen der Querschnitte der Schale sowohl aus dem Krümmungsradius r als auch aus den zweiten Ableitungen der Verschiebung $w(x,y)$ resultieren. In Abbildung 2.2 ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die radiale Verschiebung $w(x,y)$ angegeben, so daß das Gleichgewicht im schwach verformten Zustand angesetzt wird (Theorie erster Ordnung). Die Krümmungen aus dem Schalenradius r und den Verschiebungsableitungen werden anschließend einfach superponiert. Eine grafische Veranschaulichung der anderen Gleichgewichtsbedingungen ist unter anderem [1] zu entnehmen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} &= 0 \quad , \\
 \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} &= 0 \quad , \\
 \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - n_{xz} &= 0 \quad , \\
 \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - n_{yz} &= 0 \quad \text{und} \\
 \frac{\partial n_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial n_{yz}}{\partial y} - n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - n_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \right) &= 0 \quad .
 \end{aligned} \tag{2.2-1,a-e}$$

Zum Aufstellen des Kräftegleichgewichts in radialer Richtung ist es notwendig, die Linienkräfte mit ihren Wirkungslängen dx und dy zu multiplizieren, wobei die Anteile der Scheibenkräfte in die radiale Richtung zu projizieren sind. Somit kann also folgender Zusammenhang aus Abbildung 2.2 entnommen werden:

$$\begin{aligned}
 &\left[- \left(n_{yz} - \frac{\partial n_{yz}}{\partial y} dy \right) \right] dx + \left[- \left(n_{xz} - \frac{\partial n_{xz}}{\partial x} dx \right) \right] dy \\
 &+ \left[- n_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_{xz} - n_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy + \left[- n_y \frac{\partial w}{\partial y} + n_{yz} - n_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx = 0 \quad .
 \end{aligned} \tag{2.2-2}$$

2.3 Materialgesetz

Das linearelastische Materialgesetz ist [1] entnommen. Es berücksichtigt keine Exzentrizität, so daß keine Terme in den Steifigkeitsmatrizen auftreten, die eine Kopplung zwischen Platten- und Scheibeneffekten hervorrufen würden, und es beschränkt sich auf orthotropes Material. Aus der Tatsache, daß keine Kopplung zugelassen ist, leitet sich auch die Möglichkeit der Erzeugung der Orthotropie lediglich durch die Biegesteifigkeiten und Dehnsteifigkeiten ab.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Steifigkeiten ist, daß sie vom Ort unabhängig, also als konstant vorausgesetzt werden.

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{n} \\ \underline{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_s & \underline{c}_k \\ \underline{c}_k & \underline{c}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\epsilon} \\ \underline{\kappa} \end{bmatrix} \quad (2.3-1)$$

Die Inversion der Gleichung 2.3-1 liefert die Nachgiebigkeitsmatrix, wobei deren Elemente zur Unterscheidung mit einem Sternchen gekennzeichnet werden.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^* & c_{22}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^* & c_{45}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45}^* & c_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{\epsilon} \\ \underline{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_s^* & \underline{c}_k^* \\ \underline{c}_k^* & \underline{c}_p^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{n} \\ \underline{m} \end{bmatrix} \quad (2.3-2)$$

Bei den folgenden Rechnungen ergeben sich einige praktische Abkürzungen, die wie in [1] eingeführt werden. Dies sind die Dehnsteifigkeiten längs und quer, D_x und D_y , die Schersteifigkeit D_{xy} , die Biegesteifigkeiten längs und quer, B_x und B_y , und die Kreuzsteifigkeit B_{xy} :

$$D_x = \frac{1}{c_{11}^*}, \quad D_y = \frac{1}{c_{22}^*}, \quad D_{xy} = \frac{1}{c_{12}^* + \frac{c_{33}^*}{2}}, \quad (2.3-3,a,b)$$

$$B_x = c_{44}, \quad B_y = c_{55}, \quad B_{xy} = c_{45} + 2c_{66}.$$

Aus diesen Steifigkeiten werden im weiteren Verlauf die benötigten Parameter zur Beschreibung der Orthotropie gebildet.

2.4 Verschiebungs- Verzerrungs- Relationen

Die folgenden Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen u , v und w und den Verzerrungen ϵ_x , ϵ_y und ϵ_{xy} und den Krümmungen κ_x , κ_y und κ_{xy} angeben, sind ebenfalls [1] entnommen. Ihre Herkunft aus der Elastizitätstheorie für rotationssymmetrische Zylinderschalen in Zylinderkoordinaten ist bereits in [2] ausführlich erklärt.

Die Krümmungen κ der Platte sind dabei denen der ebenen Platte identisch.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} \quad , \\
 \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \\
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \\
 \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{und} \\
 \kappa_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.4-1,a-f}$$

Ein nicht zu vernachlässigender Term aus dem Krümmungseinfluß ergibt sich aber bei der einmaligen Ableitung der Verschiebungen zu den Verzerrungen. Dieser Term entsteht bei ϵ_y durch die kovariante Ableitung der Vektorkomponenten des Verschiebungsvektors in Zylinderkoordinaten. Der Faktor r^{-1} entspricht gerade dem Christoffel-Symbol, welches für diese Ableitung heranzuziehen ist, siehe [7]. Weitere zusätzliche lineare Terme aus kovarianten Ableitungen gibt es bei den Scheibenverzerrungen in Zylinderkoordinaten nicht.

2.5 Kompatibilität

Die Kompatibilitätsaussage ist eine tensoranalytische Identität. Von den neun Gleichungen sind jedoch nicht alle wichtig. Die relevante mit den bisher beschriebenen Verzerrungen der Scheibe läßt sich aus der Anschauung allerdings viel einfacher als tensoriell gewinnen. Dazu müssen die Verschiebungs- Verzerrungs- Relationen, Gleichung 2.4-1 herangezogen und ein Ausdruck gebildet werden, aus dem die Tangentialverschiebungen u und v eliminiert sind, denn über diese Verschiebungen soll im weiteren Verlauf der Rechnung keine Aussage gemacht werden. Eine Möglichkeit, so eine Aussage zu erhalten, ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial^2 y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} , \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} . \end{aligned} \quad (2.5-1)$$

Die Notwendigkeit der Kompatibilität zur Lösung des Differentialgleichungssystemes ergibt sich aus der Tatsache, daß ein Ansatz nach Airy gemacht wird, der eine neue Unbekannte, nämlich die Spannungsfunktion, einführt.

2.6 Randbedingungen

Die Randbedingungen werden nur an der Lagerung der seitlichen Ränder formuliert, weil die Randbedingungen der kurzen Ränder als unerheblich vorausgesetzt werden, was aus der unendlich angenommen Länge resultiert und den im weiteren verwendeten, in Längsrichtung π -periodischen Ansatz rechtfertigt. Als erste Randbedingung ist zu nennen, daß die Durchsenkung der Ränder an den Lagern null ist:

$$w(x, y = \pm \frac{b}{2}) = 0 . \quad (2.6-1)$$

Die zweite Randbedingung in den Verschiebungen resultiert aus dem Momentengleichgewicht an der Einspannung, da Randmoment und Randquerschnittsneigung über eine Federung gekoppelt sein sollen:

$$m_y + m_{yR} = 0 \quad , \quad \text{mit}$$

$$m_y = c_{55} \kappa_y + c_{45} \kappa_x = B_y \kappa_y \quad , \quad \text{mit} \quad \kappa_x(x, y = \pm \frac{b}{2}) = 0 \quad ,$$

$$m_{yR} = \mp C_R \frac{\partial w}{\partial y} \frac{1}{b} \quad , \quad \text{bei} \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad , \quad (2.6-2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \pm \frac{C_R}{b B_y} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{bei} \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad .$$

Eine feste Einspannung wird so durch eine sehr große Einspannfederzahl C_R/B_y modelliert, während die gelenkige Lagerung mit $C_R/B_y=0$ wiedergegeben wird. Abbildung 2.3 soll diesen Zusammenhang verdeutlichen.

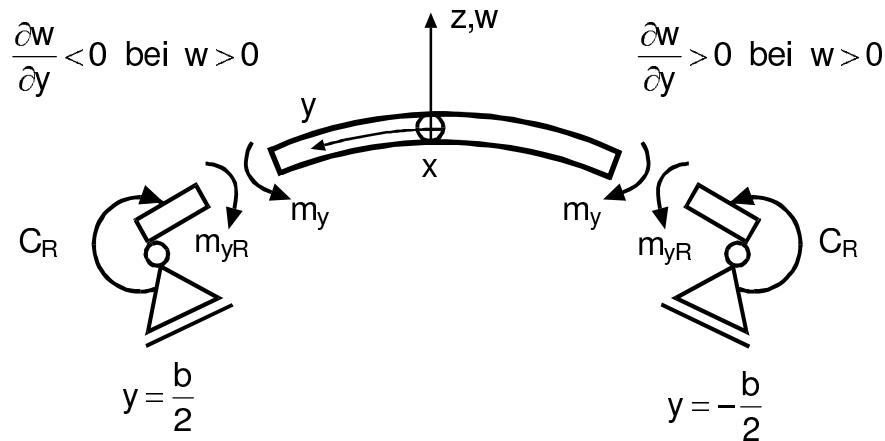


Abb. 2.3: Randeinspannung , aus [10]

Zwei weitere Randbedingungen werden für die Scheibenkräfte formuliert. Längs am Rand werden keine Lasten eingeleitet. Deshalb sind die Aussagen möglich, daß

$$n_y(x, y = \pm \frac{b}{2}) = 0 \quad , \quad (2.6-3)$$

weil normal zum Rand keine Kraft wirken kann, da der Rand in dieser Richtung frei verschieblich ist, und daß

$$n_x(x, y = \pm \frac{b}{2}) = p_x \quad , \quad (2.6-4)$$

weil am Rand keine Änderung von n_x auftreten kann, da eine Einleitung am Rand ausgeschlossen wird, so daß nur der konstante Teil p_x , der im ganzen Bereich gilt, als Randwert vorhanden ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß keine zusätzliche Beulverschiebung u in Längsrichtung auftreten kann, vergl. [10].

Mit den Grundgleichungen sind alle benötigten Zusammenhänge zur Beschreibung des Modells gegeben. Die Umsetzung in ein Verfahren zur Bestimmung des Beulwertes wird im folgenden Kapitel beschrieben.

3 Verfahrensentwicklung

In diesem Kapitel wird mittels der im vorhergegangenen Teil angegebenen Gleichungen ein Verfahren zur Bestimmung des Beulwertes abgeleitet, in dem Ansätze zur Lösung des Differentialgleichungssystems ausgewertet werden und im Anschluß überprüft wird, ob die Randbedingungen mit dieser Lösung erfüllt werden. Die Vorgehensweise entspricht der in [2], wo auch eine ausführlichere Ableitung zu finden ist.

3.1 Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

Das Problem soll durch die Verschiebung $w(x,y)$ und eine einer Potentialfunktion ähnlichen Funktion $F(x,y)$, der Airyschen Spannungsfunktion, aus der sich die Scheibenkräfte ableiten lassen, beschrieben werden, siehe [1] und [4]. Es sind also zwei Differentialgleichungen in diesen Größen aufzustellen. Dieses Vorgehen wird beim Lösen ebener Verzerrungs- oder Spannungszustände verwendet.

Beim Aufstellen der Differentialgleichungen und bei der Wahl der Ansatzfunktionen sind die in Kapitel zwei formulierten Zusammenhänge ausschlaggebend. Zuerst werden in der Gleichgewichtsbedingung 2.2-1,e die Plattenquerkräfte n_{xz} und n_{yz} eliminiert, indem sie durch die Gleichgewichtsbedingungen 2.2-1,c und d ersetzt werden. Dadurch gehen Aussagen über die Querkräfte verloren, doch sie sind nach den Voraussetzungen sowieso nicht von Interesse. Als zweite Differentialgleichung wird die Kompatibilitätsbedingung genommen.

Um die Scheibengleichgewichtsbedingungen, Gleichung 2.2-1,a und b, zu erfüllen, wird für die Scheibenkräfte folgender Zusammenhang formuliert:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} + p_x, & p_x &= \text{const} \quad , \\ n_y &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + p_y, & p_y &= 0 \quad , \\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} + p_{xy}, & p_{xy} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.1-1}$$

Hierbei ist über die Funktion $F(x,y)$ noch keine Aussage gemacht, ihre Einführung auf diese Art bedingt jedoch, daß die angesprochenen Differentialgleichungen a priori erfüllt sind, was man durch Einsetzen sofort verifizieren kann. Der konstante Anteil p_x ist die Größe, die im weiteren Verlauf als Beullast zu bestimmen ist.

Nutzt man Gleichung 3.1-1 aus, so wird die erste Differentialgleichung zu:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + p_x \right)}_{n_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}_{-2n_{xy}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}_{n_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \right) = 0. \quad (3.1-2)$$

Setzt man in diese Gleichung das Materialgesetz und die Verschiebungs-Verzerrungsrelationen ein, so ergibt sich die erste Differentialgleichung in der Form, in der sie weiter verwendet wird und in der sie auch ähnlich in [1] zu finden ist:

$$\begin{aligned} & - B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 B_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & - p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.1-3)$$

Die mittleren drei Summanden sind die, die schon in Kapitel zwei als irrelevant bezeichnet wurden, da sie auf Grund der Ansätze, die für F und w gemacht werden können, herausfallen, vgl. [2]. Sie werden in [1] und [10] ebenfalls nicht berücksichtigt. Um die zweite Differentialgleichung in der gewünschten Form aus der Kompatibilitätsbedingung zu erhalten, wird in Gleichung 2.5-1 das Materialgesetz mit den Nachgiebigkeiten und der in Gleichung 3.1-1 formulierte Zusammenhang eingesetzt. Es ergibt sich dann:

$$\frac{1}{D_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{2}{D_{xy}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{D_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.1-4)$$

Die beiden Differentialgleichungen 3.1-3 und 3.1-4 bilden ein homogenes System von gekoppelten, linearen, partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Folgender Ansatz für F und w überführt das Problem in ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= W^* \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\mu \frac{y}{b}}, \\ F(x,y) &= F^* \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\mu \frac{y}{b}}. \end{aligned} \quad (3.1-5)$$

Die Ortsfunktion ist also in beiden Ansätzen gleich. Die mit einem Stern gekennzeichneten Amplitudenwerte sind Konstanten, was bedeutet, daß F^* und W^* sich nur in einem konstanten Faktor unterscheiden können. Dies erlangt im weiteren Verlauf der Rechnung eine gewisse Bedeutung, denn es ermöglicht erst die Lösung.

Dieser Ansatz spiegelt auch die gemachten Voraussetzungen wieder, denn er ist in x-Richtung π -periodisch, was aus der unendlichen Länge resultiert, und in y-Richtung ist eine unbekannte Periodizität angenommen, da die Drehfedereinspannung und die Krümmung eine Annahme einer π -Periodizität nicht zulassen.

Mit den Ansätzen 3.1-5 werden die Differentialgleichungen 3.1-3 ohne die mittleren Terme und 3.1-4 zu folgenden, in Matrixschreibweise zusammengefaßten Ausdrücken, aus denen die Ortsfunktion schon herausgekürzt ist:

$$\left[\begin{array}{c|c} -B_x \frac{\pi^4}{a^4} + 2B_{xy} \frac{\mu^2 \pi^2}{b^2 a^2} - B_y \frac{\mu^4}{b^4} & \frac{1}{r} \frac{\pi^2}{a^2} \\ + p_x \frac{\pi^2}{a^2} & \\ \hline \frac{1}{r} \frac{\pi^2}{a^2} & \frac{1}{D_x} \frac{\mu^4}{b^4} - \frac{2}{D_{xy}} \frac{\mu^2 \pi^2}{b^2 a^2} + \frac{1}{D_y} \frac{\pi^4}{a^4} \end{array} \right] \bullet \begin{bmatrix} W^* \\ F^* \end{bmatrix} = \underline{0} . \quad (3.1-6)$$

Die Lösbarkeitsbedingung, daß die Determinante der Koeffizientenmatrix null ist, liefert ein Polynom achten Grades in μ , welches es ermöglicht, unter Vorgabe der Steifigkeiten, der Lasten und der Geometrie des Schalenstreifens acht μ_n zu bestimmen, mit denen die Ansätze 3.1-5 die Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^8 e_i \mu^i &= 0, \text{ mit} \\ e_8 &= \frac{B_y}{D_x} \frac{1}{b^8}, \quad e_7 = 0, \\ e_6 &= -\frac{2\pi^2}{a^2 b^6} \left(\frac{B_{xy}}{D_x} + \frac{B_y}{D_{xy}} \right), \quad e_5 = 0, \\ e_4 &= \frac{\pi^4}{a^4 b^4} \left(\frac{B_x}{D_x} + \frac{4B_{xy}}{D_{xy}} + \frac{B_y}{D_y} - \frac{p_x}{D_x} \frac{a^2}{\pi^2} \right), \quad e_3 = 0, \\ e_2 &= -\frac{2\pi^6}{a^6 b^2} \left(\frac{B_x}{D_{xy}} + \frac{B_{xy}}{D_y} - \frac{p_x}{D_{xy}} \frac{a^2}{\pi^2} \right), \quad e_1 = 0 \\ e_0 &= \frac{\pi^8}{a^8} \left(\frac{B_x}{D_y} - \frac{p_x}{D_y} \frac{a^2}{\pi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{a^4}{\pi^4} \right). \end{aligned} \quad (3.1-7)$$

Mit den acht aus dem Polynom ermittelten Nullstellen folgt dann für die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen auf Grund der Linearität durch Superposition:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \sum_{k=1}^8 W_k^* \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\mu_k \frac{y}{b}} , \\ F(x,y) &= \sum_{k=1}^8 F_k^* \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\mu_k \frac{y}{b}} . \end{aligned} \quad (3.1-8)$$

Es sei hier darauf hingewiesen, daß das Polynom 3.1-7 ein Polynom achten Grades ist, aber nur dessen Koeffizienten vor geraden Potenzen sind ungleich Null. Somit ist die Interpretation als ein Polynom vierten Grades in den Quadraten von μ , also in μ^2 , möglich. Es gibt dementsprechend nur vier unabhängige Lösungen, da sich die μ paarweise nur im Vorzeichen unterscheiden. Es wird folgender Zusammenhang eingeführt, um diesem Umstand Rechnung zu tragen:

$$\mu = \pm \sqrt{\lambda}, \quad e_8 \lambda^4 + e_6 \lambda^3 + e_4 \lambda^2 + e_2 \lambda^1 + e_0 \lambda^0 = 0, \quad (3.1-9)$$

wobei die Koeffizienten denen in 3.1-7 entsprechen. Die Tatsache, daß nur vier unabhängige Lösungen auftreten, ermöglicht es, bei der Überprüfung der Erfüllung der Randbedingungen eine Beschränkung auf vier Gleichungen vorzunehmen.

3.2 Proportionalitätsfaktoren und Vereinfachung

Ob die berechnete allgemeine Lösung die Randbedingungen erfüllt, muß anschließend überprüft werden, doch vorher soll ausgehend vom Gleichungssystem 3.1-6 der Zusammenhang zwischen den Amplitudenwerten von $w(x,y)$ und $F(x,y)$ berechnet werden, da der Proportionalitätsfaktor für die Überprüfung der Randbedingungen bekannt sein muß. Dafür wird folgender Ansatz gemacht :

$$\begin{aligned} F_k^* &= k_k W_k^* , \quad W_k^* = 1 , \quad k = 1, \dots, 8 , \\ &= k_k . \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

Im Hinblick darauf, daß die Aufgabe numerisch zu lösen ist, ist das ganze Verfahren so weit wie möglich analytisch aufzubereiten. Das bedeutet unter anderem, daß die Rechnungen für die im allgemeinen komplexen Zahlen so durchzuführen sind, daß man Real- und Imaginärteil voneinander trennen und eine Programmierung in komplexen Zahlen weitestgehend vermeiden kann. Es wird also für alle komplexen Größen ein Ansatz gemacht, der wie folgt aussieht:

$$\text{Zahl} = r \cdot \text{Zahl} + i \cdot m \cdot \text{Zahl} \quad . \quad (3.2-2)$$

Die Präfixe r und m kennzeichnen Real- respektive Imaginärteil der Zahl.

Führt man jetzt für die Koeffizienten des Gleichungssystems 3.1-6 Abkürzungen ein und nutzt den Zusammenhang 3.2-1 aus, so ergibt sich eine Kurzform der Art:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_n & B \\ \hline C & D_n \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline k_n \end{array} \right] = 0 \quad , \quad n = 1, \dots, 8 \quad , \quad (3.2-3)$$

wobei die Koeffizienten A und D der Matrix von λ_n , bzw. μ_n abhängen, während die Koeffizienten B und C gleich und von λ_n unabhängig sind. Die Matrix ist singulär, da die λ_n gerade so bestimmt wurden, so daß man aus beiden Zeilen den Faktor k_n bestimmen kann. Es muß dasselbe Ergebnis herauskommen, da die Zeilen linear abhängig sind. Genauso gut kann man überprüfen, ob die Determinante tatsächlich null ist.

Der Faktor k_n wird im allgemeinen komplex sein, genau wie die Nullstelle μ , woraus folgt, daß auch A und D komplex sind, während $C = B$ reell bleiben, also ist nach Gleichung 3.2-2 folgende Umschreibung vorzunehmen:

$$\left[\begin{array}{c|c} rA_n + i \cdot mA_n & B \\ \hline C & rD_n + i \cdot mD_n \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline rk_n + i \cdot mk_n \end{array} \right] = 0 \quad . \quad (3.2-4)$$

Hieraus ergeben sich die Berechnungsvorschriften für Real- und Imaginärteil von k_n in Abhängigkeit der Matrixkoeffizienten in zwei Versionen (1. und 2. Zeile auswerten). Die Matrixkoeffizienten selbst sind dann noch im Anschluß in Abhängigkeit von μ nach Real- und Imaginärteil getrennt zu berechnen, so daß der Proportionalitätsfaktor k_n wie folgt ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} 1) \quad rk_n + i \cdot mk_n &= -\frac{rA_n + i \cdot mA_n}{B} \quad , \\ \Rightarrow rk_n &= -\frac{rA_n}{B} \quad , \quad mk_n = -\frac{mA_n}{B} \\ 2) \quad rk_n + i \cdot mk_n &= -C \frac{1}{rD_n + i \cdot mD_n} \quad , \\ \Rightarrow rk_n &= -C \frac{rD_n}{(rD_n)^2 + (mD_n)^2} \quad , \quad mk_n = C \frac{mD_n}{(rD_n)^2 + (mD_n)^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

Die Berechnungsvorschriften für die Matrixkoeffizienten A_n , B, C und D_n ergeben sich mit dem Ansatz:

$$\begin{aligned}\mu_n &= r\mu_n + i \cdot m\mu_n, \text{ damit} \\ \mu_n^2 &= r\mu_n^2 - m\mu_n^2 + i \cdot 2r\mu_n m\mu_n\end{aligned}\quad (3.2-6)$$

nach Real- und Imaginärteil getrennt zu den Ausdrücken in der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned}rA_n &= -B_x \frac{\pi^4}{a^4} + 2B_{xy} \frac{\pi^2}{a^2 b^2} (r\mu_n^2 - m\mu_n^2) - \frac{B_y}{b^4} (r\mu_n^4 + m\mu_n^4 - 6r\mu_n^2 m\mu_n^2) \\ &\quad + p_x \frac{\pi^2}{a^2}, \\ mA_n &= -4B_{xy} \frac{\pi^2}{a^2 b^2} r\mu_n m\mu_n - 4\frac{B_y}{b^4} r\mu_n m\mu_n (r\mu_n^2 - m\mu_n^2), \\ B &= C = \frac{1}{r} \frac{\pi^2}{a^2}, \\ rD_n &= \frac{1}{D_x b^4} (r\mu_n^4 + m\mu_n^4 - 6r\mu_n^2 m\mu_n^2) - \frac{2}{D_{xy}} \frac{\pi^2}{a^2 b^2} (r\mu_n^2 - m\mu_n^2) + \frac{1}{D_y} \frac{\pi^4}{a^4}, \\ mD_n &= \frac{4}{D_x b^4} r\mu_n m\mu_n (r\mu_n^2 - m\mu_n^2) - \frac{4}{D_{xy}} \frac{\pi^2}{a^2 b^2} r\mu_n m\mu_n,\end{aligned}\quad (3.2-7)$$

$$\text{mit z.B. } r\mu_n^4 = (r\mu_n)^4, \text{ nicht } r\mu_n^4 = r(\mu_n^4) !$$

Eine Formulierung in Abhängigkeit der λ_n ist auch möglich, dabei müssen nur Substitutionen z.B. folgender Art vorgenommen werden:

$$\begin{aligned}\mu_n^2 &= (r\mu_n + i \cdot m\mu_n)^2 = r\lambda_n + i \cdot m\lambda_n = r\mu_n^2 - m\mu_n^2 + i \cdot 2r\mu_n m\mu_n, \\ \mu_n^4 &= r\lambda_n^2 - m\lambda_n^2 + i \cdot r\lambda_n m\lambda_n = r\mu_n^4 - 6r\mu_n^2 m\mu_n^2 + m\mu_n^4 + i \cdot (r\mu_n^3 m\mu_n - m\mu_n^3 r\mu_n).\end{aligned}\quad (3.2-8)$$

Es ergeben sich damit folgende Berechnungsvorschriften für die Proportionalitätsfaktoren:

$$\begin{aligned}rk_n &= r \frac{\pi}{a} \left[-B_x \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \frac{2B_{xy}}{b^2} r\lambda_n - \frac{B_y}{b^4} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 (r\lambda_n^2 - m\lambda_n^2) + p_x \right], \\ mk_n &= r \frac{\pi}{a} \left[\frac{2B_{xy}}{b^2} m\lambda_n - \frac{2B_y}{b^4} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 r\lambda_n m\lambda_n \right].\end{aligned}\quad (3.2-9)$$

Isoliert man aus 3.2-8 speziell den Zusammenhang

$$r\lambda_n = r\mu_n^2 - m\mu_n^2, \quad m\lambda_n = 2r\mu_n m\mu_n, \quad (3.2-10)$$

so wird aus 3.2-9 ersichtlich, daß bei rein reellen und rein imaginären Nullstellen μ_n der Proportionalitätsfaktor k_n reell bleibt. Nur bei komplexen Nullstellen erhält man einen komplexen Proportionalitätsfaktor.

Mit diesen Auswertungen kann die Überprüfung der Erfüllung der Randbedingungen theoretisch beginnen. Diese Überprüfung ist dadurch vorzunehmen, daß die vollständige Lösung 3.1-8 der Differentialgleichungen unter Ausnutzung von 3.2-1 mit den aus 3.2-5 berechneten Proportionalitätsfaktoren in die Gleichungen 2.6-1 bis 2.6-4 für die Randbedingungen eingesetzt und die Lösbarkeitsbedingung überprüft wird. Vorher ist jedoch eine Vereinfachung vorzunehmen, die das Problem reduziert. Ursprünglich wären bei acht Nullstellen und somit acht Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung acht Randbedingungen benötigt, also vier an jedem Rand. Nun sind aber die Nullstellen paarweise vom Betrag gleich, genauso wie die Randbedingungen am rechten und linken Rand sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Sie sind also symmetrisch.

Nimmt man nun die Ortsfunktion aus der allgemeinen Lösung 3.1-8, und wertet sie am rechten und linken Rand aus, so ergibt sich folgendes Schema:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 1. \text{ Rb rechts} \\
 2. \text{ Rb rechts} \\
 3. \text{ Rb rechts} \\
 4. \text{ Rb rechts} \\
 \hline
 1. \text{ Rb links} \\
 2. \text{ Rb links} \\
 3. \text{ Rb links} \\
 4. \text{ Rb links}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \mu_4 \quad -\mu_1 \quad -\mu_2 \quad -\mu_3 \quad -\mu_4 \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & &
 \end{array} \right]
 \end{array}
 = \left[\begin{array}{c|c}
 +\underline{\underline{A}} & -\underline{\underline{A}} \\
 \hline
 -\underline{\underline{A}} & +\underline{\underline{A}}
 \end{array} \right] .
 \end{array} \quad (3.2-11)$$

Die Gleichungen sind nach Randbedingungen und die Summanden nach Nullstellen geordnet. Mit der Ortsfunktion am rechten und linken Rand ($y=+b/2$ und $y=-b/2$) und den Nullstellen mit den unterschiedlichen Vorzeichen ergibt sich eine solche Koeffizientenmatrix, die stets singulär ist. Am besten ist das zu erkennen, wenn man einfach die unteren oder oberen vier Zeilen mit -1 multipliziert. Eine Beschränkung auf die 4x4-Teilmatrix ist somit notwendig. Im weiteren wird stets nur noch mit vier Summanden gerechnet, denn es ist ausreichend, die Randbedingungen an einem Rand mit den vier positiven oder den vier negativen Wurzeln der Nullstellen λ_n des Polynomes 3.1-9 zu überprüfen. Besonders vorteilhaft erweist sich das bei der numerischen Auswertung, was im Vergleich mit [2] und [3] deutlich wird.

3.3 Aufteilung in symmetrische und antimetrische Lösungen

Vorher wird die allgemeine Lösung in antimetrische und symmetrische Anteile zerlegt, um eine getrennte Untersuchung vornehmen zu können, [11]. Dies gelingt mit den Definitionen für die echten und die hyperbolischen Sinus- und Cosinus-Funktionen, sowie Zusammenhängen, die sich daraus ergeben [12]:

$$\begin{aligned}
 e^{r\mu \pm i \cdot m\mu} &= \cosh(r\mu \pm i \cdot m\mu) + \sinh(r\mu \pm i \cdot m\mu), \\
 \cosh(i \cdot m\mu) &= \cos(i \cdot m\mu), \\
 \sinh(i \cdot m\mu) &= i \cdot \sin(m\mu), \\
 \cosh(r\mu \pm i \cdot m\mu) &= \cosh(r\mu) \cdot \cos(m\mu) \pm i \cdot \sinh(r\mu) \cdot \sin(m\mu), \\
 \sinh(r\mu \pm i \cdot m\mu) &= \sinh(r\mu) \cdot \cos(m\mu) \pm i \cdot \cosh(r\mu) \cdot \sin(m\mu).
 \end{aligned} \tag{3.3-1}$$

Zusätzlich ist es für die numerische Umsetzung des Verfahrens in ein Programm noch praktisch, wenn unterschieden wird, welcher Art die Nullstellen des Polynomes sind, d.h., rein reell, rein imaginär oder allgemein komplex, womit eine weitestmögliche analytische Aufbereitung der Berechnung der Programmierung vorangegangen ist. Es ergeben sich hieraus verschiedene allgemeine Lösungen.

Ausführlich soll dies bei komplexen Nullstellen durchgeführt werden. Die allgemeine Lösung ist auf vier Summanden reduziert und lautet dann mit den Proportionalitätsfaktoren wie folgt:

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sum_{n=1}^4 W_n^* e^{\mu_n \frac{y}{b}}, \\
 F(x, y) &= \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sum_{n=1}^4 k_n W_n^* e^{\mu_n \frac{y}{b}},
 \end{aligned} \tag{3.3-2}$$

wobei der Proportionalitätsfaktor k_n , die Nullstelle μ_n und die Integrationskonstante W_n^* nach 3.2-2 als komplex anzusetzen sind. Daß k_n komplex ist, ist 3.2-9 zu entnehmen.

Mittels 3.3-1 kann 3.3-2 in symmetrische und antimetrische Anteile zerlegt werden, für die Spannungsfunktion ergibt sich für den symmetrischen Anteil:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sum_{k=1}^4 W_k^* (rk_k + i \cdot mk_m) \cosh\left((r\mu_k + i \cdot m\mu_k) \frac{y}{b}\right) \\
 &= \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sum_{k=1}^4 W_k^* (rk_k + i \cdot mk_m) \left(\cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) + i \cdot \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) \right).
 \end{aligned} \tag{3.3-3}$$

Komplexe Nullstellen treten immer konjugiert komplex auf, was bedeutet, daß sich nur das Vorzeichen vom Imaginärteil der Nullstelle μ_n ändert. Man kann dementsprechend eine Aufteilung der Gleichung in Real- und Imaginärteil vornehmen, wenn im weiteren Verlauf ein lineares Gleichungssystem gebildet werden soll, in dem die Gleichungen auf Null abgefragt werden. Damit werden für jede Nullstelle zwei Gleichungen erhalten, die aber von den Gleichungen zur konjugiert komplexen linear abhängig sind. Man reduziert im Anschluß auf zwei Nullstellen, die allerdings beide nicht gerade ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen sein dürfen. Die Auftrennung in Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\begin{aligned} rF(x,y) &= \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) W_k^* \sum_{k=1}^2 \left(rk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) - mk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) \right), \\ mF(x,y) &= \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) W_k^* \sum_{k=1}^2 \left(mk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) + rk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

Auf die selbe Art und Weise ergibt sich für die Beulverschiebung $w(x,y)$:

$$\begin{aligned} rw(x,y) &= \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sum_{k=1}^2 W_k^* rk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right), \\ mw(x,y) &= \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sum_{k=1}^2 W_k^* mk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \quad (3.3-5)$$

Um die Anteile wieder in einem System zusammenschreiben zu können, werden neue Konstanten eingeführt, und zwar:

$$B_k \equiv W_k^* \quad \text{und} \quad B_{k+1} \equiv i \cdot W_k^* \quad . \quad (3.3-6)$$

Damit kann folgende Umschreibung vorgenommen werden, wenn einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen ein Index $k=1$ und einem zweiten möglichen Paar der Index $k=3$ zugeordnet wird:

$$\begin{aligned} F(y)_{(k)} &= B_k \left(rk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) - mk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) \right), \\ F(y)_{(k+1)} &= B_{k+1} \left(mk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) + rk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) \right), \\ w(y)_{(k)} &= B_k rk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right), \\ w(y)_{(k+1)} &= B_{k+1} mk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \quad (3.3-7)$$

Hierbei sind nur noch die einzelnen Summanden ohne die ohnehin gleiche Funktion in x angegeben. Der Verzicht auf die Summation trägt der Tatsache Rechnung, daß neben einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen noch zwei weitere beliebige auftreten können. Eine weitere Bedingung, die die obigen Umschreibungen erst ermöglicht, ist die Tatsache, daß bei der Überprüfung der Randbedingungen die Gleichungen auf Null abgefragt werden. Die Summanden 3.3-7 sind also schon für den Aufbau des Gleichungssystemes modifiziert und entsprechen nicht mehr identisch der allgemeinen Lösung 3.3-3.

Mit den antimetrischen Anteilen erhält man entsprechend:

$$\begin{aligned}
 F(y)_{(k)} &= C_k \left(rk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) + mk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) \right), \\
 F(y)_{(k+1)} &= C_{k+1} \left(rk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) - mk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right) \right), \\
 w(y)_{(k)} &= C_k rk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right), \\
 w(y)_{(k+1)} &= C_{k+1} mk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right) \cos\left(m\mu_k \frac{y}{b}\right).
 \end{aligned} \tag{3.3-8}$$

Die neuen reellen Konstanten C_k sind analog zu 3.3-6 eingeführt.

Bei reellen Nullstellen können sich vier verschiedene $r\mu_k$ ergeben, während alle $m\mu_k$ Null sind. Somit erhält man dann für den symmetrischen Anteil mit $k=1$ bis 4:

$$\begin{aligned}
 F(y)_{(k)} &= B_k rk_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right), \\
 w(y)_{(k)} &= B_k \cosh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right),
 \end{aligned} \tag{3.3-9}$$

für den antimetrischen Anteil:

$$\begin{aligned}
 F(y)_{(k)} &= C_k rk_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right), \\
 w(y)_{(k)} &= C_k \sinh\left(r\mu_k \frac{y}{b}\right).
 \end{aligned} \tag{3.3-10}$$

Als letztes sind noch die Summanden der allgemeinen Lösung bei rein imaginären Nullstellen anzugeben. Es ergeben sich ebenfalls vier verschiedene Anteile, die bei Symmetrie wie folgt lauten:

$$\begin{aligned}
 F(y)_{(k)} &= B_k r k_k \cos\left(m \mu_k \frac{y}{b}\right), \\
 w(y)_{(k)} &= B_k \cos\left(m \mu_k \frac{y}{b}\right).
 \end{aligned}
 \tag{3.3-11}$$

Und bei Antimetrie erhält man schließlich für $k=1$ bis 4:

$$\begin{aligned}
 F(y)_{(k)} &= C_k r k_k \sin\left(m \mu_k \frac{y}{b}\right), \\
 w(y)_{(k)} &= C_k \sin\left(m \mu_k \frac{y}{b}\right).
 \end{aligned}
 \tag{3.3-12}$$

3.4 Überprüfung der Randbedingungen

Mit den Gleichungen 3.3-7 bis 3.3-12 steht die allgemeine Lösung in weitestgehend vereinfachter Form für Symmetrie und Antimetrie für alle Arten von Nullstellen zu Verfügung. Damit können die Randbedingungen überprüft werden, d.h., die Gleichungen 2.6-1 bis 2.6-4 sind mit den allgemeinen Lösungen an einem Rand auszuwerten, und es ist zu überprüfen, ob sie erfüllt werden. Mit vier Gleichungen läuft das zum wiederholten mal auf die Berechnung der Koeffizientendeterminante eines linearen Gleichungssystems hinaus. Es stehen vier unbekannte Konstante und vier Gleichungen an einem Rand zur Verfügung.

Die Konstanten selbst können nicht bestimmt werden, da es sich um ein homogenes lineares Gleichungssystem handelt, so daß nur bei Vorgabe einer Konstanten die anderen bestimmt werden können. Aus diesem Grund ist die Bestimmung der Beulamplitude selbst nicht möglich, sondern nur die Bestimmung der Beulform, d.h., das Verhältnis der Konstanten zueinander.

Werden die allgemeinen Lösungen in die vier Randbedingungen 2.6-1 bis 2.6-4 eingesetzt, ergeben sich für Symmetrie und Antimetrie jeweils vier Gleichungen, die in Matrixschreibweise zusammengefaßt werden können. Ausgewertet seien die Gleichungen am Rand $y=+b/2$, womit sich für Symmetrie ergibt:

$$\begin{array}{c}
 \text{Nullstelle} \\
 \text{Randbedingung}
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 k=1 & k=2 & k=3 & k=4
 \end{array}
 \tag{3.4-1}$$

$$\begin{array}{l}
 2.6-1 \\
 2.6-2 \\
 2.6-3 \\
 2.6-4
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\
 s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\
 s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\
 s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44}
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 B_1 \cosh(\mu_1 / 2) \\
 B_2 \cosh(\mu_2 / 2) \\
 B_3 \cosh(\mu_3 / 2) \\
 B_4 \cosh(\mu_4 / 2)
 \end{bmatrix}
 = \underline{0}.$$

Für Antimetrie erhält man analog:

$$\begin{array}{c} \text{Nullstelle} \\ \text{Randbedingung} \end{array} \begin{array}{cccc} k=1 & k=2 & k=3 & k=4 \end{array} \begin{array}{c} 2.6-1 \\ 2.6-2 \\ 2.6-3 \\ 2.6-4 \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \cosh(r\mu_1/2) \\ C_2 \cosh(r\mu_2/2) \\ C_3 \cosh(r\mu_3/2) \\ C_4 \cosh(r\mu_4/2) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.4-2)$$

Zusätzlich zu den Konstanten ist aus den Gleichungen noch der Faktor $\cosh(r\mu_k/2)$ herausgezogen, um die numerische Berechnung der Determinante stabiler zu gestalten.

Die einzelnen Koeffizienten der Matrix, deren Determinante Null sein soll, werden im folgenden nach Art der Nullstellen getrennt angegeben. Bei komplexen Nullstellen lauten sie für $k=1$ und 3 :

$$\begin{aligned} s_{1k} &= \cos(m\mu_k/2), \\ s_{1k+1} &= \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2), \\ s_{2k} &= \frac{C_R}{B_y} (r\mu_k \tanh(r\mu_k/2) \cos(m\mu_k/2) - m\mu_k \sin(m\mu_k/2)) \\ &\quad + r\lambda_k \cos(m\mu_k/2) - m\lambda_k \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2), \\ s_{2k+1} &= \frac{C_R}{B_y} (r\mu_k \sin(m\mu_k/2) + m\mu_k \tanh(r\mu_k/2) \cos(m\mu_k/2)) \\ &\quad + r\lambda_k \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2) + m\lambda_k \cos(m\mu_k/2), \\ s_{3k} &= rk_k \cos(m\mu_k/2) - mk_k \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2), \\ s_{3k+1} &= mk_k \cos(m\mu_k/2) + rk_k \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2), \\ s_{4k} &= rk_k (r\lambda_k \cos(m\mu_k/2) - m\lambda_k \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2)) \\ &\quad - mk_k (r\lambda_k \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2) + m\lambda_k \cos(m\mu_k/2)), \\ s_{4k+1} &= mk_k (r\lambda_k \cos(m\mu_k/2) - m\lambda_k \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2)) \\ &\quad + rk_k (r\lambda_k \tanh(r\mu_k/2) \sin(m\mu_k/2) + m\lambda_k \cos(m\mu_k/2)) \end{aligned} \quad (3.4-3)$$

und bei Antimetrie für $k=1$ und 3 :

$$\begin{aligned}
a_{1k} &= \sin(m\mu_k / 2) , \\
a_{1k+1} &= \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2) , \\
a_{2k} &= \frac{C_R}{B_y} (r\mu_k \tanh(r\mu_k / 2) \sin(m\mu_k / 2) + m\mu_k \cos(m\mu_k / 2)) \\
&\quad + r\lambda_k \sin(m\mu_k / 2) + m\lambda_k \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2) , \\
a_{2k+1} &= \frac{C_R}{B_y} (r\mu_k \cos(m\mu_k / 2) - m\mu_k \tanh(r\mu_k / 2) \sin(m\mu_k / 2)) \\
&\quad + r\lambda_k \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2) - m\lambda_k \sin(m\mu_k / 2) , \\
a_{3k} &= rk_k \sin(m\mu_k / 2) + mk_k \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2) , \\
a_{3k+1} &= -mk_k \sin(m\mu_k / 2) + rk_k \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2) , \\
a_{4k} &= rk_k (r\lambda_k \sin(m\mu_k / 2) + m\lambda_k \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2)) \\
&\quad + mk_k (r\lambda_k \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2) - m\lambda_k \sin(m\mu_k / 2)) , \\
a_{4k+1} &= -mk_k (r\lambda_k \sin(m\mu_k / 2) + m\lambda_k \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2)) \\
&\quad + rk_k (r\lambda_k \tanh(r\mu_k / 2) \cos(m\mu_k / 2) - m\lambda_k \sin(m\mu_k / 2)) .
\end{aligned} \tag{3.4-4}$$

Wesentlich kürzere Koeffizienten ergeben sich, wenn die Nullstellen rein reell sind. Bei Symmetrie für $k=1$ bis 4:

$$\begin{aligned}
s_{1k} &= 1 , \\
s_{2k} &= \frac{C_R}{B_y} r\mu_k \tanh(r\mu_k / 2) + r\mu_k^2 , \\
s_{3k} &= rk_k , \\
s_{4k} &= rk_k r\mu_k^2 .
\end{aligned} \tag{3.4-5}$$

Bei Antimetrie:

$$\begin{aligned}
a_{1k} &= \tanh(r\mu_k / 2) , \\
a_{2k} &= \frac{C_R}{B_y} r\mu_k + r\mu_k^2 \tanh(r\mu_k / 2) , \\
a_{3k} &= rk_k \tanh(r\mu_k / 2) , \\
a_{4k} &= rk_k r\mu_k^2 \tanh(r\mu_k / 2) .
\end{aligned} \tag{3.4-6}$$

Sind die Nullstellen rein imaginär, so erhält man für $k=1$ bis 4 bei Symmetrie:

$$\begin{aligned}
s_{1k} &= \cos(m\mu_k / 2) , \\
s_{2k} &= -\frac{C_R}{B_y} m\mu_k \sin(m\mu_k / 2) - m\mu_k^2 \cos(m\mu_k / 2) , \\
s_{3k} &= rk_k \cos(m\mu_k / 2) , \\
s_{4k} &= -rk_k m\mu_k^2 \cos(m\mu_k / 2)
\end{aligned} \tag{3.4-7}$$

und bei Antimetrie schließlich:

$$\begin{aligned}
a_{1k} &= \sin(m\mu_k / 2) , \\
a_{2k} &= \frac{C_R}{B_y} m\mu_k \cos(m\mu_k / 2) - m\mu_k^2 \sin(m\mu_k / 2) , \\
a_{3k} &= rk_k \sin(m\mu_k / 2) , \\
a_{4k} &= -rk_k m\mu_k^2 \sin(m\mu_k / 2) .
\end{aligned} \tag{3.4-7}$$

Damit ist die Verfahrensentwicklung theoretisch abgeschlossen, denn es folgt automatisch, daß für gegebene Steifigkeiten, Geometrie und Lastverhältnisse so lange über die unbekannte Last p_x und das unbekannte Beulfeldseitenverhältnis a/b zu variieren ist, bis eine minimale kritische Last p_x aufgefunden ist. Dazu muß für jede neue Kombination aus Last und Beulfeldseitenverhältnis erneut die Bestimmung der Nullstellen und die anschließende Überprüfung der Randbedingungen erfolgen. Ist eine solche minimale Last, die die Randbedingungen und die Differentialgleichungen am leicht verformten Element erfüllt, gefunden, so ist die Beullast p_{xkrit} bestimmt, und das zugehörige Seitenverhältnis entspricht dem sich einstellenden Beulfeldseitenverhältnis. Die Amplituden können dann praktisch unendlich groß werden, das lineare, homogene Gleichungssystem bleibt lösbar, so lange die Verhältnisse zwischen den einzelnen W_k^* und den F_k^* erhalten bleiben. Dies liefert auch die Begründung dafür, daß die Berechnung nur die Stabilitätsgrenze, d.h. den Beulbeginn, und nur die Beulform, nicht aber die Beulamplitude liefert.

Für die Berechnung der tatsächlichen Beulamplituden wären große Verformungen anzunehmen, was zur nichtlinearen Theorie führt. Für das Nachbeulverhalten oder das Durchschlagen kann das von Interesse sein, doch meistens reicht eine Abschätzung der Stabilitätsgrenze aus, da Instabilität eben nicht zugelassen wird.

3.5 Zusammenfassung und numerische Umsetzung

Der erste Schritt bei der Bestimmung des Beulwertes ist die Berechnung der vier Nullstellen des Polynom vierten Grades in λ , welches sich aus der Bedingung ergibt, daß der gewählte Ansatz die Differentialgleichungen erfüllen muß, die das Modell der Scheibe beschreiben. Es handelt sich dabei um ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, woraus sich die Bedingung ergibt, daß die Determinante der Koeffizientenmatrix nach Auswertung der Ansätze Null sein muß. Vom Programm muß erkannt werden, um welche Art von Nullstellen es sich handelt, um eine korrekte Zuordnung der Berechnung der Koeffizienten des Gleichungssystems zu erhalten. Dazu müssen unter Vorgabe einer kleinen Toleranz die Beträge der Real- und Imaginärteile jeder Nullstelle mit Null verglichen werden, und sollten beide ungleich Null sein, so ist nur zu überprüfen, welches die konjugiert komplexe Nullstelle ist.

Mit den so berechneten Nullstellen ist anschließend zu kontrollieren, ob der Ansatz die Randbedingungen erfüllt, was mit vier Nullstellen und vier Gleichungen wiederum auf ein lineares, homogenes Gleichungssystem führt, dessen Koeffizientenmatrix eine verschwindende Determinante haben muß.

Sind beide Determinanten Null, so besteht die Möglichkeit, daß es sich für die gewählte Wertekombination um einen Beulwert handelt. Zu ihm gehört aber ein bestimmtes Seitenverhältnis, so daß nicht nur über die Last p_x zu iterieren ist, sondern übergeordnet auch über das Seitenverhältnis a/b , um den minimalen Beulwert zu erhalten. Als Minimalforderung ist also für beliebige Seitenverhältnisse über p_x zu iterieren und ein Minimum in p_x bezüglich a/b aufzusuchen. Jeder Iterationsschritt beinhaltet also komplett die oben beschriebenen Schritte.

Die so bestimmte Beullast gilt dann nur für die vorgegebenen Parameter, die sich aus Schalensteifigkeiten, vorgegebener Drucklast und Randeinspannungsfedersteifigkeit zusammensetzen. Diese Parameter sind nun übergeordnet zu variieren. Eine Grafik soll das Verfahren veranschaulichen, siehe Abbildung 3.1.

Numerisch umgesetzt wird das Verfahren mittels eines Programmes in FORTRAN 77. Die Nullstellenberechnung wird mittels eines Algorithmus aus [13] durchgeführt, während die Bestimmung der Determinanten auf die öffentliche Programmbibliothek SCILIB (SCientific LIBrary) zurückgreift, die von der ZRZ an der TU Berlin zur Verfügung gestellt wird.

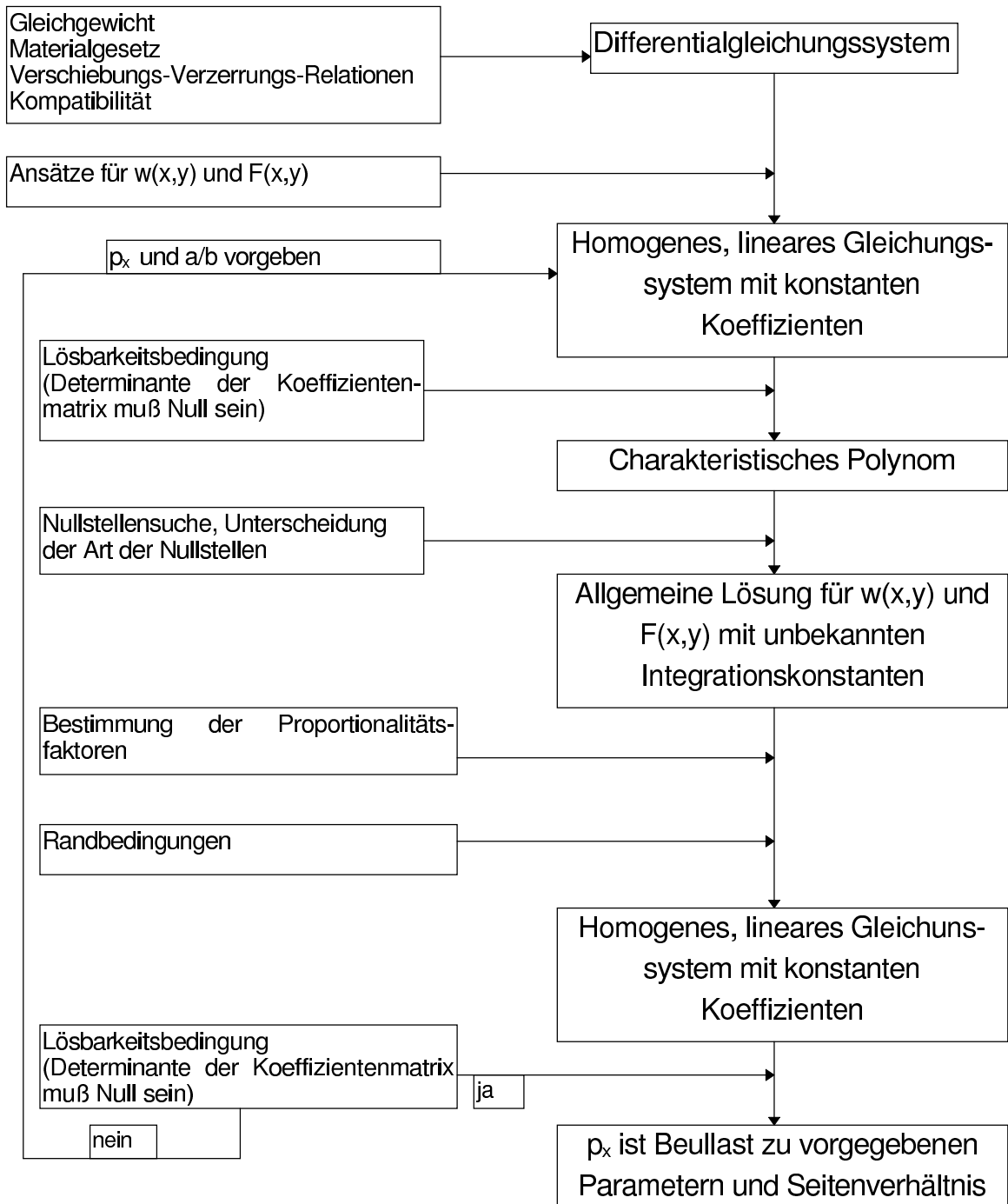


Abb. 3.1: Prinzipskizze zum Verfahrensablauf

In dieser Bibliothek sind Algorithmen zur Operation mit Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssystemen zu finden. Sie sind sehr umfangreich und unterliegen auf Grund der öffentlichen Zugänglichkeit einer ständigen Kontrolle. Tests ergeben eine große Zuverlässigkeit, und die Bestimmung der Nullstellen der Determinante sind auch solange unproblematisch, wie die eingegebenen Matrizen nicht so schlecht konditioniert sind, daß sie numerisch singulär werden. Speziell wird die Routine MINV aus der Bibliothek VEKMAT.f und die zugehörigen Subroutines daraus und aus LINPACK.f verwendet. Diese Routine kann lineare Gleichungssysteme lösen, Matrizen invertieren und faktorisieren und deren

Determinante bestimmen. Mit dieser Routine erfolgt auch zu Kontrollzwecken eine Lösung des Gleichungssystems zur Bestimmung der Proportionalitätsfaktoren, welche aber genauer aus einer halbanalytischen Bestimmung durch Umformung und Auftrennung der zwei Gleichungen gewonnen werden.

Die Bestimmung der Nullstellen mittels des Algorithmus BAUNULL aus [13] ist in dieser Arbeit als unproblematisch einzuschätzen. Noch in [2] wird diese als problematisch eingestuft, doch die Vereinfachung des Polynomes ohne Schub führt zu einer Verbesserung der Ergebnisse. Die Vereinfachungen durch Unterscheidung der Art der Nullstellen und die Reduktion auf eine 4×4 -Determinante macht das ganze Verfahren wesentlich stabiler, was ein Vergleich mit [3] ebenfalls offenbart. Trotzdem ergeben sich eine Vielzahl von nicht interpretierbaren Lösungen, die nun aber nicht mehr auf numerische Instabilitäten zurückzuführen sind.

4 Vergleich mit einigen analytischen Lösungen

In diesem Kapitel sollen analytische Gleichungen zur Bestimmung von Beulwerten sowie die zu variierenden und den Schalenstreifen beschreibenden Parameter angegeben werden. Die analytischen Bestimmungsgleichungen für den Beulwert sind im wesentlichen aufgeführt, um den im Anschluß folgenden Vergleich von analytischen und numerisch ermittelten Werten nachvollziehbar zu machen.

4.1 Variationsparameter und Abkürzungen

Die hier aufgeführten Größen sind [1] entnommen, um eine dimensionslose Darstellung der Ergebnisse zu ermöglichen. Angefangen wird mit den Parametern, die den Schalenstreifen beschreiben. Dessen Krümmung kann durch das (geometrische) Krümmungsmaß ρ , das wie folgt definiert sei:

$$\rho = \frac{b^2}{rt} , \quad (4.1-1)$$

oder den Krümmungsparameter Ω mit

$$\Omega = \frac{b^2}{r^2} \sqrt{\frac{D_x D_y}{B_x B_y}} \quad (4.1-2)$$

beschrieben werden. Für ebene Schalenstreifen sind beide Null, da der Radius gegen unendlich geht. Bei Isotropie vereinfacht sich der Krümmungsparameter auf Grund der Gleichheit der Steifigkeiten in x- und y-Richtung zu

$$\Omega = 12(1-\nu^2) \left(\frac{b^2}{rt} \right)^2 . \quad (4.1-3)$$

Die Materialeigenschaften, die aus den Steifigkeiten resultieren, lassen sich ebenfalls mit dimensionslosen Parametern beschreiben. Zuerst sei die Kreuzzahl η mit ihrem Wertebereich genannt:

$$\eta = \frac{B_{xy}}{\sqrt{B_x B_y}}, \quad \eta = 0 \dots \infty. \quad (4.1-4)$$

Die Kreuzzahl nimmt schon bei der ebenen Platte einen Einfluß auf den Beulwert, und ihr Einfluß wird in [1], [2] und [3] ausführlich untersucht.

Aus den Scheibensteifigkeiten läßt sich die Scherzahl ζ bilden:

$$\zeta = \frac{\sqrt{D_x D_y}}{D_{xy}}, \quad \zeta = -1 \dots \infty, \quad (4.1-5)$$

und aus Platten- und Scheibensteifigkeiten kann das Hauptsteifigkeitsverhältnis ε gebildet werden, das bei homogenem Aufbau des Materials eins ist:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{B_x D_y}{B_y D_x}}, \quad \varepsilon = 0 \dots \infty. \quad (4.1-6)$$

Beide haben keinen Einfluß auf den Beulwert des ebenen Schalenstreifens. Drückt man diese Größen mittels der Zusammenhänge aus dem Materialgesetz 2.3-1 bis 2.3-3 aus, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{c_{45} + 2C_{66}}{\sqrt{c_{44} c_{55}}}, \\ \zeta &= \frac{c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{33}}{2c_{33} \sqrt{c_{11} c_{22}}} \text{ und} \\ \varepsilon &= \sqrt{\frac{c_{44} c_{22}}{c_{55} c_{11}}}. \end{aligned} \quad (4.1-7)$$

Unabhängig davon, welche Steifigkeiten man vorgibt, ist es offenbar möglich, die Materialparameter einzeln und voneinander unbeeinflußt zu variieren.

Zuletzt seien noch die über die Steifigkeiten korrigierten Seitenverhältnisse aufgeführt. Das wirksame Beulfeldseitenverhältnis der Platte ergibt sich zu:

$$\alpha_w = \frac{1}{\beta_w} = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{B_y}{B_x}}. \quad (4.1-8)$$

Für die Berechnung des Beulwertes werden im Anschluß die Kehrwerte der wirksamen Beulfeldseitenverhältnisse benötigt. Mit der Anzahl m der Beulhalbwellen in x - und der Anzahl n der Beulhalbwellen in y -Richtung werden nach [1] eingeführt:

$$\beta_{\text{vmm}} = \frac{mb}{na} \sqrt[4]{\frac{B_x}{B_y}} \quad \text{und} \quad \beta_{\text{vmm}} = \frac{mb}{na} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}. \quad (4.1-9)$$

Die Vorteile, die sich ergeben, wenn diese dimensionslosen Parameter eingeführt werden, ist die Übertragbarkeit der Ergebnisse auf ähnliche Schalenstreifen mit gleichen Parametern. Aus diesem Grund wird ebenfalls im nächsten Unterkapitel der dimensionslose Beulwert eingeführt, da die Berechnung bestimmter Beullasten ein zu beschränktes Ergebnis wäre. Dieser Beulwert ist dann nur noch eine Funktion dieser dimensionslosen Parameter, bzw., er hängt nur noch von diesen ab.

4.2 Der Beulwert

Bezieht man die Beullast auf die Biegesteifigkeit und multipliziert mit dem Quadrat der Plattenbreite, so erhält man wiederum einen dimensionslosen Wert, den Druckbeulwert:

$$k = \frac{p_{\text{kr}} b^2}{\pi^2 \sqrt{B_x B_y}}, \quad (4.2-1)$$

wobei p_{kr} die beulkritische Drucklast in N/m ist. Der Beulwert kann noch auf andere Art und Weise eingeführt werden, siehe [1], soll in dieser Arbeit jedoch einheitlich so verwendet werden.

Es gibt für einige Fälle analytische Gleichungen für den Beulwert, an Hand derer unter anderem das Programm getestet werden kann. Der einfachste Fall ist der der ebenen, allseitig gelenkig gelagerten, isotropen Platte. Der Beulwert berechnet sich nach [1]:

$$k = n^2 \left(\frac{na}{mb} + \frac{mb}{na} \right)^2, \quad (4.2-2)$$

mit den Anzahlen der Beulhalbwellen m und n in x - und y -Richtung. Die Anzahl der Beulhalbwellen in Belastungsrichtung ist also m , die Anzahl der Beulhalbwellen quer zur Belastungsrichtung ist danach n . Diese Gleichung gilt sowohl für den Beulwert der symmetrischen als auch der antimetrischen Beulform. Will man den zur antimetrischen Beulform gehörenden Beulwert berechnen, so muß man lediglich n zu zwei setzen und dann über m und dem Seitenverhältnis das Minimum von k bestimmen, da sich der Beulwert immer als Minimum ergibt, wenn sich Beulenzahl und somit das natürliche Beulfeldseitenverhältnis frei einstellen können.

Für denselben Fall des ebenen und gelenkig gelagerten Streifens gilt bei Orthotropie nach [1]:

$$k = \left(\frac{\alpha_w}{m} + \frac{m}{\alpha_w} \right)^2 + 2(\eta - 1) , \quad (4.2-3)$$

womit sich für unendlich lange Streifen, wie sie in dieser Arbeit untersucht werden, ergibt, daß

$$k = 2(1 + \eta) , \quad (4.2-4)$$

weil sich das natürliche wirksame Seitenverhältnis α_w von eins einstellen und k somit über m mit $m=1$ ein Minimum annehmen kann. Girlandendiagramme dazu entnehme man [1] oder [3].

Bei Antimetrie und Isotropie ergibt sich im ebenen Fall ein viermal so großer Beulwert ($n=2$):

$$k_{(anti)} = 4 \left(\frac{2a}{mb} + \frac{mb}{2a} \right)^2 , \quad (4.2-5)$$

wobei ebenfalls über m und a/b zu minimieren ist. Das Minimum mit $m=1$ wird bei $a/b=1/2$ erreicht. Die zu 4.2-4 analoge Vereinfachung für Antimetrie lautet:

$$k_{(anti)} = 8(1 + \eta) . \quad (4.2-6)$$

Beim Übergang zur schwach gekrümmten, orthotropen und allseitig gelenkig gelagerten Schale ergibt sich nach [1]:

$$k = n^2 \left(\beta_{wmn}^2 + 2\eta + \frac{1}{\beta_{wmn}^2} + \frac{\Omega}{\pi^4 n^4 \left(\beta_{vmn}^2 + 2\zeta + \frac{1}{\beta_{vmn}^2} \right)} \right) , \quad (4.2-7)$$

oder für lange Schalenstreifen etwas vereinfacht:

$$k \approx 2(1 + \eta) + \frac{\Omega}{\pi^4 \left(\varepsilon + 2\zeta + \frac{1}{\varepsilon} \right)} . \quad (4.2-8)$$

Im Fall der Isotropie ergeben sich leicht vereinfachte Gleichungen, die aber hier nicht angegeben werden sollen, da sie in den Gleichungen für den orthotropen Streifen enthalten sind. Ab einer bestimmten Krümmung, die je nach Steifigkeiten und Beulform unterschiedlich sein kann, gilt nach [1]:

$$k \approx \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{1 + \eta}{1 + \zeta}} \Omega , \quad (4.2-9)$$

was dem Rohrbeulwert entspricht. Daß dies zumindest für Kreuzzahlen größer als eins so nicht für den Schalenstreifen gilt, ist schon in [2] und [3] aufgezeigt worden. In dieser Arbeit wird das Verhalten der Lösungen dahingehend ebenfalls untersucht werden, siehe Kapitel sechs. Für Antimetrie bei Krümmung ist die Vervielfachung des symmetrischen Beulwertes nicht mehr möglich, wie an Ergebnissen zu sehen sein wird.

Für die fest eingespannte, isotrope und ebene Platte gibt [9] eine Lösung an, die bereits in [3] herangezogen und mit diesem Verfahren überprüft worden ist. Lediglich der Beulwert $k=6,97$ und das dazugehörige Seitenverhältnis $a/b=2/3$ wird bei den anschließenden Ergebnissen zum Vergleich herangezogen werden. Der Beulwert muß mit steigender Einspannfederzahl ebenfalls steigen und gegen den Wert der festen Einspannung konvergieren.

4.3 Beulwert in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis, ebener Schalenstreifen

Mit Gleichung 4.2-3 ist es möglich, den Beulwert in Abhängigkeit vom wirksamen Seitenverhältnis darzustellen. Da die Kreuzzahl über B_{xy} variiert wird, siehe Gleichung 4.1-4, somit also B_x und B_y unverändert bleiben, ist nach Gleichung 4.1-8 das wirksame gleich dem geometrischen Seitenverhältnis a/b . In den folgenden Abbildungen sind die analytischen Kurven im Vergleich mit den vom Programm berechneten Lösungen dargestellt. Die durchgezogene Linie entspricht den analytischen Werten für den ebenen Schalenstreifen, während die waagerechten kurzen Striche den numerisch ermittelten Lösungen entsprechen. Diese kurzen Striche starten als Symbol beim gefundenen Wert und gehen dann nach rechts, so daß bei Übereinstimmung der Werte das linke Ende des Striches auf der analytischen Kurve liegen muß. Für Beulwerte zur symmetrischen Beulform wird in Gleichung 4.2-2 $n=1,3,\dots$, für antimetrische $n=2,4,\dots$ gesetzt. Es wird hier nur die Kreuzzahl variiert, ϵ und ζ bleiben eins.

In Abbildung 4.1 ist eine Übereinstimmung von analytischer Kurve und numerischen Werten für Isotropie ($\eta=1$) zu erkennen, wobei der rechte Teil der Kurve völlig in den Strichen, die die vom Programm berechneten Werte kennzeichnen, verschwindet. Bei $a/b=1$ wird der minimale Beulwert $k=4$ erreicht. Die Punkte, die weit oberhalb der Kurve liegen und ihr Minimum bei 36 und einem Seitenverhältnis von $1/3$ haben, entsprechen dem Beulwert, der sich nach Gleichung 4.2-2 mit $n=3$, $m=1$ und $a/b=1/3$ berechnet. Dies entspricht der nächsthöheren symmetrischen Beulform mit $n=3$.

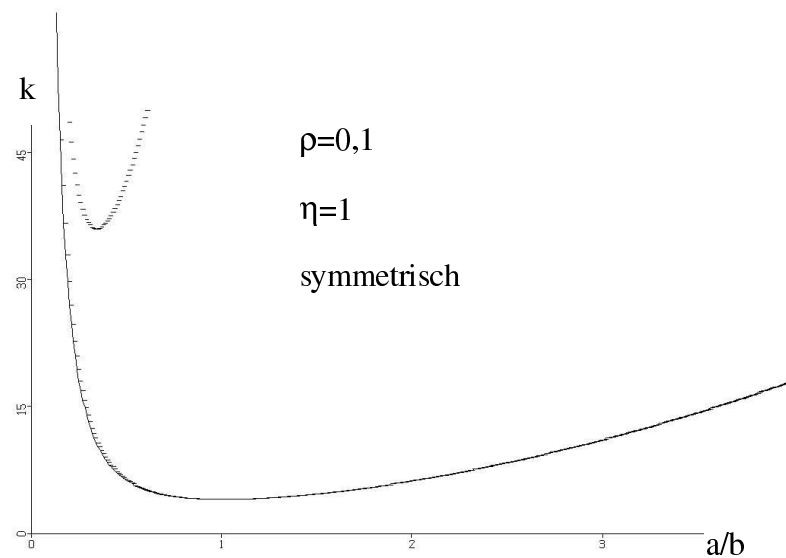


Abb. 4.1: Beulwert über Seitenverhältnis

In Abbildung 4.2 ist der zur antimetrischen Beulform gehörende Beulwert über dem Seitenverhältnis dargestellt. Die Übereinstimmung ist hier ebenfalls sehr gut, außer, daß eine Lösung unterhalb der gesuchten existiert, die nicht interpretierbar ist. Da deren Abstand von der gesuchten Lösung jedoch sehr groß ist, ist die Trennung hier noch unproblematisch. Zum Beulwert $k=16$ gehört ein Seitenverhältnis von $a/b=1/2$ (mit $m=1$, oder $a/b=1$ mit $m=2$, siehe Gleichung 4.2-2).

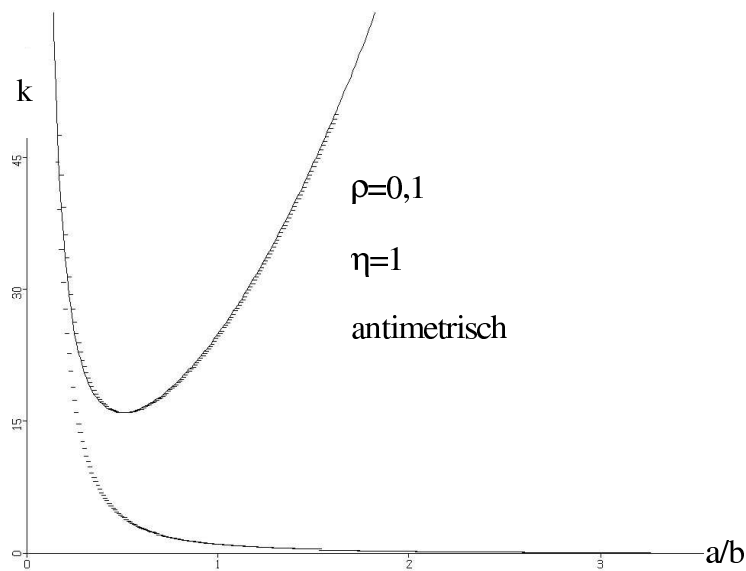


Abb. 4.2: Beulwert über Seitenverhältnis

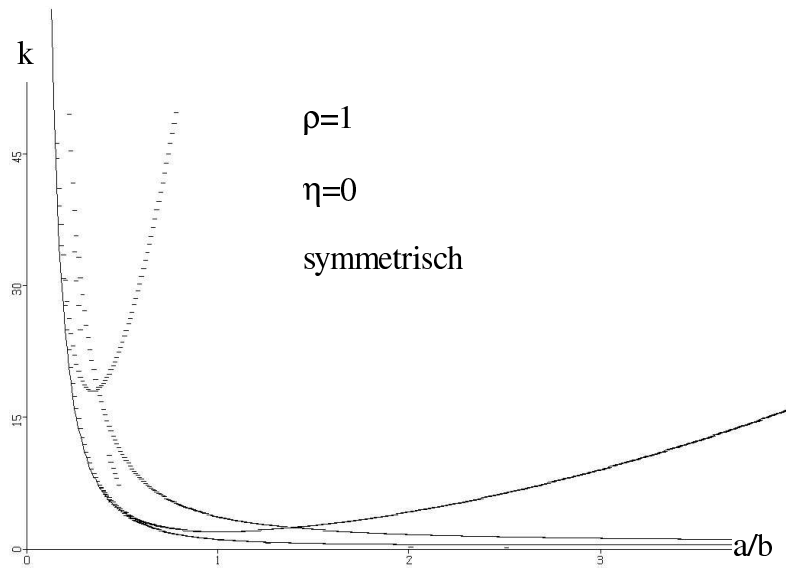


Abb. 4.3: Beulwert über Seitenverhältnis

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 ist die Darstellung für eine Kreuzzahl $\eta=0$ gegeben, wobei das Krümmungsmaß hier aber nicht mehr 0,1, sondern 1 gesetzt worden ist, da mit $\rho=0,1$ numerische Probleme aufgetreten sind. Der Beulwert ist nach Gleichung 4.2-2 zwei bei Symmetrie und das vierfache, also acht, bei Antimetrie, Gleichung 4.2-6. Mit $\rho=1$ wird der ebene Fall noch wiedergegeben, wie an der Übereinstimmung der Programmwerte mit den analytischen Kurven zu erkennen ist. Die analytischen Kurven sind die, die nach rechts hin wieder am höchsten steigen.

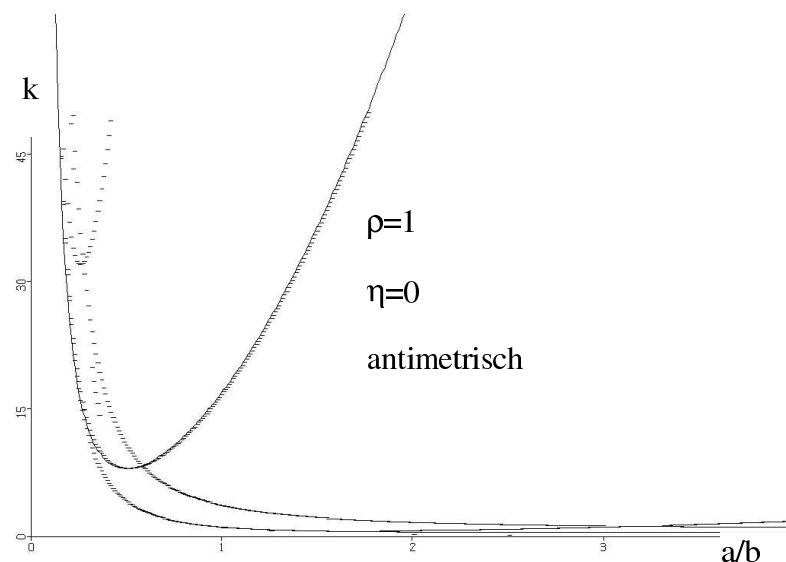


Abb. 4.4: Beulwert über Seitenverhältnis

Es ist zu erkennen, daß für diese Kreuzzahl zwei zu tiefe Lösungen selbst bei Symmetrie auftreten, die nicht als Lösung des Schalenstreifens interpretierbar sind. Interessant wird das Verhalten dieser Lösungen bei steigender Krümmung, weshalb hier noch nicht weiter auf dieses Verhalten eingegangen wird. Die zum minimalen Beulwert gehörenden

Seitenverhältnisse sind dieselben wie bei Isotropie, da die Kreuzzahl über B_{xy} variiert wird und somit ohne Einfluß auf das wirksame Seitenverhältnis bleibt. Die Seitenverhältnisse sind eins für Symmetrie und 1/2 für Antimetrie. Für eine Kreuzzahl von 0,5 ergibt sich ein ähnliches Ergebnis mit ebenso guter Übereinstimmung und den zusätzlichen Lösungen, siehe Abbildungen B.1 und B.2 im Anhang. Die dazugehörigen Beulwerte für Symmetrie und Antimetrie sind drei und zwölf bei Seitenverhältnissen von eins und einhalb.

Sobald von einem Beulwert gesprochen wird, ist stets der minimale gemeint, der zu einem bestimmten Seitenverhältnis a/b gehört, das als Beulfeldseitenverhältnis oder Beulseitenverhältnis bezeichnet wird. Für die analytischen Gleichungen ist es unerheblich, welches Seitenverhältnis a/b vorgegeben wird, da der Beulwert über m und n minimiert werden kann. Die Werte für a und b könnten ebenso äußeren Abmessungen entsprechen. Im Programm wird a/b frei variiert und dadurch der minimale Beulwert aufgefunden. Dort entspricht aber b immer der Gesamtbreite des Streifens! Kommt bei Antimetrie als Beulseitenverhältnis $1/2$ heraus, so bedeutet das dementsprechend, daß über die Breite zwei Beulen auftreten ($n=2$, durch Funktionen impliziert), deren Länge a halb so groß wie die Breite b ist. Damit ist deren tatsächliches Beulfeldseitenverhältnis eins! Länge und Breite der Beule oder des Beulfeldes sind gleich groß, siehe Abbildung 7.3.

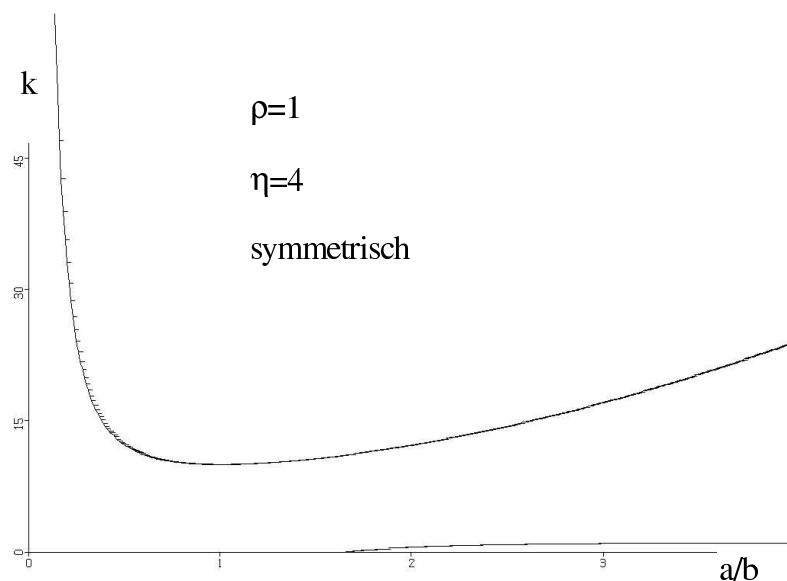


Abb. 4.5: Beulwert über Seitenverhältnis

Die Abbildungen 4.5 und 4.6 sollen das Lösungsverhalten für Kreuzzahlen, die größer als eins sind, demonstrieren, wobei $\eta=4$ als Beispiel gewählt ist. Die Beulwerte $k=10$ (symmetrisch) und $k=40$ (antimetrisch) werden wiederum bei denselben Seitenverhältnissen sowohl von der analytischen Kurve wie auch von den Punkten der Programmwerte korrekt angegeben. Bemerkenswert ist hier, daß die zusätzliche Lösung diesmal von unten kommt, was ebenfalls

bei der Betrachtung gekrümmter Schalen noch eingehend untersucht wird, da diese Lösungen dann mehr ins Gewicht fallen.

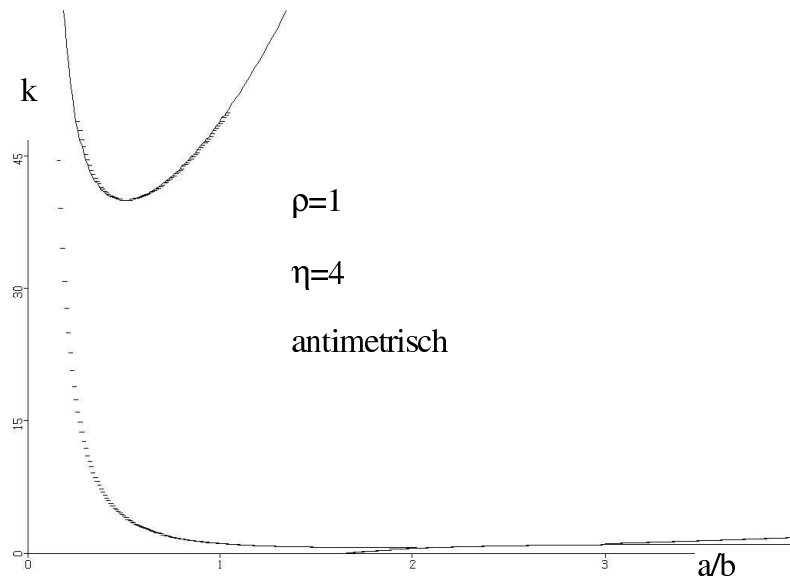


Abb. 4.6: Beulwert über Seitenverhältnis

Es sei noch auf die Abbildungen B.3 und B.4 im Anhang verwiesen. Sie geben weitere Ergebnisse von Kontrollrechnungen für $\eta=2$ wieder und bestätigen die Übereinstimmungen bei Beulwerten von sechs bei Symmetrie und 24 bei Antimetrie bei a/b eins und einhalb. Es treten ebenfalls die zusätzlichen Lösungen auf, und zwar mit derselben Tendenz.

Es ist gut zu erkennen, daß es sehr problematisch wäre, bei Kreuzzahlen kleiner als eins die richtige Lösung des Schalenstreifens bezüglich Beulwert und Seitenverhältnis für die symmetrische Beulform aufzufinden, wenn die analytische Lösung nicht bekannt ist, da die Kurven der Lösungen des halbnumerischen Verfahrens sehr nahe beieinanderliegen und sich kreuzen. Dies führt im weiteren zu kleineren Problemen.

Als ein Beispiel des Verlaufes der Determinante des Gleichungssystemes 3.4-2 wird für $a/b=1/2$ bei Antimetrie und Isotropie eine solche Kurve in Abbildung 4.7 dargestellt. Im Vergleich mit [2] und [3] soll damit herausgestellt werden, daß es sich bei den tiefen Lösungen nicht mehr um die vorher entdeckten Sprung-Nullstellen handelt, die beim Wechsel der Dominanz von Real- und Imaginärteil der Nullstellen aufgetreten sind. Diese Nullstellen der Determinante treten weder im symmetrischen, noch im antimetrischen Fall auf, was im wesentlichen auf die im Gegensatz zu [3] weiterführende Vereinfachung durch Aufteilung und Reduzierung zurückzuführen ist. In [2] ist die Reduktion auf Grund der Berücksichtigung des Schubes nicht möglich. Deshalb kann mit größerer Sicherheit als in [2] und [3] ausgeschlossen werden, daß die aufgefundenen Nullstellen, die nicht mit der analytischen Lösung übereinstimmen, aus numerischen Umständen resultieren. Sie sind Lösungen des Gleichungssystemes, die der Interpretation bedürfen. Das wird im weiteren vorgenommen,

wenn Diagramme wie Abbildung 4.1 bis 4.6 bei gekrümmten Schalenstreifen betrachtet werden.

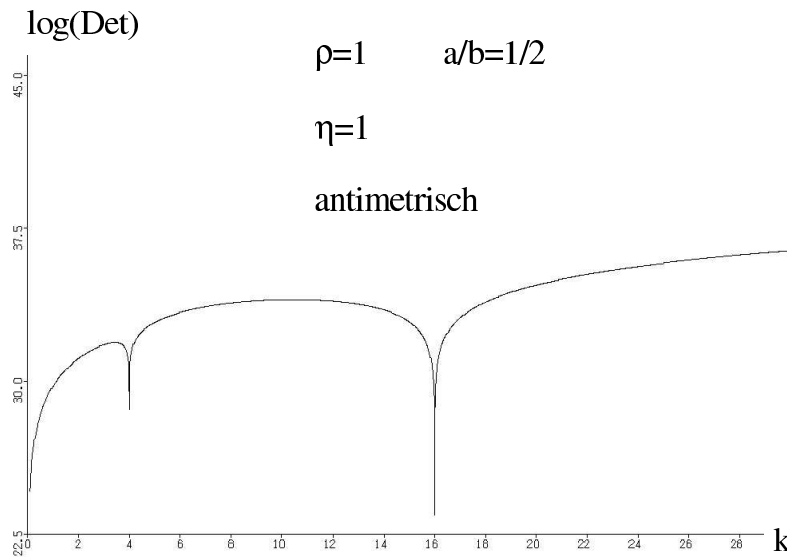


Abb. 4.7: Verlauf der Determinante über dem Beulwert

Es soll noch der bekannte Wert der festen Einspannung für den unendlich langen, isotropen und ebenen Schalenstreifen mit symmetrischer Beulform mit dem Programm nachgerechnet werden. Dieser beträgt $k=6,97$ bei $a/b=2/3$. Er wird im Vergleich mit dem Wert der gelenkigen Lagerung aufgetragen, Abbildung 4.8.

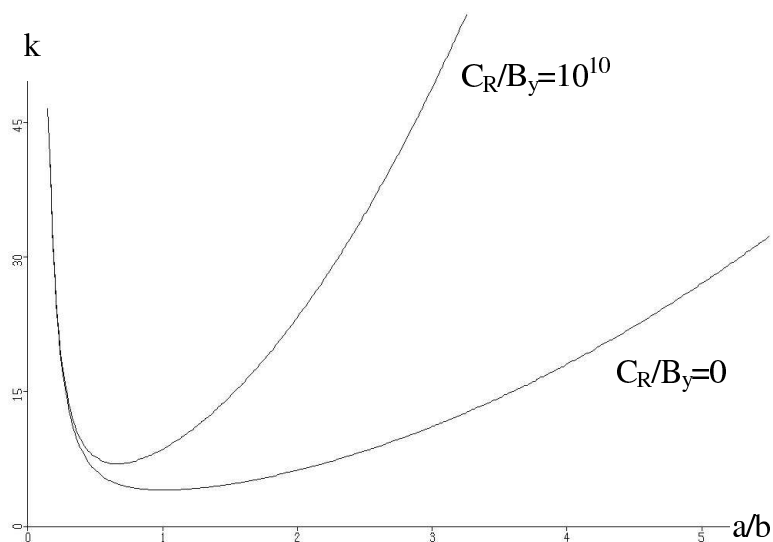


Abb. 4.8: Beulwert über Seitenverhältnis, isotrop und eben

Daß $C_R/B_y=10^{10}$ sowohl für Symmetrie als auch für Antimetrie schon der festen Einspannung entspricht, wird im sechsten Kapitel gezeigt. Der bekannte Wert der festen Einspannung wird genau wiedergegeben, und die Girlande stimmt mit den in [3] für feste Einspannung berechneten überein. Das Programm liefert für die antisymmetrische Beulform bei Isotropie im

ebenen Fall für feste Einspannung einen Wert $k=21,6$ bei $a/b=0,4$. Es liegt allerdings kein analytischer Vergleichswert vor, so daß die Abgrenzung erst bei Krümmungsvariation geschehen kann, da der Einfluß der Einspannung dann verschwinden müßte.

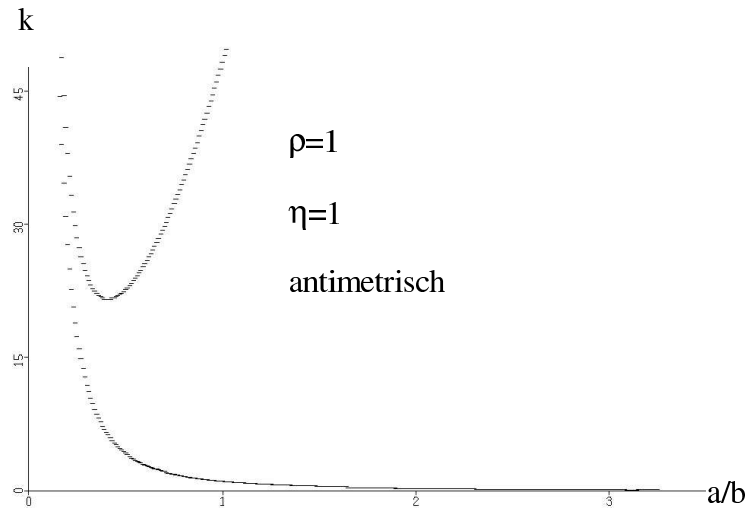


Abb. 4.9: Beulwert über Seitenverhältnis, $C_R/B_y=10^{10}$

In Abbildung 4.9 ist lediglich der antimetrische Fall bei Isotropie für feste Einspannung einmal gezeigt. Es ist zu erkennen, daß die untere Lösung von C_R weniger beeinflusst wird, siehe Abbildung 4.2 für gelenkige Lagerung.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Programm die für den ebenen Fall existierenden analytischen Lösungen genau berechnet, abgesehen davon, daß besonders bei Orthotropie und Antimetrie noch weitere Lösungen berechnet werden, für die keine Interpretation als Lösung des Schalenstreifens mit veränderlicher Randeinspannung möglich ist.

4.4 Beulwert über Krümmung für gelenkige Lagerung

An Hand der Gleichung 4.2-7 können für verschiedene Beulhalbwellenzahlen die Beulwerte in Abhängigkeit der Krümmung Ω berechnet werden, wobei eine Umrechnung über die Gleichung 4.1-3 in das geometrische Krümmungsmaß möglich ist, wenn B_x und B_y wie bei der Variation von η unverändert bleiben. Ansonsten muß aus dem gegebenen geometrischen Krümmungsmaß ρ , über dem aufgetragen wird, und den Steifigkeiten mittels Gleichung 4.1-2 der Krümmungsparameter Ω berechnet werden. Angefangen sei mit Darstellungen für verschiedene Kreuzzahlen η , ε und ζ dagegen bleiben gleich eins.

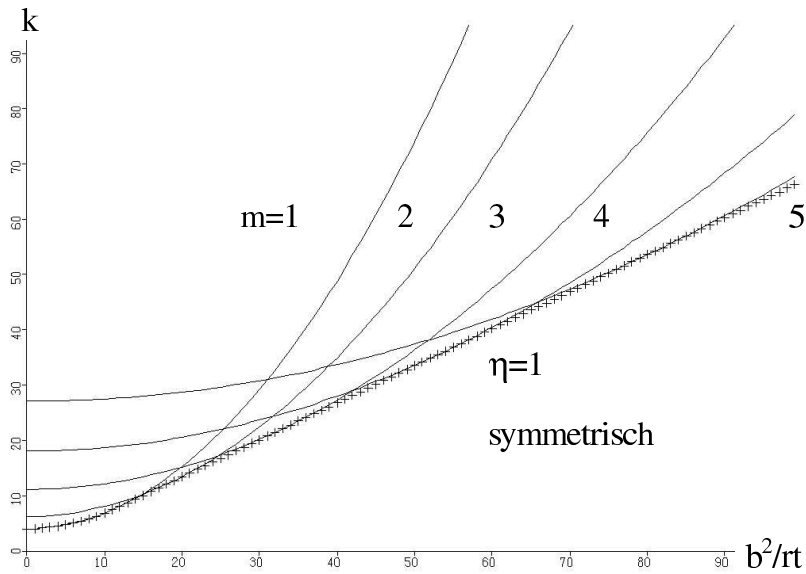


Abb. 4.10: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

In Abbildung 4.10 ist der Beulwert nach 4.2-7 für $n=1$ und $m=1$ bis 5 im Vergleich mit den vom Programm gelieferten Lösungen dargestellt, wobei die analytischen Lösungen den durchgezogenen Kurven entsprechen, während die vom Programm nachgerechneten Punkte als Kreuze dargestellt sind. Die Übereinstimmung ist sehr gut, die numerischen Ergebnisse liegen auf einer Geraden, die der Verbindung der Minima der analytischen Kurven entspricht. Dies ist die Rohrbeulgerade, die durch Gleichung 4.2-9 wiedergegeben wird, vergleiche auch [2] und [3].

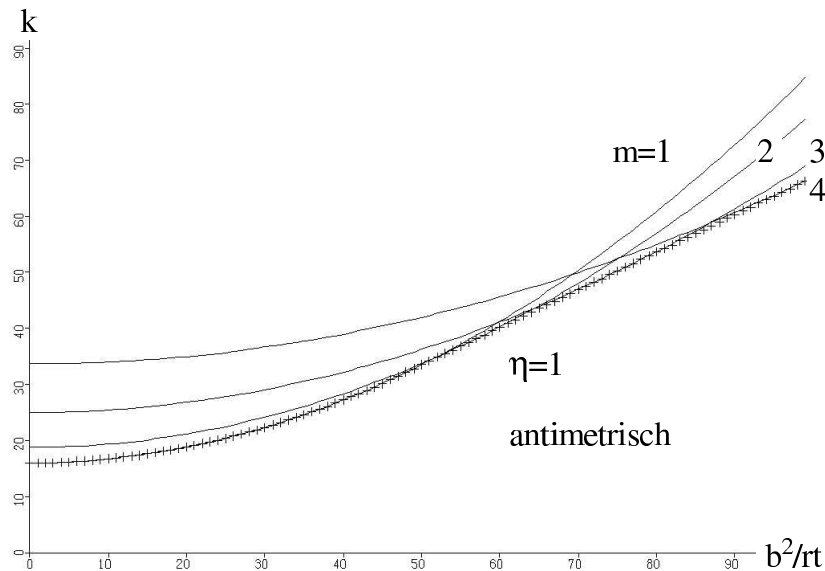


Abb. 4.11: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

Die vom Programm gelieferten Werte passen sich den Kurven nicht genau an, weil bei Ihnen für jeden einzelnen Punkt über das Seitenverhältnis variiert wird und somit beliebige Seitenverhältnisse (oder beliebige Kombinationen von m und n) möglich sind, während in 4.2-7 $a/b=1$ gesetzt wurde. Damit werden nur vom Programm alle Minima erreicht und es ergibt sich

ein Gerade. Zur Erzeugung dieser Werte ist die Variation über dem Seitenverhältnis bereits automatisiert, und für Isotropie treten dabei keine Probleme auf. Selbst bei der antimetrischen Funktion ist das Auffinden der analytischen Lösung bei Isotropie kein Problem, Abbildung 4.11, weil die tieferen Werte sehr weit entfernt liegen und der ebene Fall als Lösung bekannt ist, womit ein Ausgangspunkt für die Variation der Krümmung vorhanden ist. Es ist wieder für Antimetrie $n=2$ gesetzt, und m geht von eins bis vier.

Fügt man beide Darstellungen zusammen, so erhält man Abbildung 4.12, in der zu erkennen ist, daß bei größeren Krümmungen die symmetrische und antimetrische Lösung zusammenlaufen. Bei starken Krümmungen ist die Beulform also nicht eindeutig festgelegt, da einem Beulwert nicht umkehrbar eindeutig einer Funktion zugeordnet werden kann. Dies entspricht [1], wo beim Rohrbeulen beliebige Seitenverhältnisse angegeben werden, was bei Isotropie ebenfalls vom Programm bestätigt wird, siehe Kapitel 6.

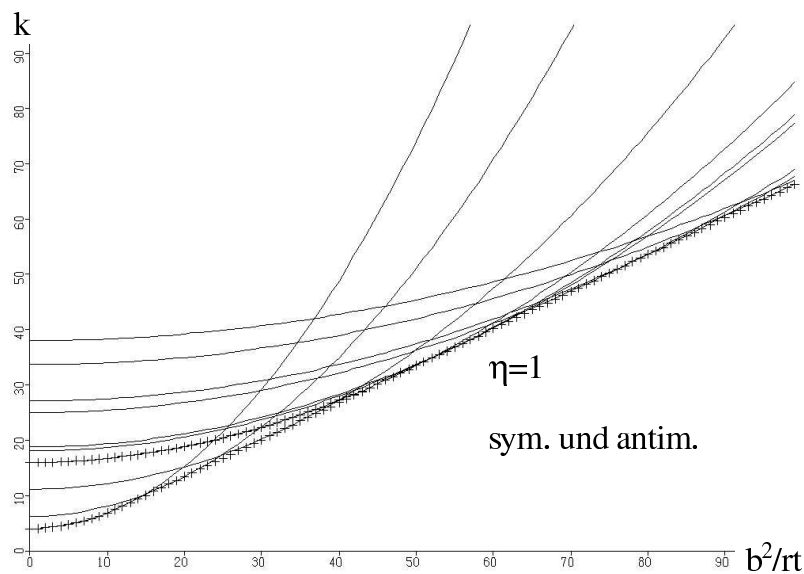


Abb. 4.12: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

Für Kreuzzahlen kleiner als eins ist zu erkennen, daß die numerisch ermittelte Gerade unterhalb der analytisch ermittelten Lösung liegt, siehe Abbildungen 4.13 und 4.14. Dies gilt sowohl für Symmetrie als auch für Antimetrie. Für $\eta=0,5$ ist die Darstellung im Anhang zu finden, siehe Abbildungen B.5 und B.6.

Das liegt daran, daß die Auswertung der analytischen Gleichung für Kreuzzahlen kleiner als eins nicht mit $n=1$ oder 2 und veränderlichem m ausgewertet werden muß, sondern z.B. für Symmetrie mit den Wertepaaren $n=1, m=1$ und $n=2, m=3$ u.s.w., siehe [3]. Nur dann werden die tiefer liegenden Rohrbeulgeraden erreicht, die auch das Programm berechnet. In den Abbildungen 4.13 und 4.14 ist das sehr gut daran zu erkennen, daß nur die Girlanden für $n=1, m=1$ bei Symmetrie und für $n=2, m=1$ bei Antimetrie genau mit den vom Programm berechneten Werten übereinstimmen, analog in den Abbildungen B.5 und B.6.

In [3] wird bereits darauf verwiesen, daß dies in [1] mißverständlich ist. Die Rohrbeulgeraden aus [1], Gleichung 4.2-9, stimmen für Kreuzzahlen größer als eins dagegen nicht mit den Minima der Gleichung 4.2-7, die ebenfalls [1] entstammt, überein. Das wird deutlich, wenn man die hier dargestellten, mit den analytischen Kurven übereinstimmenden Lösungen für $\eta=4$ (Abbildungen 4.15 und 4.16) und 2 (Abbildung B.7 und B.8) in der Abbildung 6.1 betrachtet, die der in [2] entspricht, wo die numerischen Lösungen nur für die Kreuzzahlen kleiner oder gleich eins auf der Rohrbeulgeraden liegen.

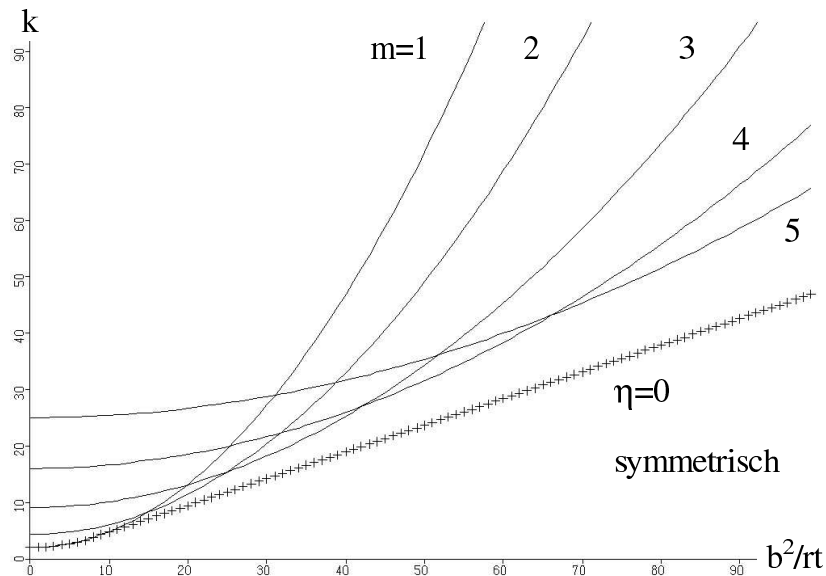


Abb. 4.13: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

Als Fazit bleibt, daß die numerischen Ergebnisse mit den analytischen Lösungen nach Gleichung 4.2-7 vollständig übereinstimmen, sofern m und n korrekt gewählt werden. Für den Schalenstreifen ist jedoch ein n größer als zwei als Lösung anzuzweifeln. Und die Rohrbeulgeraden sind für Kreuzzahlen größer als eins nicht die Tangenten an die Girlanden, womit der Begriff des Rohrbeulwertes nur eingeschränkt anwendbar ist.

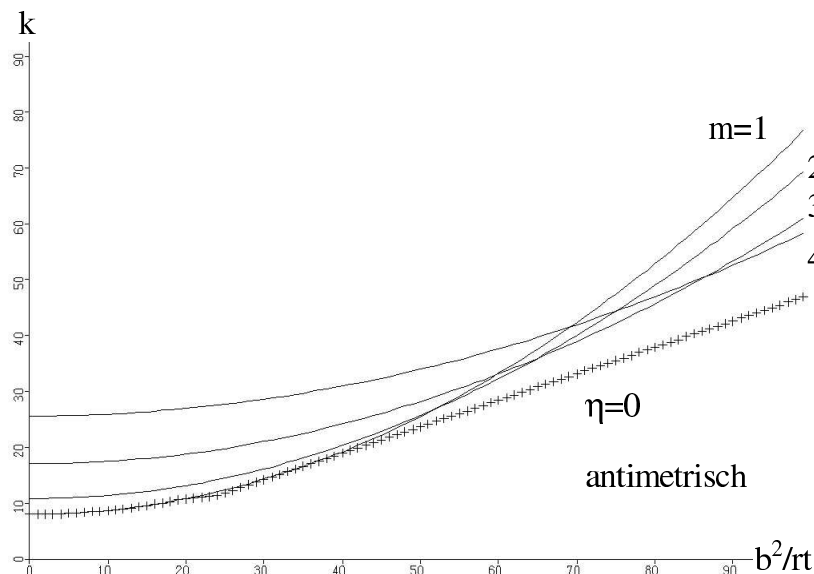


Abb. 5.14: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

In den Abbildungen 4.15 und 4.16 wird der Verlauf des Beulwertes über dem Krümmungsmaß für $\eta=4$ dargestellt, im Anhang findet man entsprechendes in den Abbildungen B.7 und B.8 für $\eta=2$. Diesmal sind die Kurven wieder wie im Fall der Isotropie deckungsgleich.

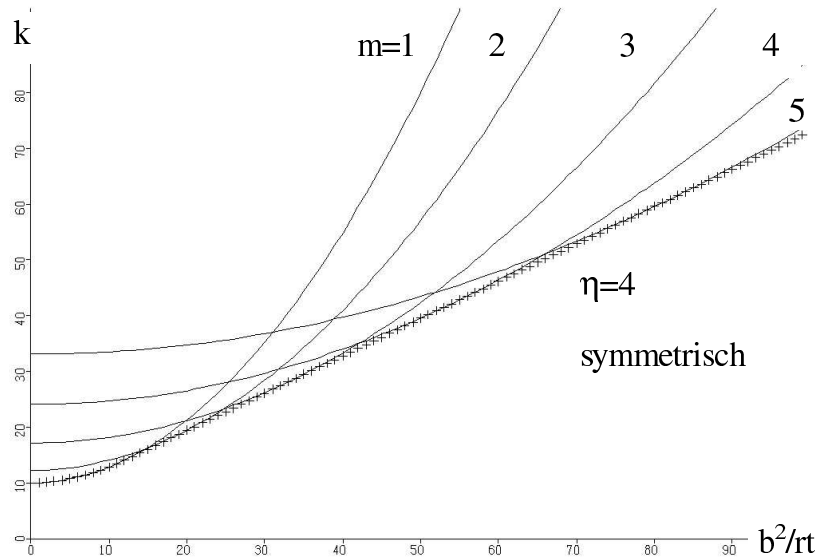


Abb. 4.15: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

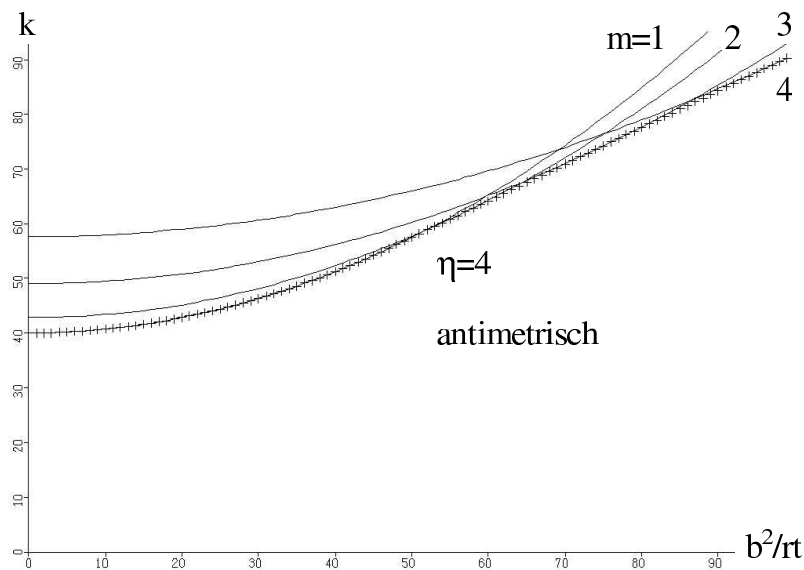


Abb. 4.16: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

Im folgenden soll überprüft werden, ob der Einfluß des Hauptsteifigkeitsverhältnisses ε bei $\eta=\zeta=1$ richtig wiedergegeben wird. Im ebenen Fall hat ε , ebenso wie ζ , keinen Einfluß, aber bei steigender Krümmung muß ein solcher sichtbar werden, und zwar so, daß $\varepsilon=1$ am günstigsten ist. Alle anderen Einstellungen müßten tiefere Beulwerte liefern, was unter anderem [1] auf Seite 214, Bild 4.3/11, zu entnehmen ist. Dies wird im weiteren ebenfalls überprüft.

In den folgenden Abbildungen werden wiederum die mit Gleichung 4.2-7 erzeugten Kurven (durchgezogen) mit den Werten aus dem Programm (Kreuze) verglichen. In Abbildung 4.17 ist

dies der Fall für ein Hauptsteifigkeitsverhältnis von 0,1 und für Symmetrie. Es ist gut zu erkennen, daß diesmal mehr Kurven gezeigt werden, weil die Kurve für $m=1$ noch zu hoch liegt. Das liegt an der schon erwähnten Tatsache, daß bei der Auswertung der analytischen Gleichung 4.2-7 $a/b=1$ gesetzt ist, das wirksame Seitenverhältnis 4.1-9 jetzt aber durch die anderen Biegesteifigkeiten so beeinflusst wird, daß m größer als eins sein muß, um die Minima wiederzugeben. In Abbildung 4.18 für Antimetrie ist dies genauso sichtbar. Man hätte das vermeiden können, in dem man nicht a/b , sondern das wirksame Seitenverhältnis zu eins gesetzt und dann m variiert hätte. Dann wäre der ebene Fall z.B. mit $m=1$ beim wirksamen Seitenverhältnis eins bei Symmetrie wiedergegeben worden. Da man mit beliebigen Eistellungen von a/b und n und m aber letztendlich jedes (wirksame) Seitenverhältnis genauso erreicht, ist darauf verzichtet worden.

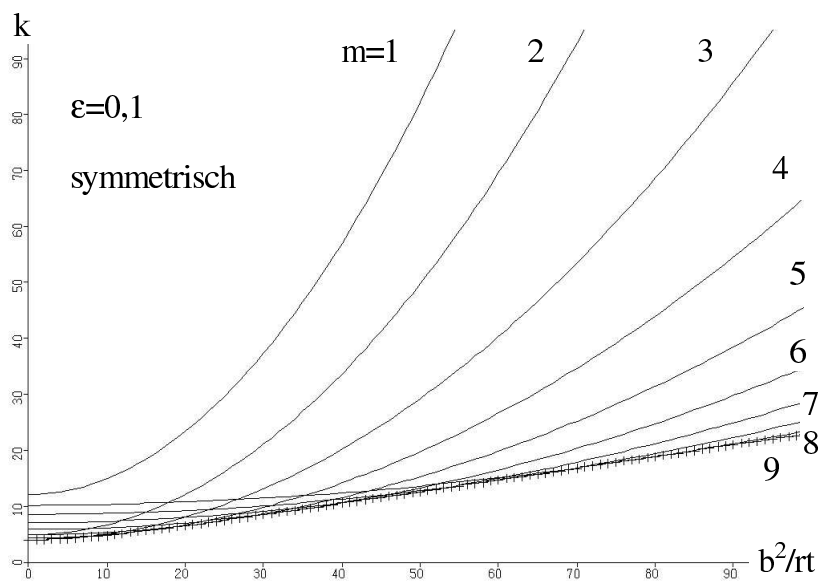


Abb. 4.17: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

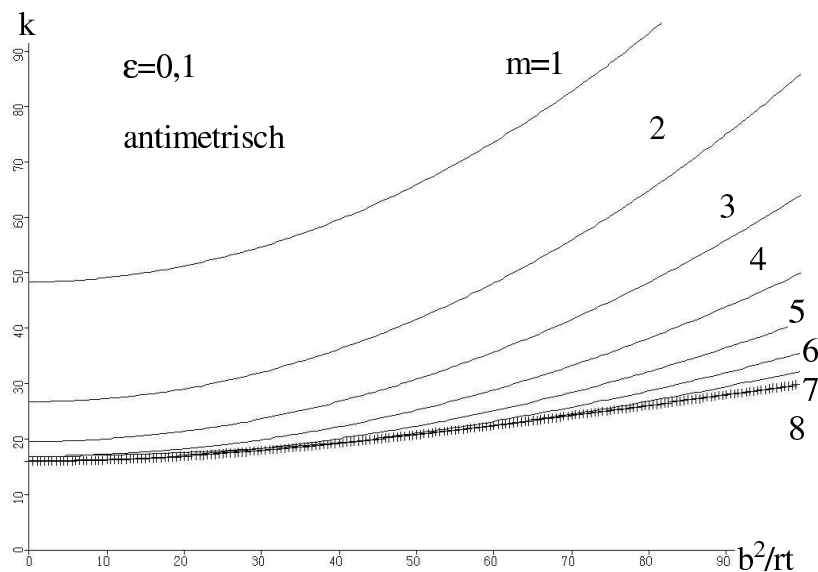


Abb. 4.18: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

Abschließend sollen diese Darstellungen noch für ein Hauptsteifigkeitsverhältnis von zehn wiedergegeben werden, siehe Abbildungen 4.19 und 4.20.

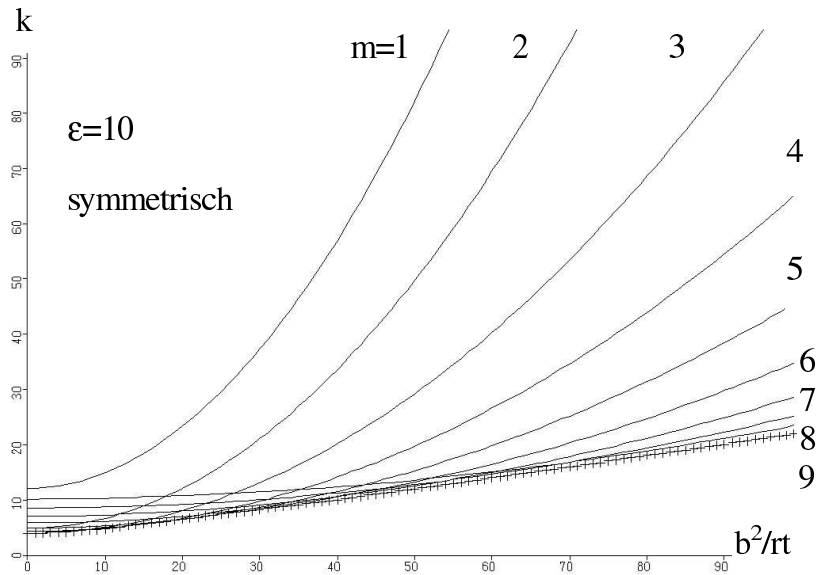


Abb. 4.19: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

Die Übereinstimmung ist ebenfalls sehr gut. Für zwei weitere Hauptsteifigkeitsverhältnisse sind die Kurven im Anhang zu finden, Abbildungen B.9 bis B.12. Im direkten Vergleich wird offensichtlich, daß sich beide Diagramme für Hauptsteifigkeitsverhältnisse von 0,1 und 10 kaum unterscheiden, was im sechsten Kapitel noch begründet wird.

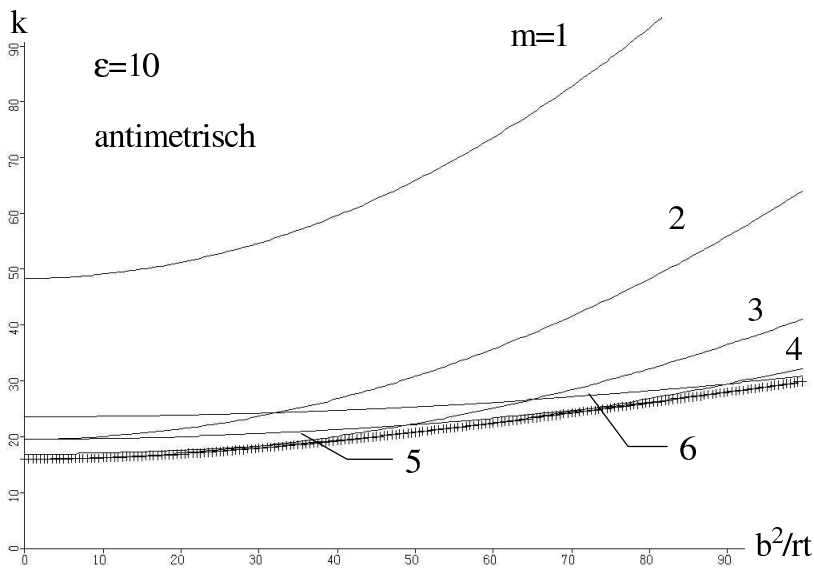


Abb. 4.20: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

Für die Scherzahl ζ ist aus Zeitgründen keine solche systematische Untersuchung mehr erfolgt, so daß keine weiteren Vergleiche mit analytischen Lösungen erfolgt sind. Theoretisch könnte alles so verfeinert werden, daß z.B. auch Beulwerte über dem Seitenverhältnis bei einer konstanten Krümmung, die nicht null ist, mittels Gleichung 4.2-7 erzeugt werden, doch schien

die Überprüfung mittels Darstellungen über der Krümmung umfassender. Ebenfalls aus Zeitgründen kann hier keine beliebig genaue Überprüfung geschehen, sie muß sich auf Einzelpunkte und Teilaspekte beschränken.

Zusammenfassend gesagt, kann dem so programmierten Algorithmus die Berechnung der analytischen Werte zugetraut werden, es kann den Ergebnissen in dem Rahmen, die durch die bekannten Werte gesetzt werden, vertraut werden. Dies entspricht dem Resultat von [2] und [3], nur ist das Verfahren hier wesentlich stabiler. Somit sind weiterführende Rechnungen möglich, wobei die einzelnen Lösungen allerdings immer gegen die bekannten und eventuell zusätzlich auftretende Ergebnisse abzugrenzen sind. Dies soll in den folgenden Kapiteln erreicht werden. Hierbei wird das Verhalten bei steigender Einspannfedersteifigkeit zusätzlich untersucht werden.

Die Tatsache, daß das Programm bei automatisierter Parametervariation auf tiefere Lösungen laufen kann, ist z.B. in den Abbildungen 4.13, 4.14, B.5 und B.6 für Kreuzzahlen kleiner als eins zu erkennen. Es hängt dabei ganz vom Suchverfahren ab, ob es gelingt, die zusätzlichen Lösungen bei der Suche nach der Lösung des Schalenstreifens zu umgehen. Allerdings wird es Fälle geben, wo es nicht möglich ist, ein Interferenz zu vermeiden.

5 Girlandenkurven

In diesem Kapitel sind Kurven der Lösungen des Programmes gezeigt, in denen der Beulwert über dem Seitenverhältnis dargestellt ist. Der Zweck dieses Kapitels ist es, zu erklären, warum gerade bei stärkerer Krümmung bei automatisierter Variation mehrere Lösungen auftreten, die meist unterhalb der analytischen Werte liegen, wie in [2] und [3], wobei allerdings keine physikalische Erklärung gegeben werden kann.

5.1 Krümmungsmaß 5

Es soll mit einer schwachen Krümmung von $\rho=5$ begonnen werden, bei der allerdings schon einige Effekte sichtbar werden. Der wesentliche Unterschied zur analytischen Berechnung sind zusätzliche, unterhalb der analytischen Kurve liegende Lösungen. Bei Isotropie tritt zusätzlich der Rohrbeulwert auf, der vom Seitenverhältnis unabhängig ist, siehe Abbildung 5.1. Bei Antimetrie dagegen tritt neben dem Rohrbeulwert noch eine weitere Kurve auf, deren Minimum auf dem Rohrbeulwert liegt, siehe Abbildung 5.2. Zur Erinnerung, der Beulwert ist bei Isotropie und gelenkiger Lagerung im ebenen Fall vier bei Symmetrie und 16 bei Antimetrie. Die dazugehörigen Seitenverhältnisse sind eins und $\frac{1}{2}$. Der Einfluß der Krümmung auf diese Werte ist noch nicht groß, vergleiche Abbildungen 4.1 und 4.2 für den ebenen Fall.

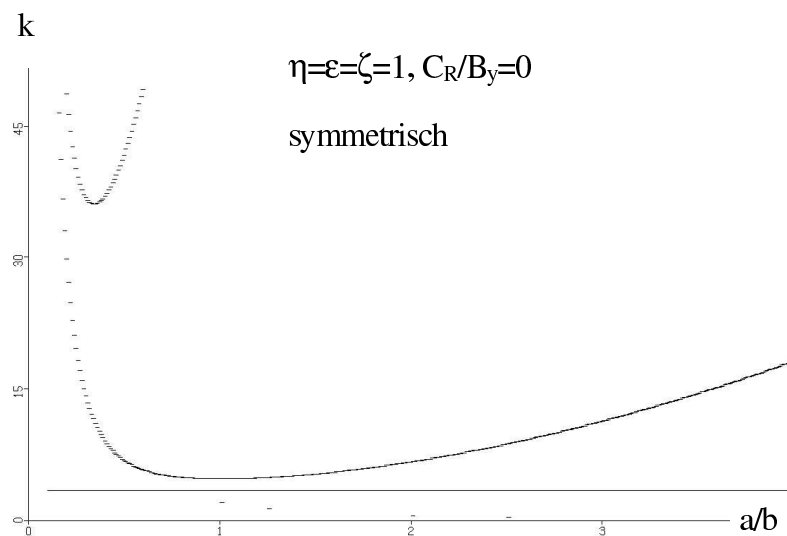
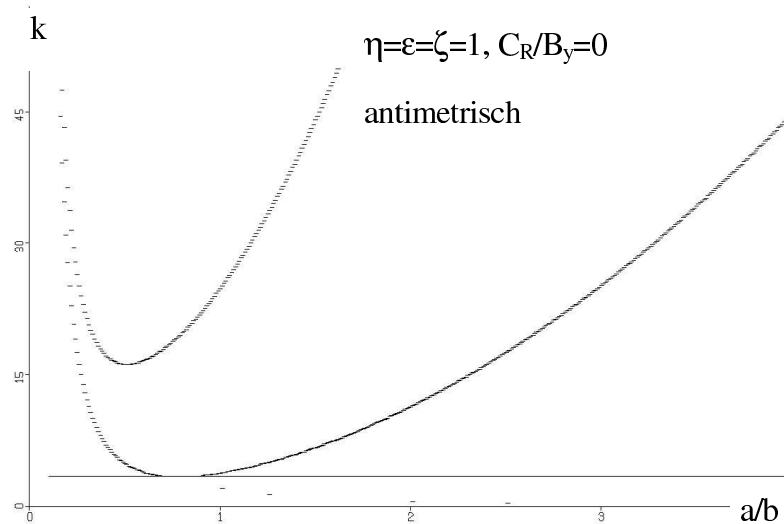
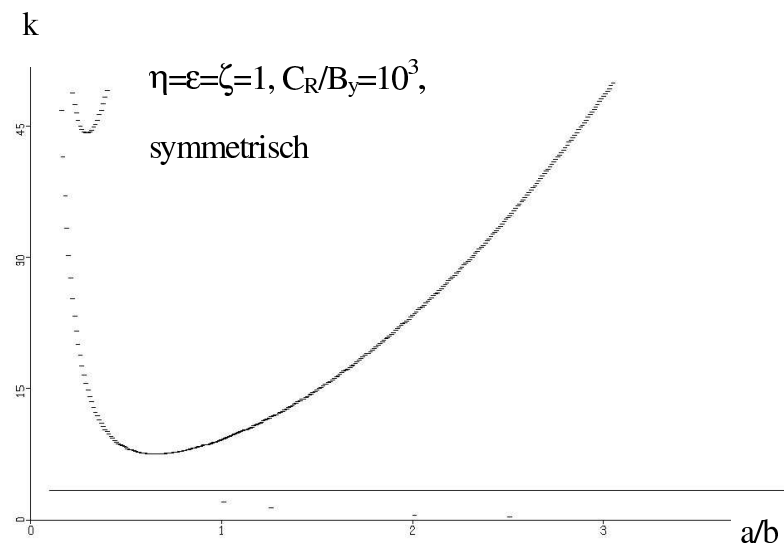


Abb. 5.1: Girlande für Symmetrie


Abb. 5.2: Girlande für Antimetrie

Das Rohrbeulen wird sowohl mit den symmetrischen als auch von den antimetrischen Funktionen berechnet, was auf Grund der Tatsache, daß das Seitenverhältnis unerheblich ist, auch nicht anders sein kann. Wird die Einspannfedersteifigkeit C_R erhöht, so verändern sich nur die Girlanden oberhalb des Rohrbeulwertes, siehe Abbildungen 5.3 und 5.4.


Abb. 5.3: Girlande für Symmetrie

Der Rohrbeulwert bleibt von der Einspannfedersteifigkeit unbeeinflusst, und selbst die zu tief liegende Girlande bei Antimetrie, Abbildung 5.4, verändert ihre Lage nicht. Dies spricht für die Lösung eines geschlossenen Rohres, auf die C_R keinen Einfluß haben kann. Damit ist das keine Lösung des Schalenstreifens.

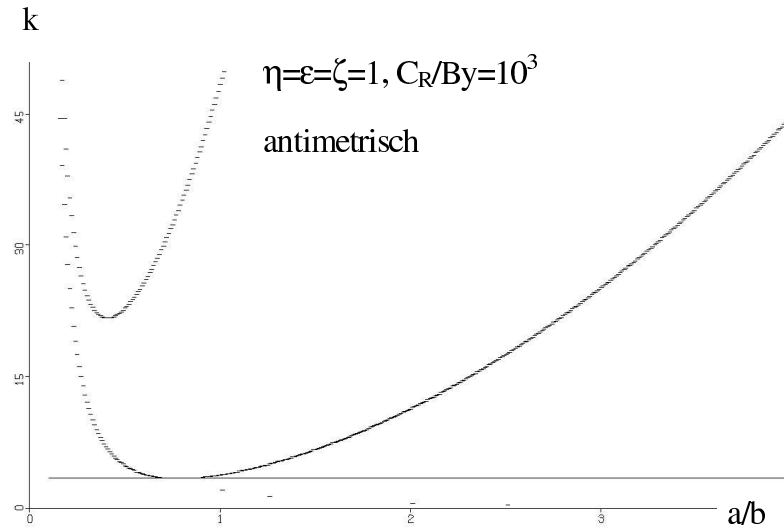


Abb. 5.4: Girlande für Antimetrie

Geht man von Isotropie zu Orthotropie über, so verliert der Rohrbeulwert seine Unabhängigkeit vom Seitenverhältnis, wenn man dann überhaupt noch vom Rohrbeulwert sprechen kann, denn wie schon im vierten Kapitel angedeutet, diese Lösungen werden auch für stärkere Krümmungen und Kreuzzahlen größer als eins unterhalb des in [1] angegebenen Rohrbeulwertes liegen. Dies gilt sowohl für Symmetrie als auch für Antimetrie, wie für $\eta=4$ in den Abbildungen 5.5 und 5.6 gezeigt. Die zusätzlichen Lösungen kommen von unten, bleiben aber noch so weit von der interessierenden Girlande des Schalenstreifens entfernt, daß die Trennung bei automatischer Variation unproblematisch ist.

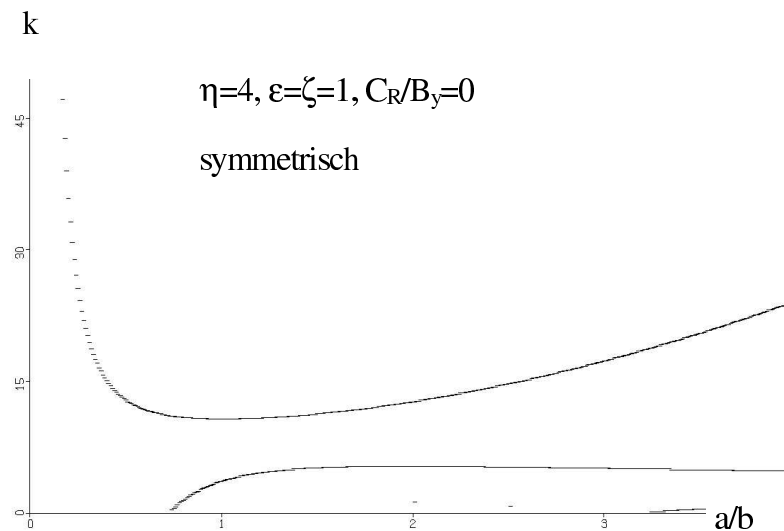


Abb. 5.5: Girlande für Symmetrie

Bei Antimetrie, Abbildung 5.6, tritt bei Orthotropie ebenso wie im Fall der Isotropie, Abbildung 5.2, eine zu tief liegende, weitere Girlande auf, deren Minimum auf den vermeintlichen Rohrbeulkurven liegt. Es ist jedoch hier ebenfalls die Trennung ohne Problem möglich, weil diese Lösungen weit unterhalb der interessanten von k etwas über vierzig liegen,

womit sie selbst unter der bekannten Lösung des ebenen Streifens bleiben. Somit ist immer ein eindeutiges Ausschlußkriterium für diese Lösungen gegeben.

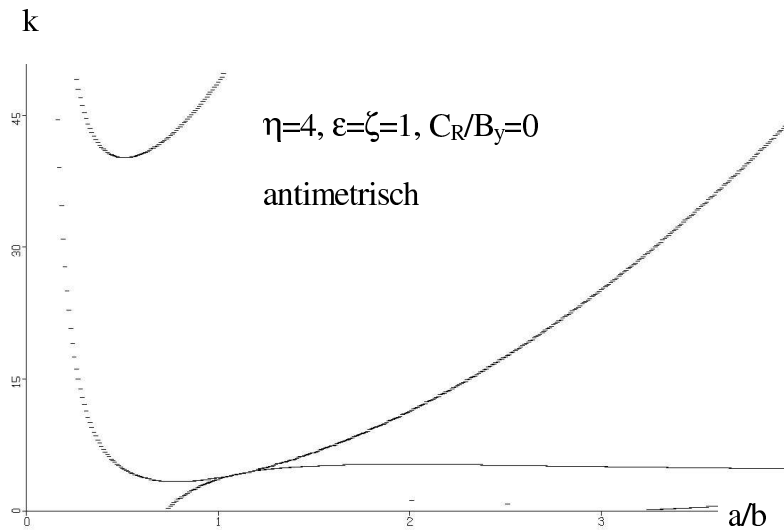


Abb. 5.6: Girlande für Antimetrie

Betrachtet man die Kurven für eine Kreuzzahl von Null, Abbildungen 5.7 und 5.8, so wird ein grundsätzlich anderes Verhalten sichtbar. Die zusätzlichen Lösungen kommen von oben, genau wie die interessierende Lösung. Dies ist bereits in den Abbildung 4.3 und 4.4 zum Ausdruck gekommen, nur sind diese tieferen Lösungen stark von der Krümmung beeinflusst und liegen jetzt sehr nahe an den vermeintlich richtigen Girlanden.

Bei Symmetrie gibt es gerade im relevanten Bereich von k ungefähr vier und a/b eins zwei sehr eng beieinanderliegende Kurven, deren Trennung so nicht möglich ist. Lediglich die Tatsache, daß es Lösungen gibt, die von C_R beeinflusst sind, und welche, die unbeeinflusst bleiben, ermöglicht ein Erkennung der Lösung des Schalenstreifens bei Einspannungsvariation.

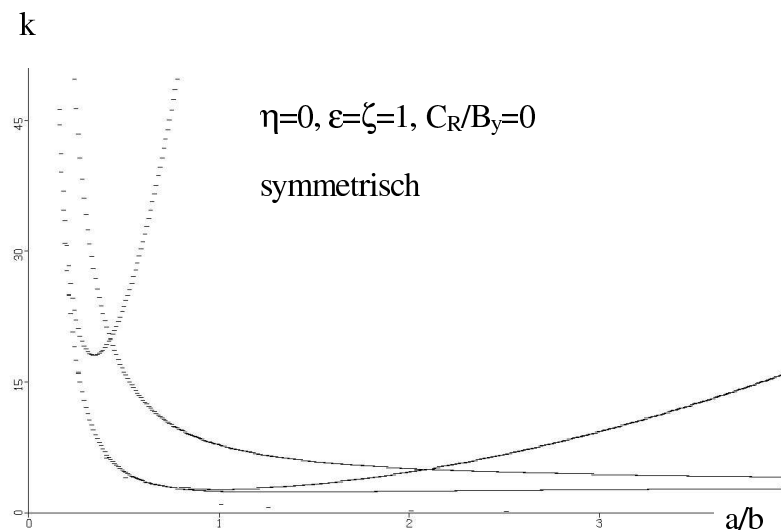
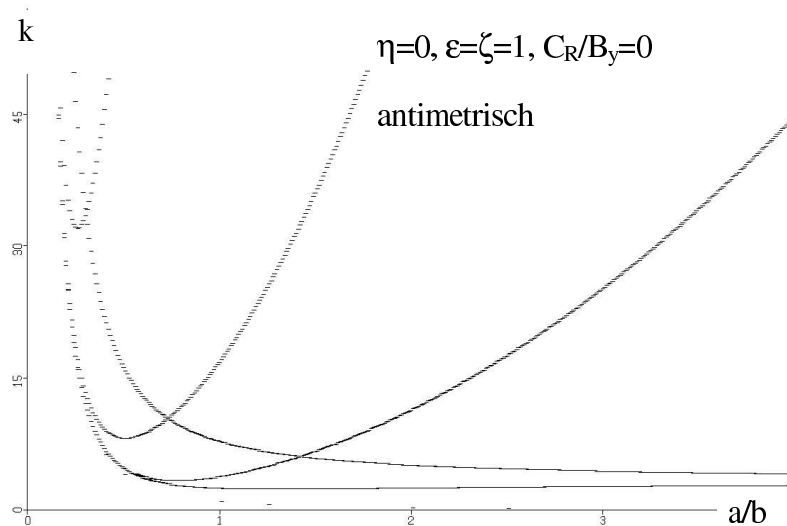
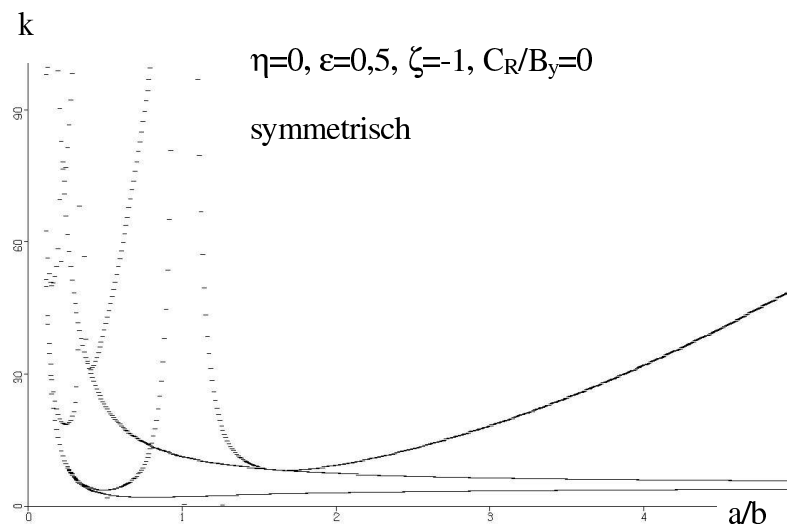


Abb. 5.7: Girlande für Symmetrie

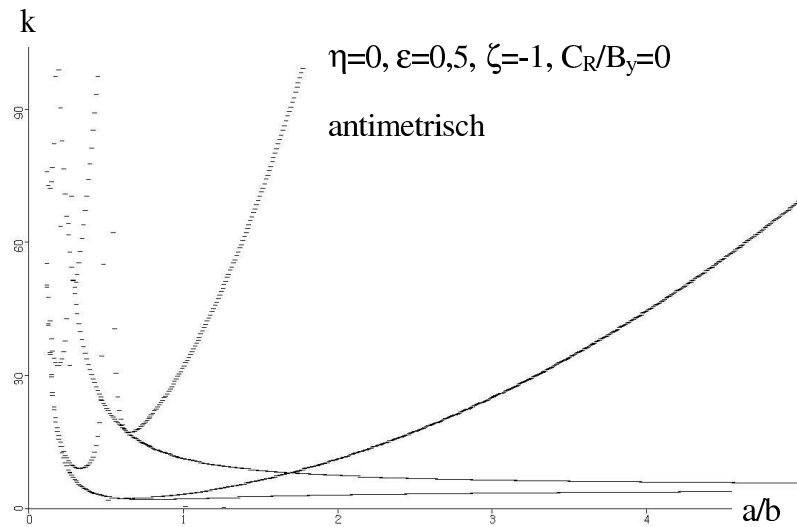
**Abb. 5.8: Girlande für Antimetrie**

In den letzten vier Abbildungen zum Krümmungsmaß fünf soll dies nun gezeigt werden. In den Abbildungen 5.9 bis 5.10 ist dafür eine sehr willkürliche Parametereinstellung gewählt, um auch einmal die Unübersichtlichkeit bei bestimmten Werten zu dokumentieren.

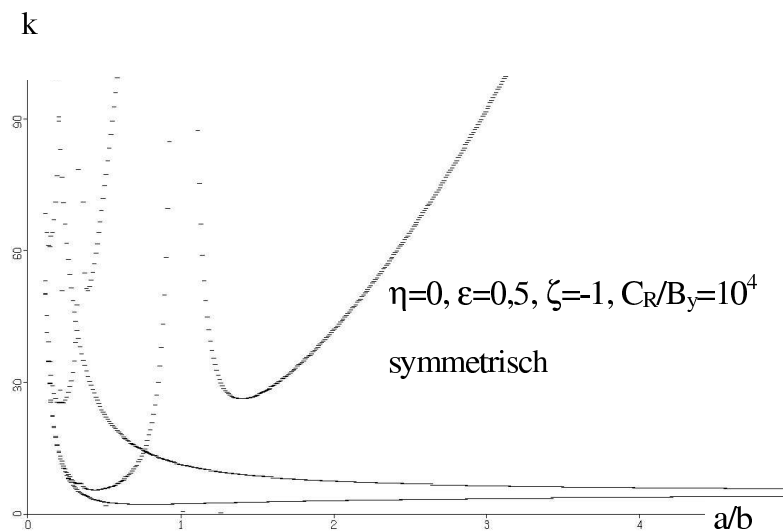
Der nach 4.2-8 berechenbare Beulwert von etwas über zwei wird erreicht, er wäre aber als Girlande unten links in Abbildung 5.9 schwer identifizierbar, da es noch eine zweite Girlande mit einem nur geringfügig tieferen und breiterem Minimum in dem Bereich gibt, deren Beulfeldseitenverhältnis etwas größer ist als etwa $\frac{1}{2}$.

**Abb. 5.9: Girlande für Symmetrie**

In Abbildung 5.11 dagegen ist zu erkennen, daß sich aber nur die eine Girlande neben höheren Lösungen durch eine Steigerung der Einspannung verändert. Wie zu erwarten, ist der Beulwert gestiegen und das Beulfeldseitenverhältnis kleiner geworden. Damit ist die tiefste Lösung des Schalenstreifens tatsächlich erkennbar.

**Abb. 5.10: Girlande für Antimetrie**

Der selbe Sachverhalt ist für Antimetrie den Abbildungen 5.10 und 5.12 mit einem Beulwert von etwas über acht im gelenkig gelagerten Fall zu entnehmen. Es ist in diesem Fall aber nicht notwendig die tiefen Lösungen zu beachten, da die Girlande des Schalenstreifens von anderen Lösungen einen ausreichenden Abstand aufweist.

**Abb. 5.11: Girlande für Symmetrie**

Eine wichtige Feststellung ist noch, daß es nicht einheitlich ist, ob die tieferen Lösungen immer beide von unten oder von oben kommen. Es gibt auch Fälle, z.B. für $\eta > 1$, $\varepsilon < 1$ und $\zeta = 1$, bei denen eine von unten und eine von oben kommt. Eine systematische Untersuchung des Verhaltens aller Lösungen bei bestimmten Parametereinstellungen ist vor automatischen Variationen folglich immer hilfreich.

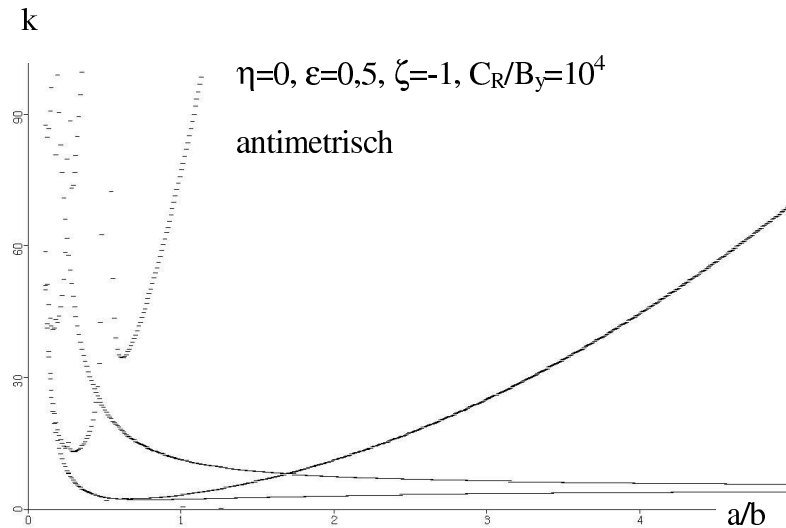


Abb. 5.12: Girlande für Antimetrie

Zu den Diagrammen ist zu bemerken, daß die Darstellungsräume sehr großzügig sind, manche Kurven wirken daher sehr eng beieinanderliegend. Man mag also vermuten, daß es mit beliebig feiner Schrittweitensteuerung bei automatischer Variation der Einspannung und der Krümmung und bekannten analytischen Anfangswerten immer möglich ist, die Lösung des Schalenstreifens zu erhalten. Abgesehen davon, daß die Rechenzeit nicht unermesslich steigen sollte, zeigen Kapitel vier und die Arbeiten [2] und [3], daß es immer passieren kann, daß man auf die falsche Kurve gerät. Weitere Kurven für andere Krümmungen sollen dies noch verdeutlichen.

5.2 Krümmungsmaß 15

Bei diesem Krümmungsmaß fallen Girlanden und Rohrbeulwert bei Symmetrie schon zusammen, was in Abbildung 5.13 zu sehen ist. Ganz schwach ist die Ausbildung eines doppelten Minimums zu erkennen, wobei das erste zu einem Beulfeldseitenverhältnis kleiner als eins gehört und das zweite zu einem größeren Seitenverhältnis. Numerisch ist es schwer, ein bestimmtes Beulfeldseitenverhältnis zu bestimmen, da das Minimum sehr flach ist.

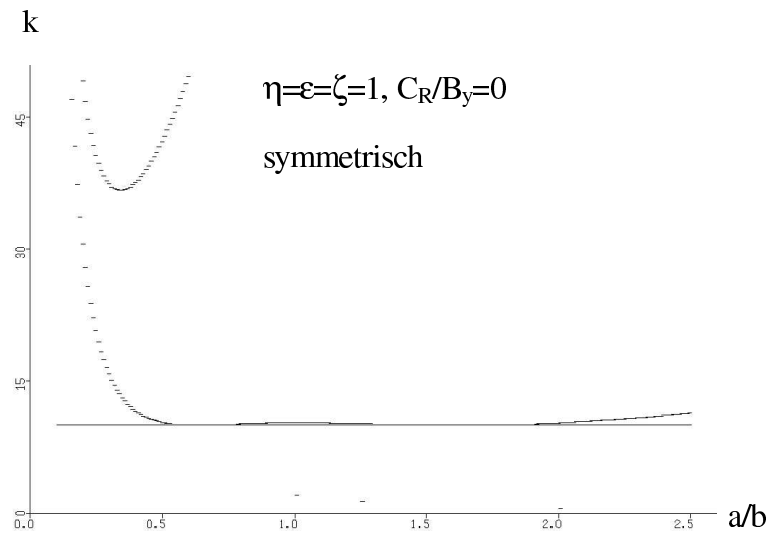


Abb. 5.13: Girlande für Symmetrie

Bei Antimetrie, Abbildung 5.14, bildet sich noch kein solches doppeltes Minimum aus, und es ist unproblematisch, die zu tief liegenden Lösungen abzugrenzen, zu denen wiederum der Rohrbeulwert gehört. Trotzdem gibt es zwei Schnittpunkt der Lösungen, die aber bei automatisierter Variation nur dann interferieren, wenn man an sehr ungünstigen Punkten mit der Suche beginnt. Die sollte nicht der Fall sein. Ist der ungefähre Lösungsbereich für den Schalenstreifen bekannt, wie hier mit k etwas über 16 bei a/b ungefähr $1/2$, tritt tatsächlich kein Problem auf.

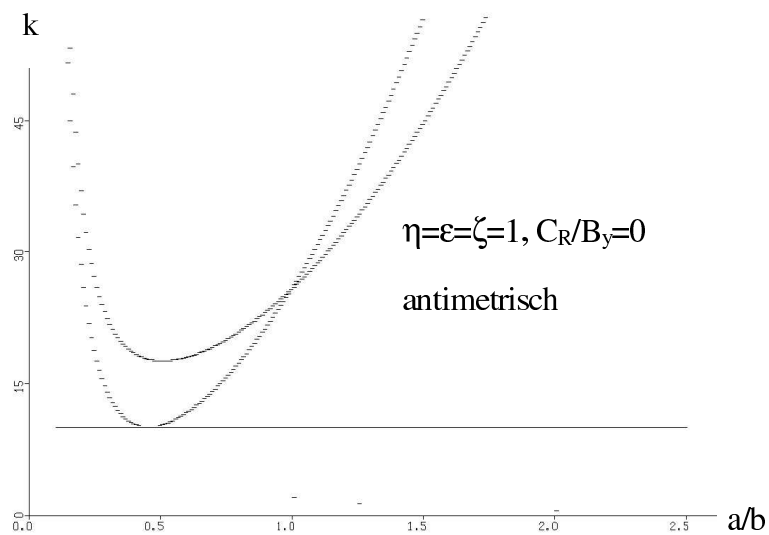


Abb. 5.14: Girlande für Antimetrie

Daraus erklärt sich die Tatsache, daß man immer einen Startwert benötigt, sei es von analytischen Gleichungen oder aus einer vorhergegangenen Iteration.

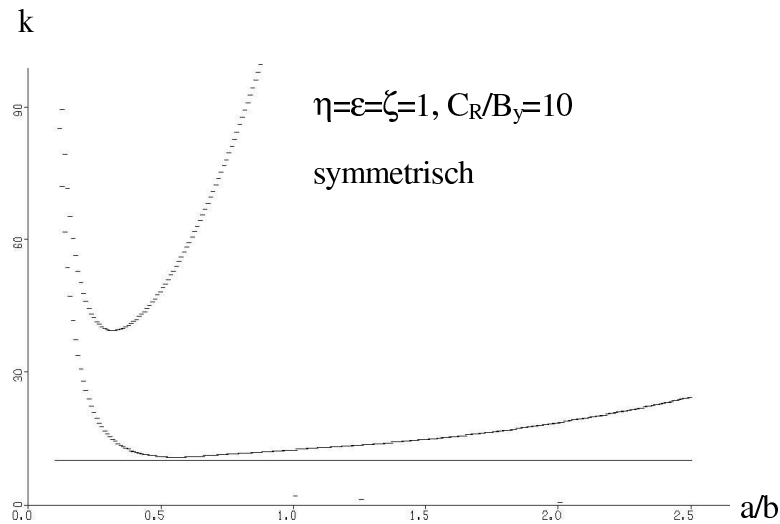


Abb. 5.15: Girlande für Symmetrie

In den Abbildungen 5.15 und 5.16 soll nochmals isoliert gezeigt werden, wie sich die Lösung bei Änderung der Einspannfedersteifigkeit vom Rohrbeulwert abhebt. Der Rohrbeulwert und bei Antimetrie noch die weitere zusätzliche Lösung bleiben unverändert. Für die Variation von C_R kann das sehr hilfreich sein, denn es ist ein notwendiges Kriterium der Lösung des Schalenstreifens, daß der Beulwert mit der Einspannung steigt und gegen einen Wert konvergiert.

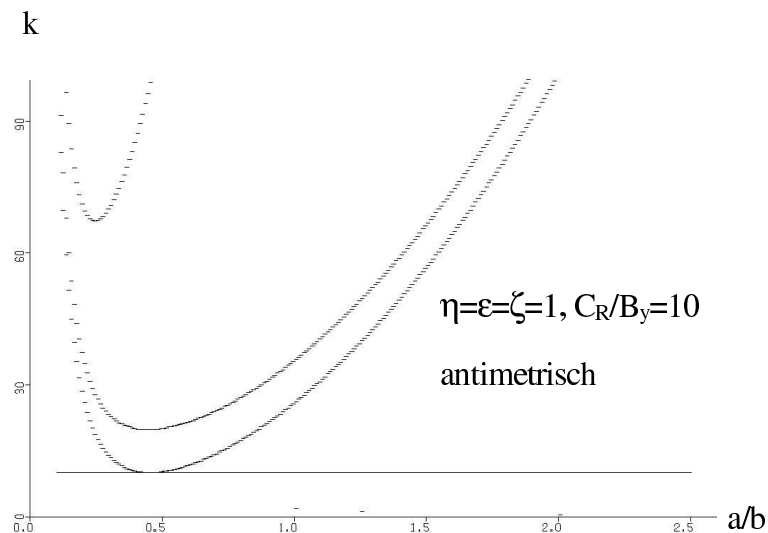


Abb. 5.16: Girlande für Antimetrie

Bei Kreuzzahlen kleiner als eins, in den Abbildungen 5.17 und 5.18 ist als Beispiel 0,5 gewählt, sind wieder zwei zusätzliche Lösungen, die bei Symmetrie und Antimetrie die gleichen sind, zu erkennen. Bei Symmetrie interferiert die tiefste dabei mit der gesuchten Girlande und bringt Probleme bei der automatisierten Suche. Die zweite zusätzliche Lösung liegt im dargestellten Bereich über der gesuchten Girlande. Das Seitenverhältnis eins stellt sich bei Symmetrie und Antimetrie als das Rohrbeulfeldseitenverhältnis heraus, wenn diese tiefere Lösung als

Rohrbeulwert bezeichnet wird. Das ist deswegen nicht abwegig, weil die Werte mit [1] übereinstimmen, siehe Kapitel sechs, und a/b bei eins bleibt.

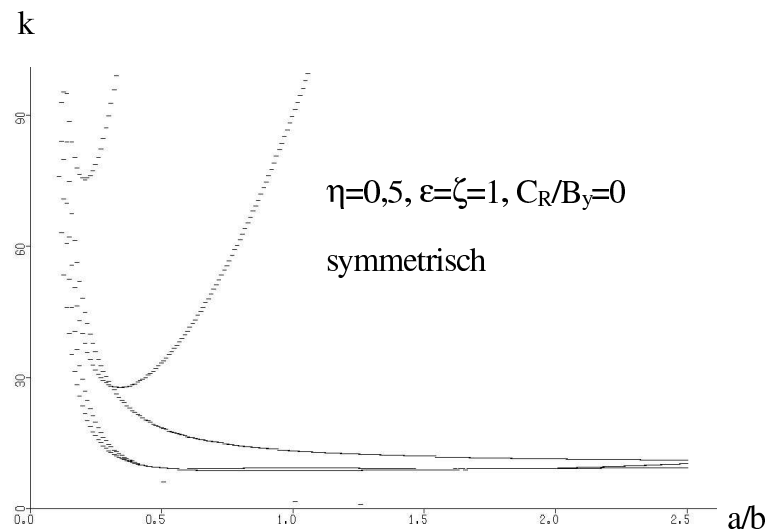


Abb. 5.17: Girlande für Symmetrie

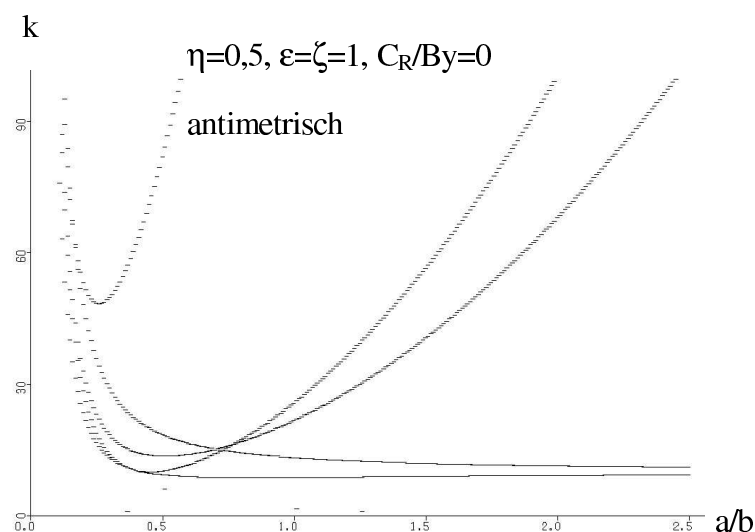


Abb. 5.18: Girlande für Antimetrie

Bei Antimetrie ist wieder die dritte zusätzliche Girlande, deren Minimum auf die tiefste Lösung trifft, bezeichnend. Die antimetrische Lösung des Schalenstreifens liegt noch abgrenzbar zwischen den drei Kurven, aber mit zunehmender Krümmung fallen symmetrische und antimetrische Lösung zusammen, so daß darauf kein Verlaß ist. Außerdem ist das, was mit bloßem Auge sichtbar ist, schwer in Kriterien für die automatische Variation umzusetzen.

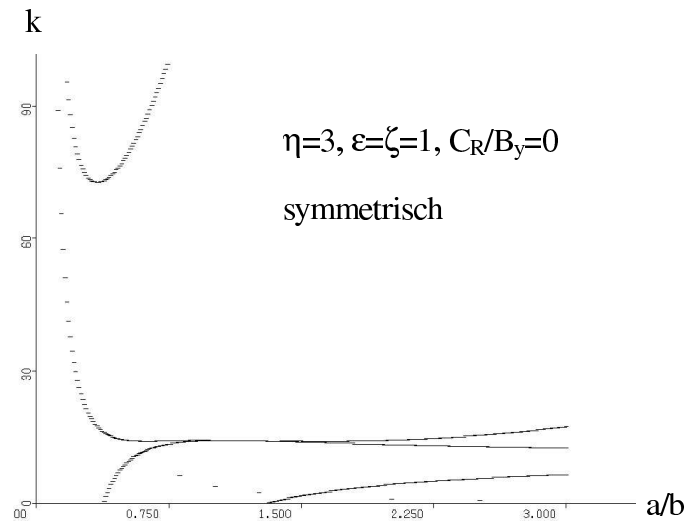


Abb. 5.19: Girlande für Symmetrie

Das Verhalten bei Kreuzzahlen größer als eins, das in den Abbildungen 5.19 und 5.20 am Beispiel $\eta=3$ aufgezeigt wird, entspricht ebenfalls dem beim Krümmungsmaß fünf, außer, daß bei Symmetrie die Kurven wie bei Isotropie im interessierenden Bereich sehr nahe beieinanderliegen. Da die zusätzlichen Lösungen aber von unten kommen, kann mit einer Suche von oben bei Automatisierung von großer Sicherheit ausgegangen werden.

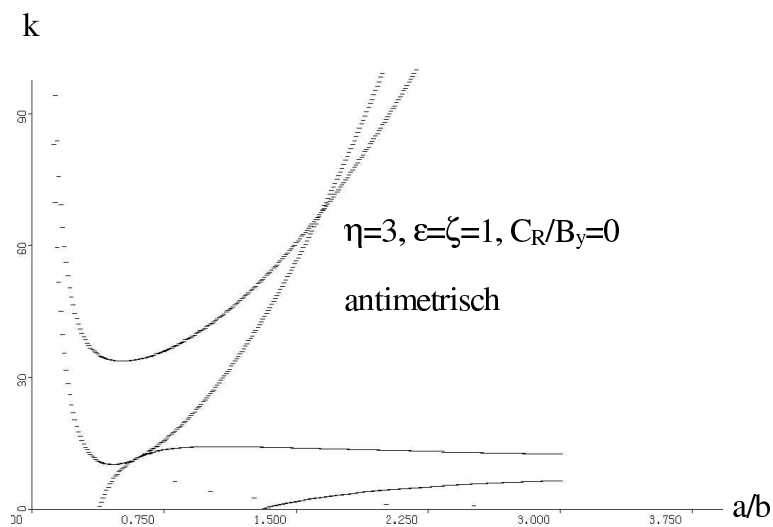


Abb. 5.20: Girlande für Antimetrie

5.3 Andere Krümmungsmaße

Auf Grund der Tatsache, daß die große Anzahl von Abbildungen immer für Symmetrie und Antimetrie viel Platz beanspruchen, werden nur noch sehr wenige im Anhang ausgegliedert

dargestellt. Dabei handelt es sich um Darstellungen für das Krümmungsmaß 25 (Abbildungen B. 13 bis B.20) und 50 (Abbildungen B.21 bis B.24).

Das doppelte Minimum ist bei Symmetrie wesentlich stärker ausgeprägt und bei Antimetrie ist zu erkennen, daß die Lösung des Schalenstreifens dem Rohrbeulwert oder tieferen Lösungen sehr nahe kommt.

Bei einer von Null verschiedenen Einspannfedersteifigkeit C_R wird offenbar, daß sich die beiden Minima bei Symmetrie nicht gleichartig verhalten, Abbildung B.19, sondern daß das zweite Minimum stärker steigt. Bei automatisierter Variation ist also darauf zu achten, daß man am besten von den Seitenverhältnissen kleiner als eins ausgeht.

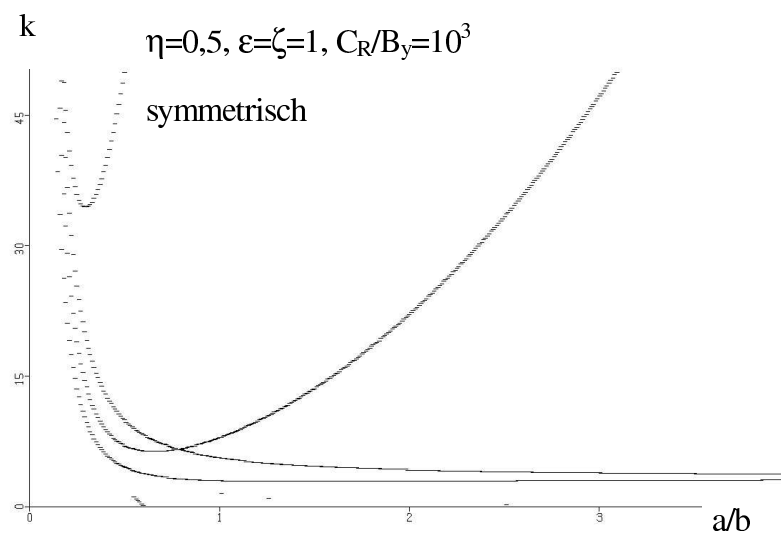


Abb. 5.21: Girlande für Symmetrie, $\rho=10$

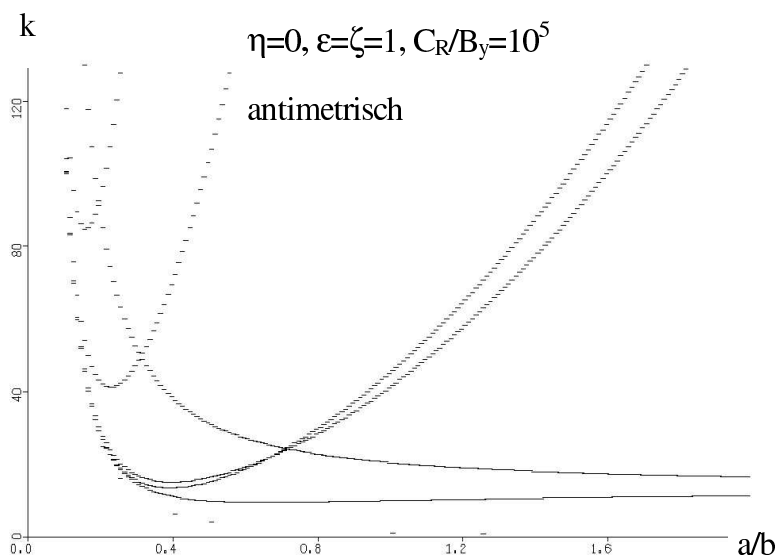


Abb. 5.22: Girlande für Antimetrie, $\rho=20$

In den Abbildungen 5.21 und 5.22 ist dargestellt, wie eine extrem ungünstige Störung der Lösung des Schalenstreifens durch eine andere Kurve aussieht. Liegt man mit dem Startwert nur ein kleines bißchen daneben, kann man schnell auf die Kurve gelangen, die nicht Lösung des Schalenstreifens ist, und der Beulwert sinkt während das Seitenverhältnis steigt.

5.4 Schlußfolgerungen für Automatisierung

Grundsätzlich ist diesen Ergebnissen zu entnehmen, daß es nicht möglich ist, die tiefste Lösung als Beulwert zu nehmen. Zwingende Vorgabe ist ein bekannter Startwert und nach Möglichkeit das Wissen um die Tendenz von Beulwert und Seitenverhältnis bei automatischer Variation eines Parameters. Dann ist es möglich, bei vorgegebener Änderung eines Parameters den Suchbereich und die Suchrichtung so zu programmieren, daß man auf der Lösung des Schalenstreifens bleibt.

Für Isotropie stellt das kein Problem dar, da es nur einen Rohrbeulwert gibt, der zudem noch vom Seitenverhältnis unabhängig und analytisch korrekt berechenbar ist. Er kann grundsätzlich ausgeschlossen werden. Problematisch ist das dagegen z.B. bei Kreuzzahlen größer als eins, jedoch kommen die tiefen Lösungen von unten, so daß eine Suche von oben hier grundsätzlich zum Erfolg führt. Dies gilt allerdings nur dann, wenn Scherzahl und Hauptsteifigkeitsverhältnis bei eins bleiben.

Bei Kreuzzahlen kleiner als eins steht man aber immer vor dem Problem, daß es schnell zur Interferenz kommt. Knicke in Kurvenverläufen aus automatischen Variationen sind häufig unvermeidbar, wie in Kapitel sechs in Abbildung 6.7 oder 6.9 zu sehen. Sogar vermeintlich falsche Lösungen treten auf, siehe Abbildung 6.16.

Besondere Aufmerksamkeit ist folglich den Rechnungen mit kleineren Kreuzzahlen und beliebigen Parametervariationen zu widmen. Bei Variation der Einspannung muß man sich bei stärkerer Krümmung auf das erste Minimum beschränken, da das zweite zu stark ansteigt.

Zusammenfassend gesagt, es kann die Lösung des Schalenstreifens immer berechnet werden. Sinnvollerweise wird bei automatisierter Variation immer nur ein Orthotropieparameter verändert und die anderen bei eins belassen, wie in dieser Arbeit geschehen. Ansonsten sind umfangreichere Untersuchungen zum Verhalten der Lösungen bei bestimmter aber beliebiger Wahl der Parameter im voraus zu bemühen.

6 Ergebnisse

6.1 Ergebnisse zur Krümmungsvariation

In diesem Kapitel sollen Ergebnisse zur automatisierten Variation der Krümmung angegeben werden. Aufgetragen wird dabei immer der Beulwert k , siehe Gleichung 4.2-1 über dem geometrischem Krümmungsmaß ρ , siehe Gleichung 4.1-1, das von null bis einhundert oder fünfzig geht.

6.1.1 Symmetrie

Anfangen sei mit den Beulwerten zu den symmetrischen Lösungen. In der Abbildung 6.1 ist der Beulwert für gelenkige Lagerung bei verschiedenen Kreuzzahlen η dargestellt, wobei die unterste Kurve die für die Kreuzzahl Null ist. Die Werte sind höher, je höher die Kreuzzahl ist. Die Scherzahl bleibt bei allen folgenden Darstellungen in diesem Kapitel eins, da ihr Einfluß nicht mehr untersucht werden konnte.

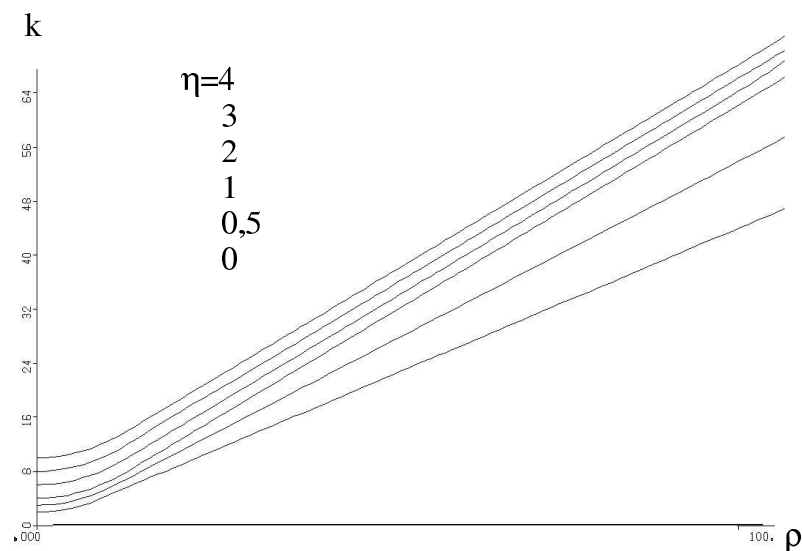


Abb. 6.1: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert: $C_R/B_y=0$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem aus [2] und [3] überein, wobei festzustellen ist, daß der Vergleich mit den Rohrbeulgeraden eine Übereinstimmung für Kreuzzahlen von eins und kleiner ergibt, vergl. [2], Abbildung 4.15. In Kapitel vier ist darauf bereits ausführlich

eingegangen. In [3] wird analysiert, daß bei den analytische Gleichungen bei Kreuzzahlen kleiner als eins das Minimum durch die Rohrbeulgerade bestimmt wird, deren Verlauf aus Minima der Girlanden für $n=m=1$, $n=m=2$ u.s.w. entsteht. Aus diesem Grund liegen die im vierten Kapitel bestimmten Girlanden bei Kreuzzahlen von kleiner als eins zu hoch. Nur die erste mit $n=m=1$ trifft die Programmwerte. Damit sind diese Abweichungen erklärt und die Programmergebnisse sind korrekt.

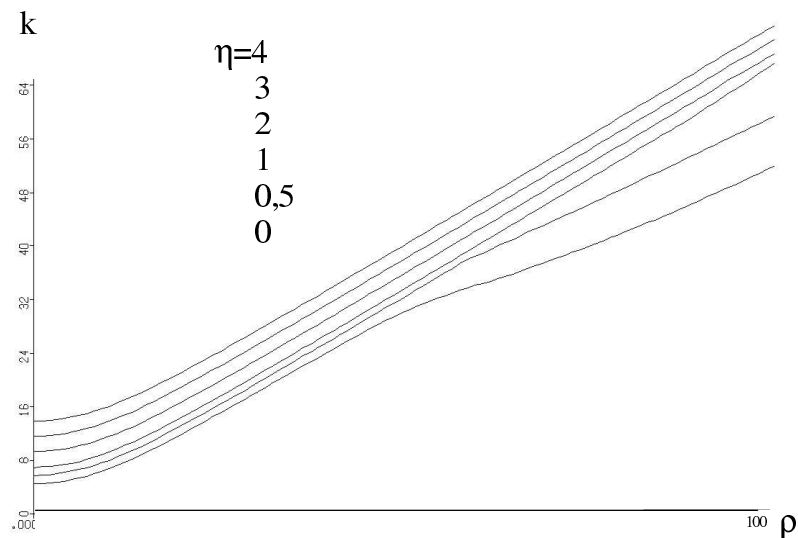


Abb. 6.2: Beulwert über Krümmung, fest eingespannt: $C_R/B_y=10^{10}$

Bei fester Einspannung, Abbildung 6.2, werden ebenfalls mit [3] übereinstimmende Lösungen gefunden. Ob die Lösungen für stärkere Krümmungen bei $\eta=0$ und 0,5 von der Geraden abweichen, weil eine Girlande iteriert wird, eine andere Lösung interferiert oder die Kurve so auch bei beliebigem Seitenverhältnis richtig ist, kann nicht geklärt werden. [3] vermutet eine Girlande, das kann aber hier nicht bestätigt werden, da das Seitenverhältnis frei variiert wird.

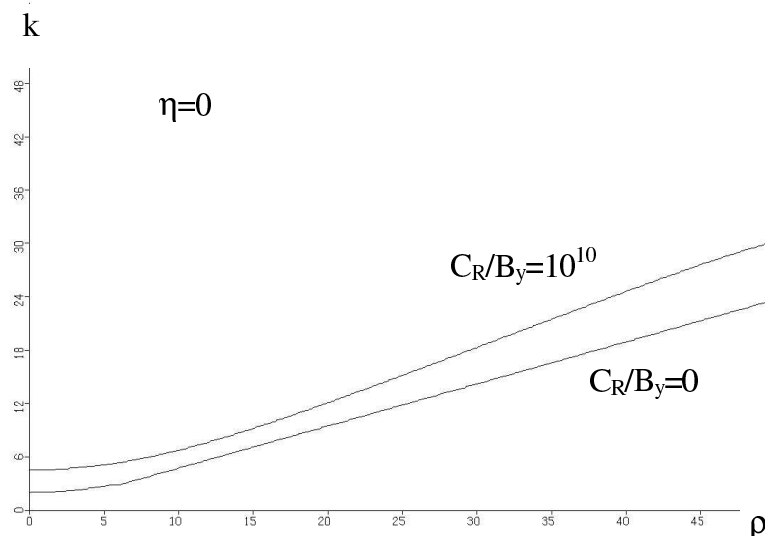


Abb. 6.3: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert und fest eingespannt

In den folgenden Abbildungen sollen für drei ausgesuchte Kreuzzahlen (Null, eins und vier) die Kurven der festen Einspannung und der gelenkigen Lagerung miteinander verglichen werden. Erwartet wird, daß die Kurven für stärkere Krümmungen sehr nahe beieinander liegen, [10].

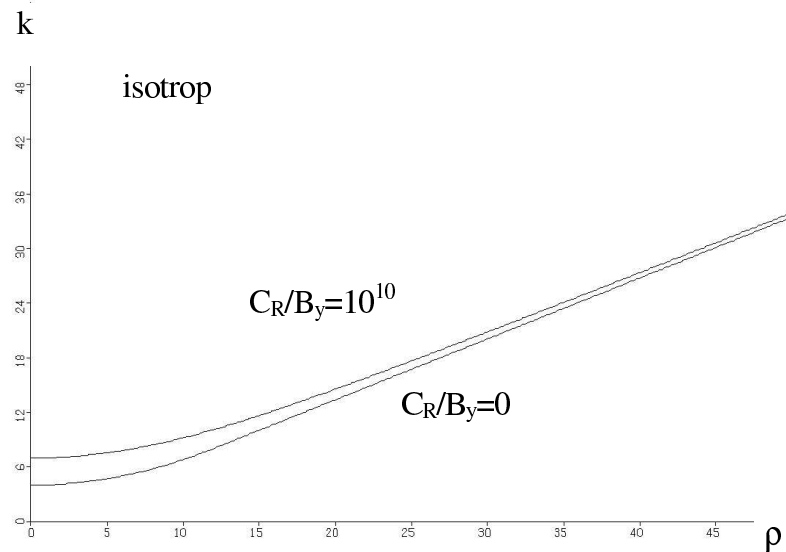


Abb. 6.4: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert und fest eingespannt

Bei $\eta=0$ ist dies nicht der Fall, wie Abbildung 6.3 zeigt. Bei kleineren Kreuzzahlen weicht die Kurve der festen Einspannung von der Geraden nach unten zwar ab, aber die Lösungen gehen sogar weiter auseinander, während bei Isotropie und größeren Kreuzzahlen für steigende Krümmungen die Kurven in parallele Geraden übergehen, siehe Abbildungen 6.4 und 6.5. Dies wird schon in den Abbildungen 6.1 und 6.2 offensichtlich, weil bei gelenkiger Lagerung erst für Kreuzzahlen größer eins parallele Geraden auftreten. Die anderen Geraden haben eine kleinere Steigung. Bei fester Einspannung laufen dagegen alle Kurven in parallele Geraden ein, ein Abweichen von dieser Geraden tritt nur für größere Krümmungen bei Kreuzzahlen kleiner eins auf. Die Geraden müssen also auseinandergehen.

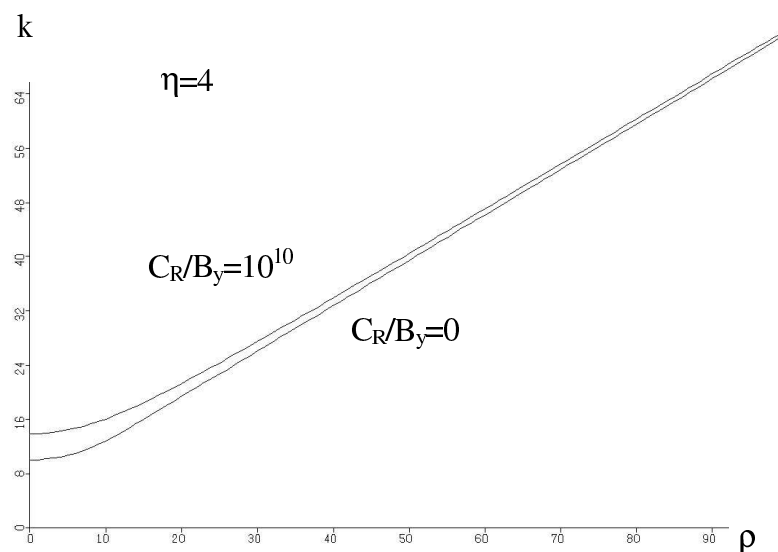


Abb. 6.5: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert und fest eingespannt

In Ermangelung anderer Werte für feste Einspannung ist es schwer zu sagen, ob die Lösungen richtig sind, aber da die Kurven für gelenkige Lagerung korrekt vorliegen und die Vergleiche mit der festen Einspannung zeigen, daß diese immer über der gelenkigen Lösung bleiben und sich tendenziell ähnlich verhalten, darf diesen Werten vertraut werden.

In der Abbildung 6.6 ist dieselbe Darstellung für gelenkige Lagerung und einer Kreuzzahl von eins, aber veränderlichem Hauptsteifigkeitsverhältnis gezeigt. Ein ϵ von eins ist der beste Fall mit dem höchsten Beulwert, wie erwartet und in Kapitel fünf bereits erwähnt. Für 0,8 sind zwei Kurven zu erkennen, wobei die eine früh aufhört, da sie numerisch nicht weiter berechnet werden konnte. Die zweite ist im Bereich schwacher Krümmung zu tief und verläuft dann parallel zur isotropen. Sie müßte somit falsch sein und einer interferierenden Lösung entspringen. Beide sind mit etwas unterschiedlichen Suchalgorithmen (von oben oder von unten) erzeugt, es ist aber nur die abgebrochene korrekt, die nicht weiter berechnet werden konnte, d.h., sie ist ab da steil nach unten abgelenkt, was nicht dargestellt ist.

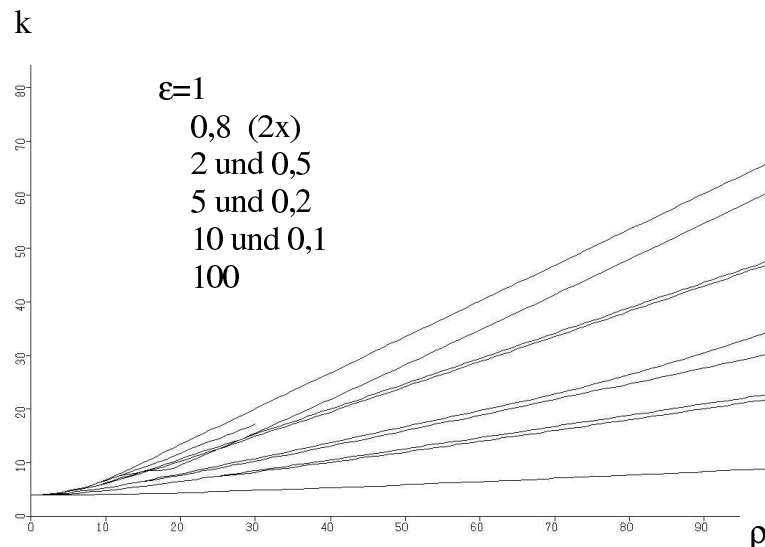


Abb. 6.6: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert

Daß die Kurven paarweise fast deckungsgleich sind, liegt an dem in Gleichung 4.2-8 deutlich werdenden Zusammenhang. ϵ kommt einmal selbst und einmal als Kehrwert in der Gleichung vor. Somit müssen die Beulwerte für die Kehrwerte von ϵ gleich denen für ϵ selbst sein. Kleine Unterschiede sind nur numerisch zu erklären, da die Seitenverhältnisse natürlich nicht dieselben sind (größer und kleiner eins, nach Gleichung 4.1-9) und nicht unendlich fein iteriert sind, so daß Unterschiede unvermeidlich sind.

Z.B. ist das beulkritische Seitenverhältnis für sehr große Hauptsteifigkeitsverhältnisse viel größer als eins, und wird dann natürlich bei äquidistanter Schrittweite für a/b genauer iteriert als Seitenverhältnisse kleiner als eins. Deswegen liegen diese Kurven immer etwas unter denen für kleine ϵ .

6.1.2 Antimetrie

Dieselben Darstellungen wie für Symmetrie sollen ebenfalls für Antimetrie erfolgen. Obwohl nach Kapitel fünf die Lösungen augenscheinlich leichter aufzufinden sind, bereitet die numerische Auswertung etwas mehr Probleme, wie schon in Abbildung 6.7 zu erkennen ist. Die Tendenzen sind aber dieselben wie bei Symmetrie, und es gilt dort gesagtes genauso für Antimetrie, allerdings gibt es keine parallelen Geraden bei fester Einspannung wie bei Symmetrie.

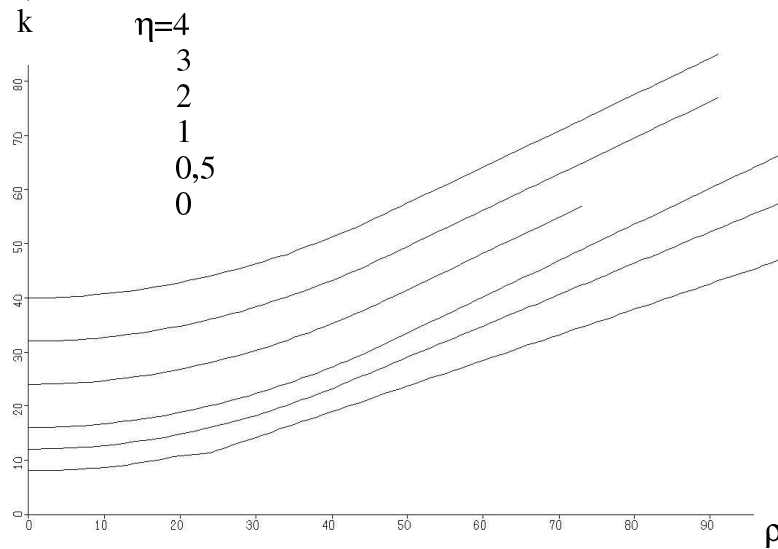


Abb. 6.7: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert: $C_R/B_y = 0$

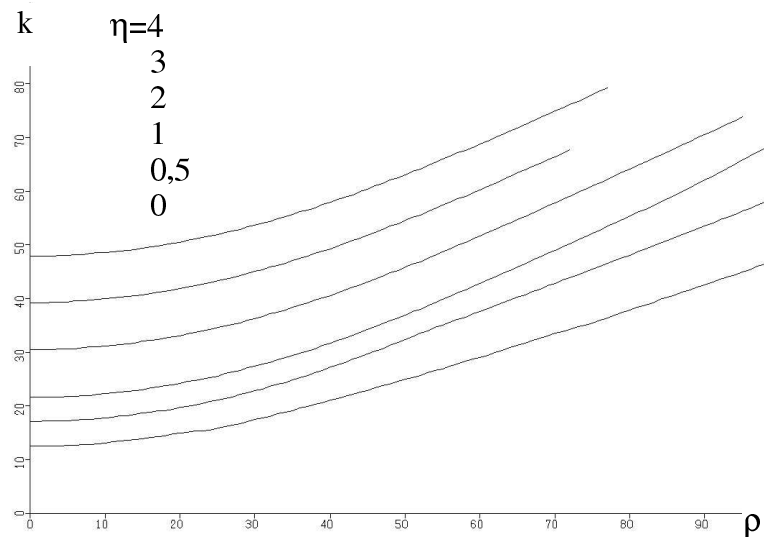


Abb. 6.8: Beulwert über Krümmung, fest eingespannt: $C_R/B_y = 10^{10}$

Bei fester Einspannung, Abbildung 6.8, treten ebenfalls Probleme auf. Kurven, die im Diagramm aufhören, sind nach oben oder unten ausgebrochen, und zwar so übermäßig, daß es offenbar ist, daß die Lösung falsch sein muß. Deswegen ist deren Darstellung unterblieben.

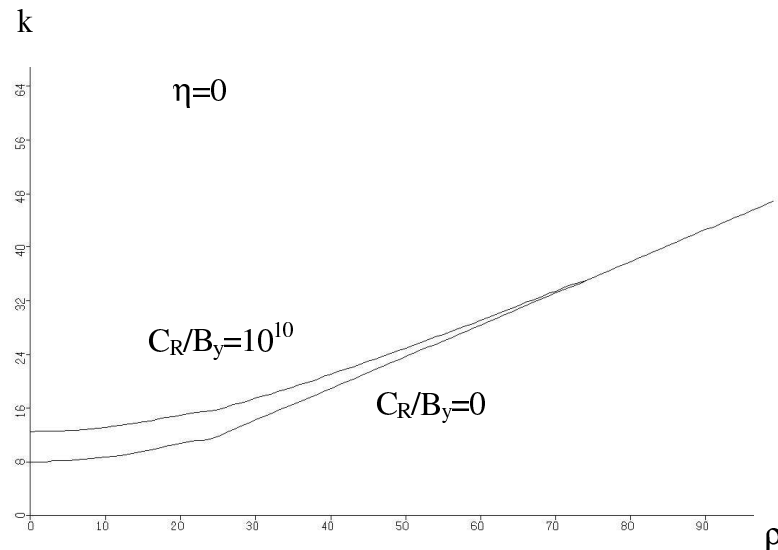


Abb. 6.9: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert und fest eingespannt

Die Vergleiche von gelenkiger Lagerung und fester Einspannung für verschiedene Kreuzzahlen (Null, eins, vier) in den Abbildungen 6.9 bis 6.11 zeigt aber übliche Tendenzen, so daß die berechneten Kurven in sich keine Widersprüche bilden. Lediglich der direkte Einlauf ineinander nach parallelen Knicken bei $\eta=0$ läßt vermuten, daß dicht benachbarte Lösungen aufgefunden sind. Es handelt sich tatsächlich um den Rohrbeulwert, in den auch die feste Einspannung einläuft, wie der Vergleich in Abbildung 6.13 zeigt. Diese Kurve ist also etwas zu tief, kann aber nicht anders berechnet werden, da die Lösung des Rohrbeulwertes, die nicht mehr vom Seitenverhältnis unabhängig ist, interferiert und als Minimum gefunden wird.

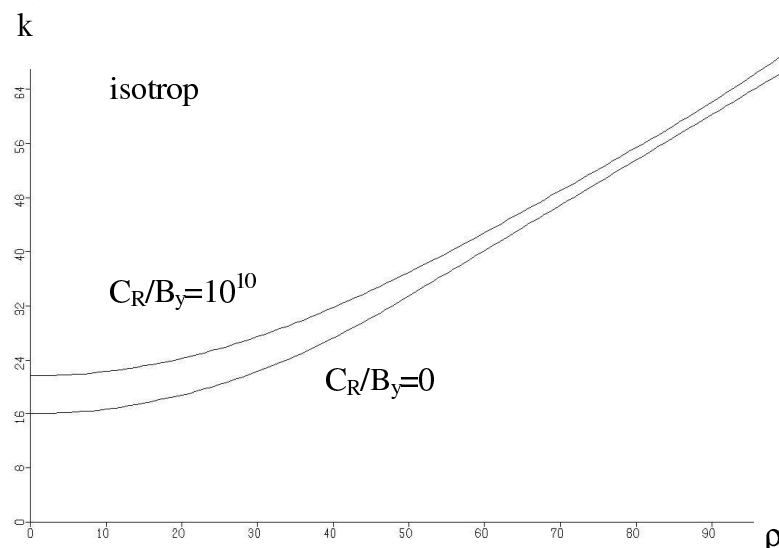


Abb. 6.10: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert und fest eingespannt

Für andere Kreuzzahlen gibt es keinen Knick, und die feste Einspannung liefert stets etwas höhere Beulwert als die gelenkige Lagerung.

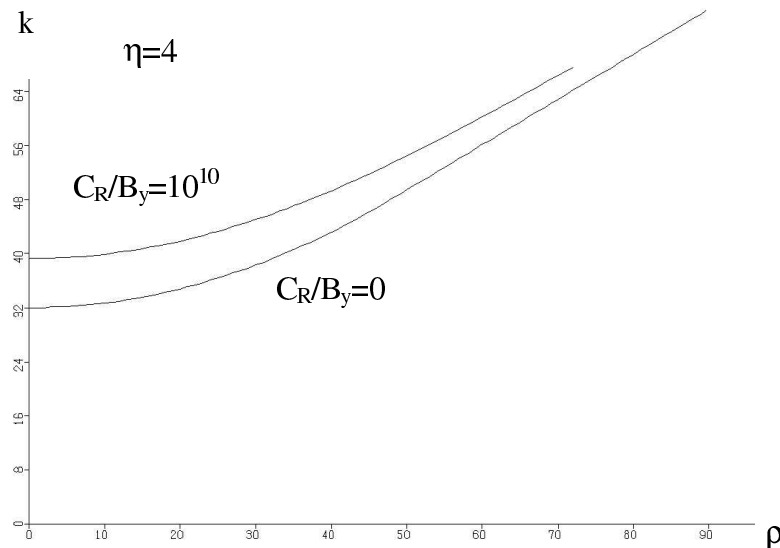


Abb. 6.11: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert und fest eingespannt

Abschließend eine Untersuchung des Einflusses von ε auf den Beulwert in Abbildung 6.12. Das Verhalten ist dasselbe wie bei Symmetrie, nur, daß die Werte für reziproke Hauptsteifigkeitsverhältnisse für zwei Werte im ganzen Bereich sogar deckungsgleich liegen.

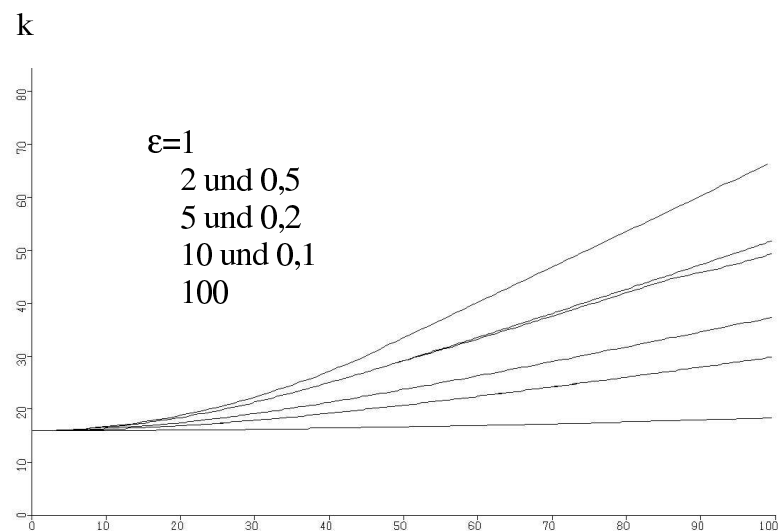


Abb. 6.12: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert

6.1.3 Vergleich von Symmetrie und Antimetrie

Ein direkter Vergleich soll zeigen, ob nun der Beulwert für Antimetrie grundsätzlich höher liegt als der für Symmetrie. Im ebenen Fall und für analytisch bekannte Lösungen ist das der Fall, wie in den vorangegangenen Kapiteln häufiger gezeigt. Lediglich bei starker Krümmung, also z.B. für den Rohrbeulwert, ist Übereinstimmung zu erwarten.

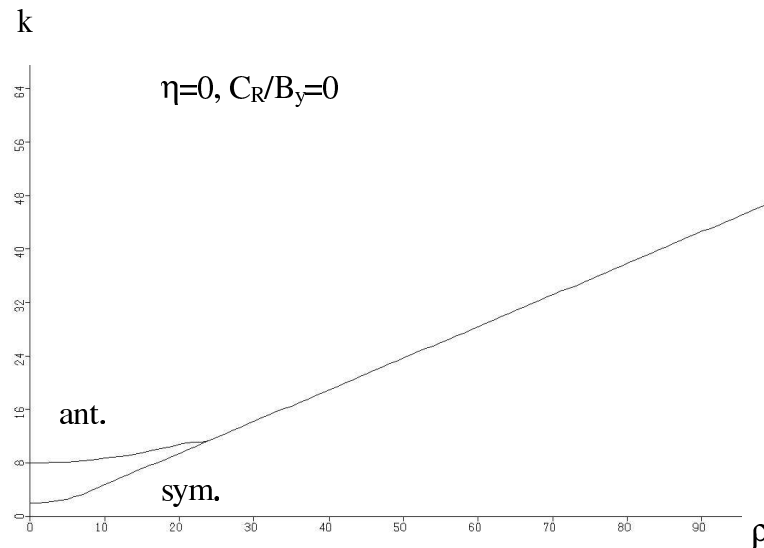


Abb. 6.13: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert, orthotrop

In Abbildung 6.13 ist dies so zu erkennen, wo die als Rohrbeulwert zu bezeichnende Lösung von beiden Kurven getroffen wird, da sie so nahe an den Lösungen des Schalenstreifens liegt. Im Grunde ist eine Trennung nicht notwendig, wenn die Lösungen so dicht zusammen liegen. Lediglich die Seitenverhältnisse unterscheiden sich dann.

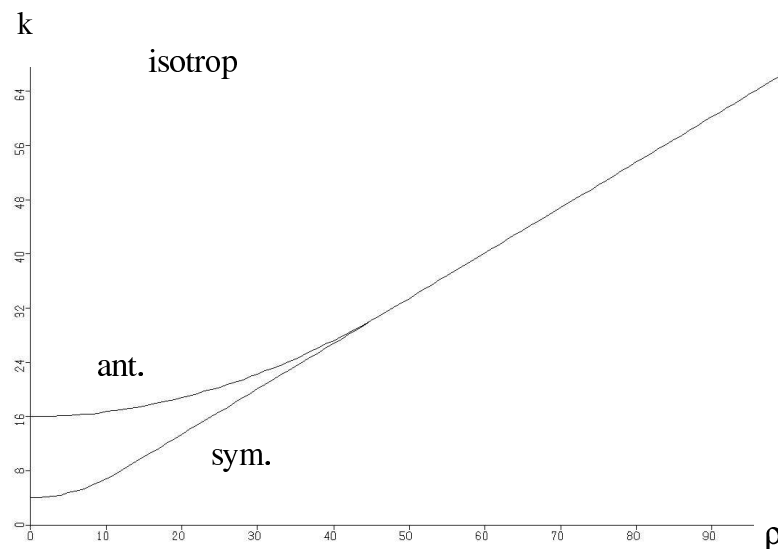


Abb. 6.14: Beulwerte über Krümmung, gelenkig gelagert, isotrop

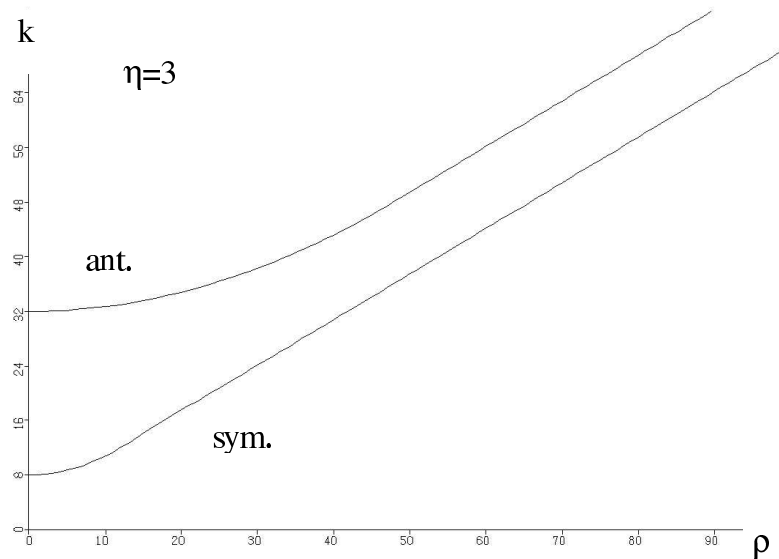


Abb. 6.15: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert, orthotrop

Während bei Isotropie die Kurven ebenfalls ineinander laufen, Abbildung 6.14, ist das bei Kreuzzahlen größer als eins nicht mehr der Fall, wie in Abbildung 6.15 am Beispiel $\eta=3$ gezeigt wird. Dabei gilt, daß der Abstand der Geraden um so größer wird, je größer die Kreuzzahl ist. Da diese Kurven analytisch nachvollziehbar sind, bleibt das als Resultat festzuhalten.

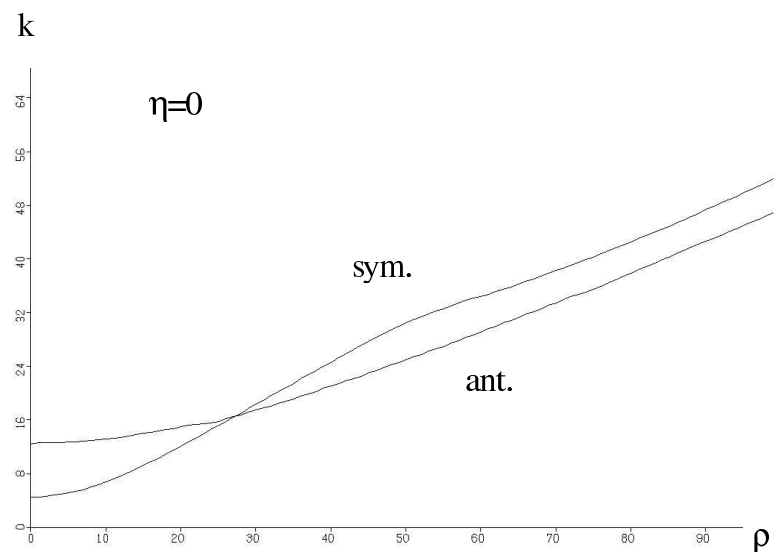


Abb. 6.16: Beulwert über Krümmung, fest eingespannt, orthotrop

Bei fester Einspannung verläuft die antimetrische Lösung für Kreuzzahlen kleiner eins bei starker Krümmung unterhalb der symmetrischen, wie in Abbildung 6.16 illustriert. Die symmetrische Lösung ist mit [3] übereinstimmend und die antimetrische reiht sich sehr gut in die anderen Ergebnisse ein, siehe Abbildungen 6.8 und 6.9. Aber wie in Abbildung 6.3 zu erkennen ist, sind die Lösungen der festen Einspannung für Symmetrie bei kleinen Kreuzzahlen sehr hoch in ihrer Tendenz, so daß eher der symmetrischen Lösung ein Fehler zuzusprechen ist,

als der antimetrischen. Eine andere Kurve ist jedoch nicht zu iterieren, so daß hier Zweifel an den Ergebnissen angebracht sein können.

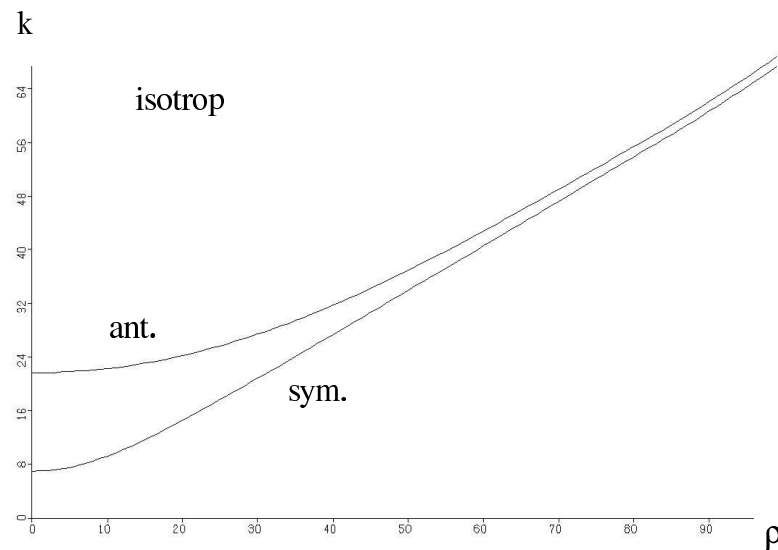


Abb. 6.17: Beulwert über Krümmung, fest eingespannt, isotrop

Anders stellt sich das Verhalten bei Kreuzzahlen von eins und größer da, Abbildungen 6.17 und 6.18. Es entspricht dem bei gelenkiger Lagerung und verursacht keine Widersprüche.

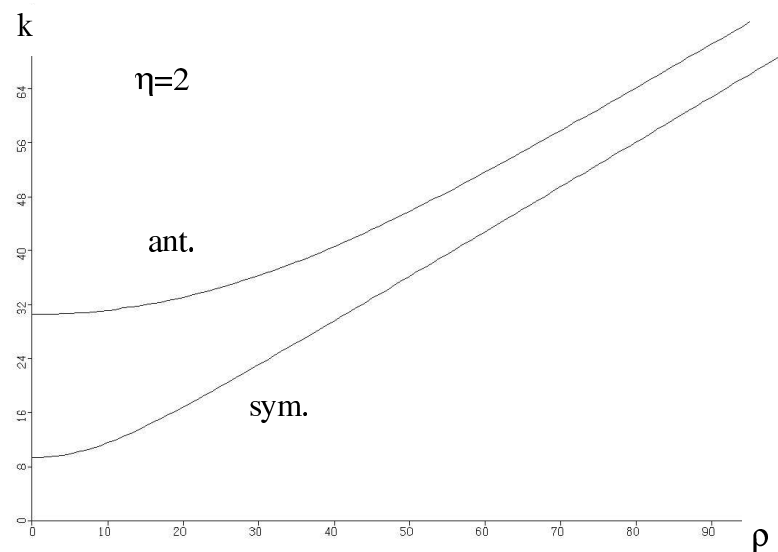


Abb. 6.18: Beulwert über Krümmung, fest eingespannt, orthotrop

Zum Schluß ein Vergleich bei veränderlichem ε bei $\eta=1$. Es zeigt sich, daß für Hauptsteifigkeitsverhältnisse ungleich eins die antimetrische über der symmetrischen Lösung verläuft, wobei auch hier der Abstand größer bleibt, je kleiner, bzw., je größer ε ist.

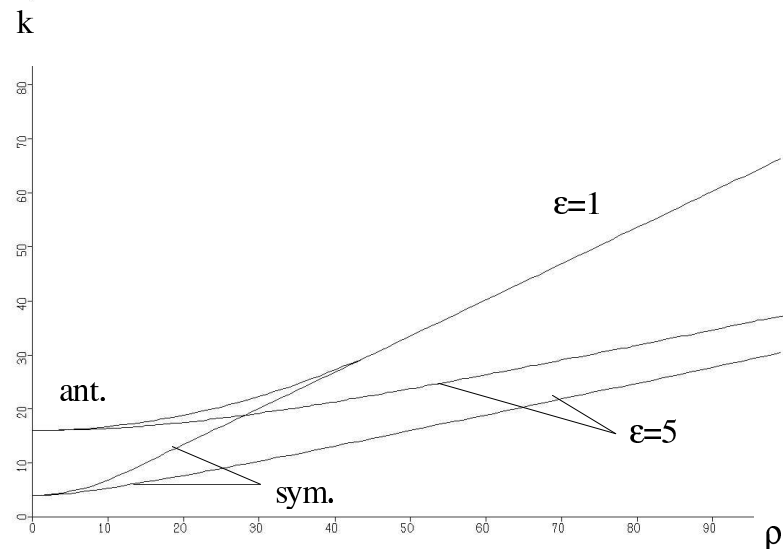


Abb. 6.19: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert

6.1.4 Ein Ergebnis mit veränderlicher Scherzahl

Das einzige Ergebnis mit veränderlicher Scherzahl ζ bei $\eta=\epsilon=1$ soll ausgegliedert dargestellt werden, da es nur für Symmetrie erzeugt worden und kein Vergleich mit analytischen Lösungen erfolgt ist.

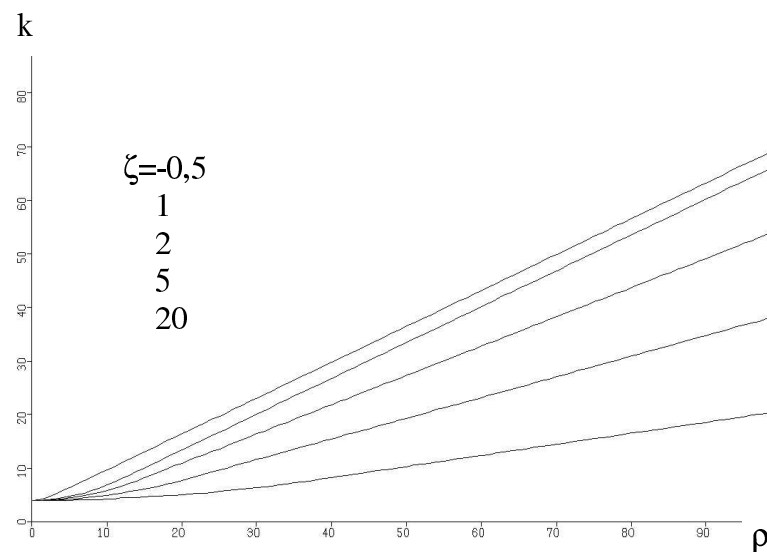


Abb. 6.20: Beulwert über Krümmung, gelenkig gelagert

Es kann gesagt werden, daß das Ergebnis in seiner Tendenz korrekt ist, wie ein Vergleich mit [1], Seite 213, Bild 4.3/9, zeigt. Hier ist die Scherzahl in der Achse mit erfaßt. Diese Transformation hätte hier zum Vergleich ebenfalls geschehen müssen, doch ist dies aus Zeitgründen nicht mehr möglich gewesen.

6.2 Ergebnisse zur Einspannungsvariation

In diesem Kapitel sollen einige Ergebnisse zur Variation der Einspannfedersteifigkeit C_R angegeben werden, um zu zeigen, daß der Bereich zwischen den Extremen der gelenkigen Lagerung und der festen Einspannung zum größten Teil berechnet werden kann.

6.2.1 Symmetrie

Für drei verschiedene Krümmungsmaße ρ wird in den folgenden drei Abbildungen 6.21 bis 6.23 das Verhalten von Beulwert und Beulfeldseitenverhältnis über der Drehfedereinspannung C_R/B_y am Beispiel $\eta=4$ dargestellt. Scherzahl und Hauptsteifigkeitsverhältnis bleiben bei den in diesem Kapitel dargestellten Ergebnissen eins.

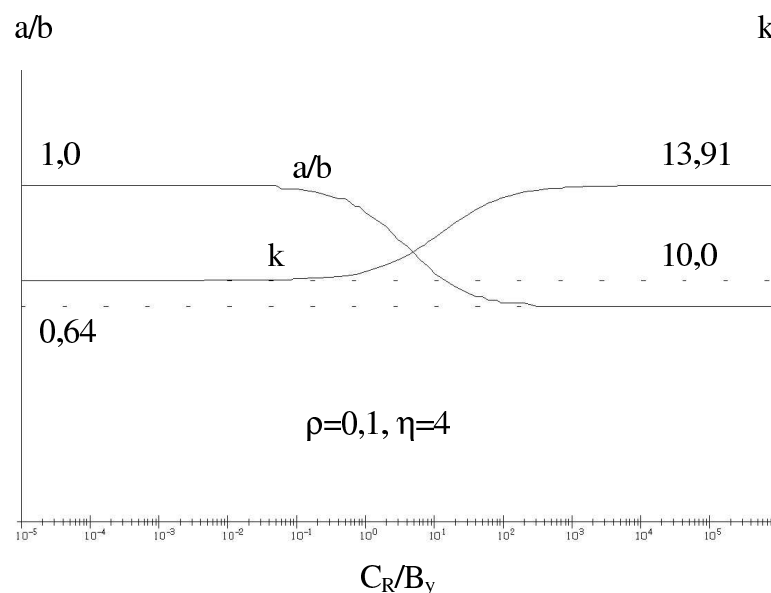


Abb. 6.21: Beulwert und Seitenverhältnis über Einspannfederzahl

Mit zunehmender Einspannung sinkt das Seitenverhältnis, während der Beulwert steigt. Das deckt sich mit den Ergebnissen aus [3] und [10]. Der Bereich der stärksten Änderung von Beulwert und Seitenverhältnis liegt bei $C_R/B_y=0,1$ bis 100. Für kleinere Werte von C_R/B_y gilt konstant der Beulwert der gelenkigen Lagerung, während für größere feste Einspannung vorliegt.

Die Auswirkung der Einspannung auf den Beulwert im ebenen Fall für Orthotropie ist nicht so groß wie bei Isotropie, wo sich der Beulwert um den Faktor $6,97/4=1,74$ erhöht. Bei einer Kreuzzahl von vier beträgt der Steigerungsfaktor lediglich 1,39. Das Seitenverhältnis der festen Einspannung ist mit 0,64 geringfügig kleiner als bei Isotropie, wo es 0,66 ist.

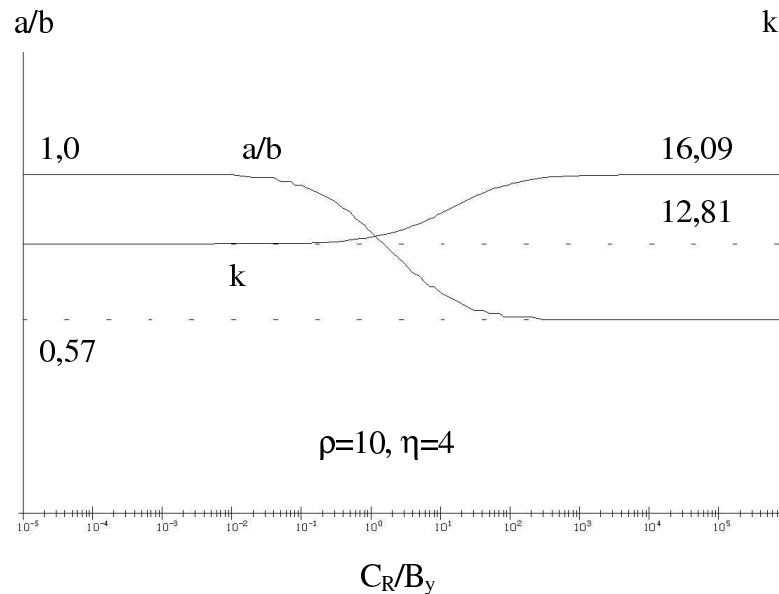


Abb. 6.22: Beulwert und Seitenverhältnis über Einspannfederzahl

Mit steigender Krümmung wird die Steigerung des Beulwertes durch die Einspannung geringer, Abbildung 6.22, jedoch wird das Beulfeldseitenverhältnis schneller kleiner bei steigender Einspannung. Bei großer Krümmung dagegen bleibt das Seitenverhältnis unverändert, während der Beulwert noch schwach durch die Einspannung steigt, siehe Abbildung 6.23 mit $\rho=40$.

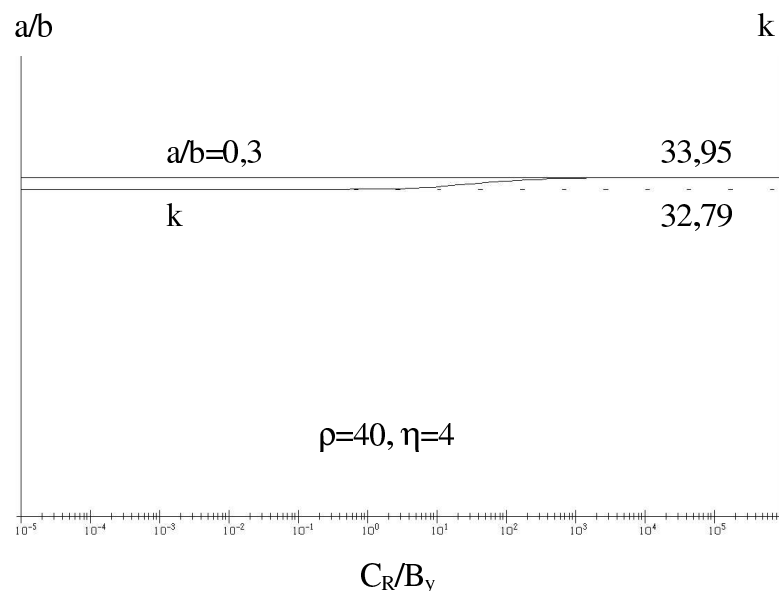


Abb. 6.23: Beulwert und Seitenverhältnis über Einspannfederzahl

Trägt man Beulwert und Seitenverhältnis als Beispiel für $\eta=4$ über Krümmung und Einspannung dreidimensional auf, so erhält man die Abbildungen 6.24 und 6.25. Der Wertebereich für C_R/B_y in diesen Abbildungen ist ebenfalls 10^{-5} bis 10^6 , es ist aber nur der jeweilige Grenzfall der festen Einspannung und der gelenkigen Lagerung gekennzeichnet.

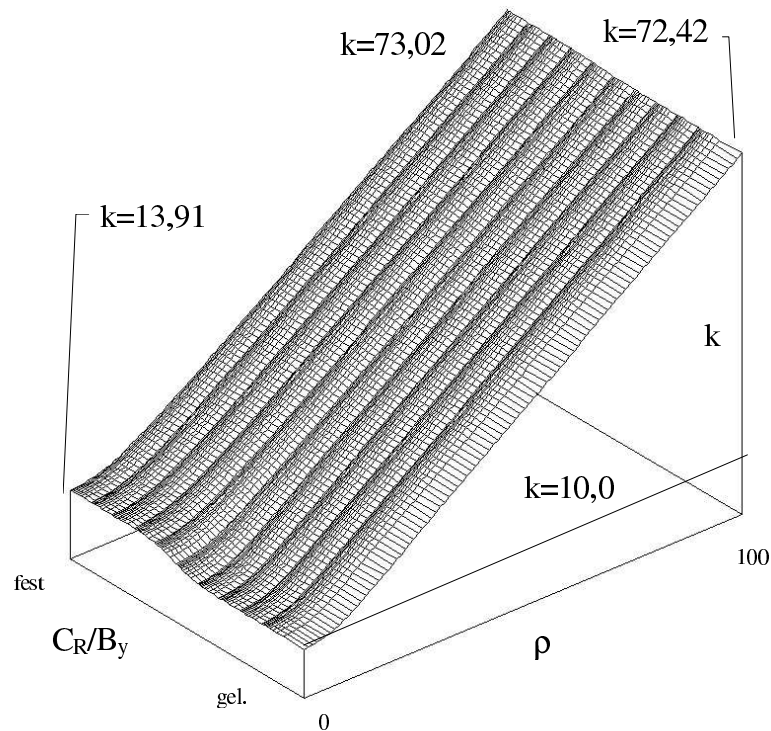


Abb. 6.24: Beulwert über Krümmung und Einspannfederzahl, $\eta=4$

Die angegebenen Beulwerte sind jeweils die Werte der festen Einspannung und gelenkigen Lagerung für den ebenen Fall und für $\rho=100$. Mit unterschiedlichen Werten sind diese Diagramme prinzipiell für alle Kreuzzahlen gültig.

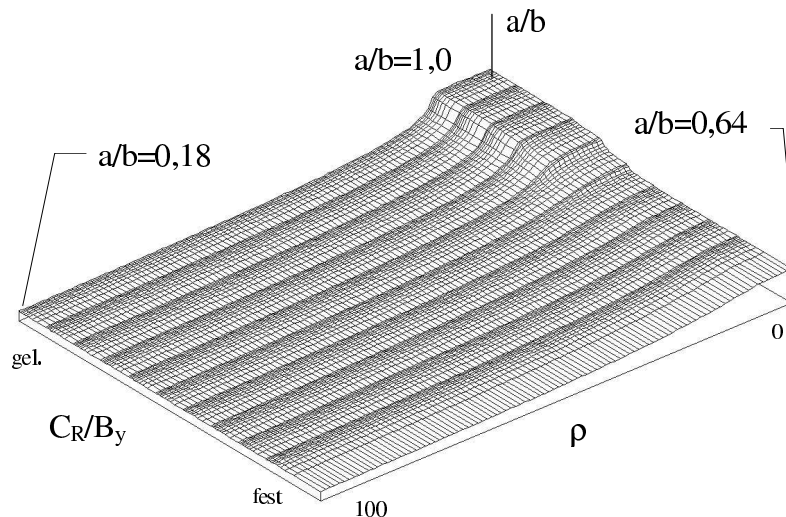


Abb. 6.25: Seitenverhältnis über Krümmung und Einspannfederzahl, $\eta=4$

Es gibt aber Fälle, in denen Probleme bei der automatischen Variation in Bereichen größerer Krümmung dazu führen, daß die tieferen Lösungen gefunden werden. Da sind dann die in Kapitel sechs angesprochenen Konfigurationen, wo tiefere Lösungen so ungünstig liegen, daß die mit Einspannung steigende Lösung nicht aufgefunden wurde. Die Abbildung 6.26 zeigt so ein Beispiel.

Ausgangspunkt für eine solche Berechnung sind z.B. die Werte der gelenkigen Lagerung, siehe Abbildung 6.1, und es ist dann C_R/B_y gesteigert worden. In so einem Fall ist es dann sinnvoller, z.B. das Suchverfahren umzustellen (von oben suchen) oder von der festen Einspannung auszugehen, Abbildung 6.2.

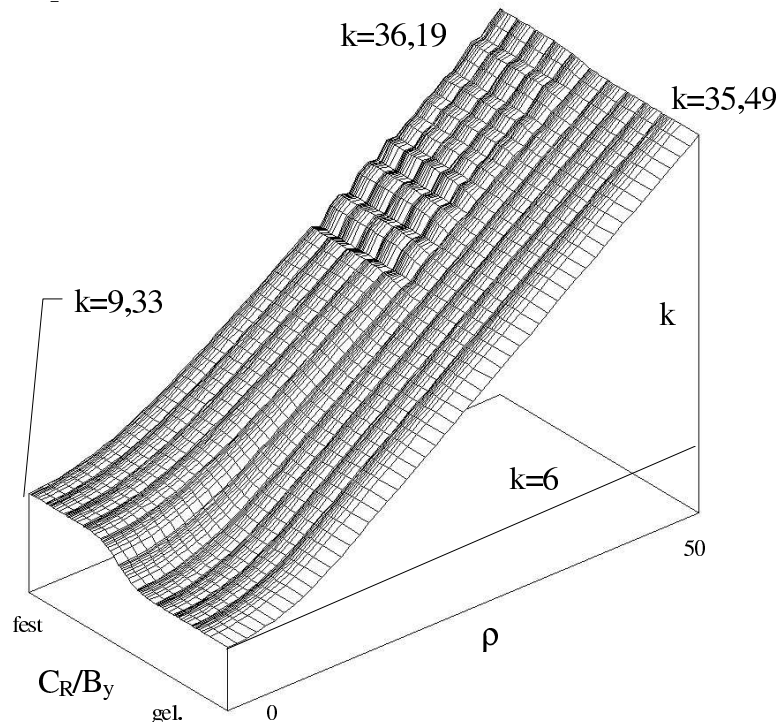


Abb. 6.26: Beulwert über Krümmung und Einspannfederzahl, $\eta=2$

Bei Kreuzzahlen kleiner als eins ist es nicht gelungen, die Variation von C_R mit so brauchbaren Ergebnissen in der gegebenen kurzen Zeit zu vollenden, obwohl gerade diese Ergebnisse sehr interessant wären, siehe Abbildung 6.2 und 6.3, um den Übergang zwischen diesen Fällen darzustellen.

6.2.2 Antimetrie

Bei Antimetrie ist dies mit Schwierigkeiten dagegen gelungen, wie den folgenden Abbildungen zu entnehmen ist.

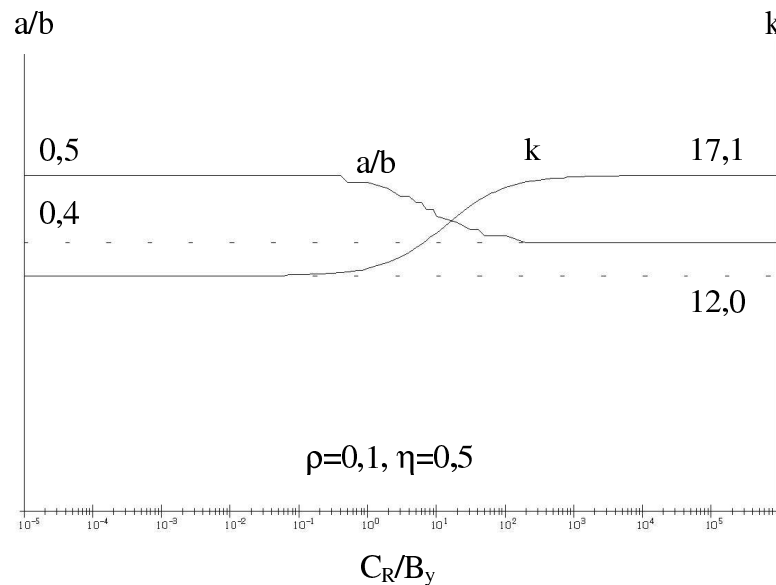


Abb. 6.27: Beulwert und Seitenverhältnis über Einspannung

Bei Antimetrie macht sich der Einfluß der Krümmung erst viel später bemerkbar, wie den Abbildungen 6.27 und 6.28 im Vergleich mit 6.21 und 6.22 zu entnehmen ist. Selbst bei starker Krümmung bleibt das Seitenverhältnis noch beeinflusst, Abbildung 6.29. Außerdem ist der Bereich, in dem die Einspannung am stärksten den Beulwert verändert, etwa um den Faktor 10 hin zu größeren Einspannfederzahlen verschoben.

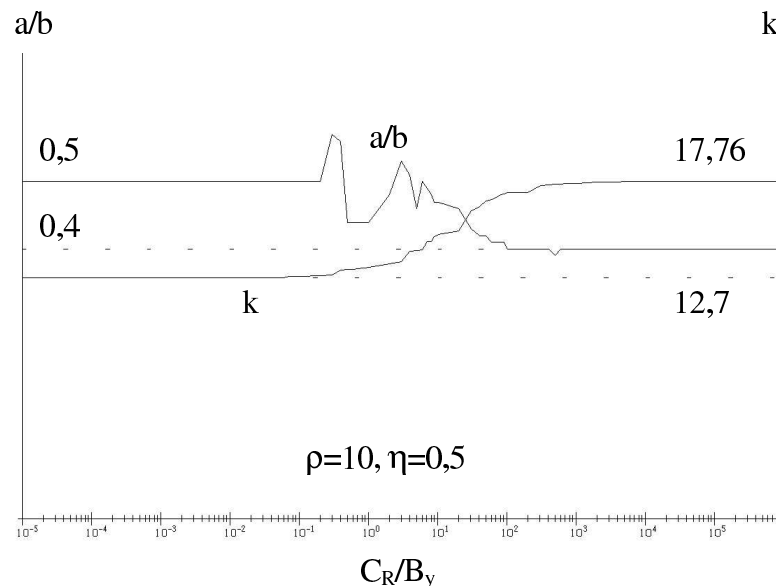


Abb. 6.28: Beulwert und Seitenverhältnis über Einspannung

Den sehr eckigen Verläufen des Seitenverhältnisses ist die recht grobe Schrittweite von 0,01 zu entnehmen, die sich bei so kleine Werten von a/b natürlich stärker bemerkbar macht. Trotzdem ist der Verlauf des Beulwertes selbst bei Sprüngen des Seitenverhältnisses auf offenbar benachbarte Kurven einigermaßen glatt und bleibt in der korrekten Tendenz. Solche Verläufe sind möglich, da bei automatisierter Variation Suchbereiche vorgeben und auf Grundlage vorhergehender Werte eingeschränkt werden müssen. Andere, eng benachbarte Kurven mit

anderen minimalen Seitenverhältnissen und flachen Minima können die Suche auf falsche Bahnen lenken. Akzeptiert man dann aber die vorgegebenen Randwerte als Lösung und rechnet weiter, so ist es möglich, daß die Werte für den Schalenstreifen wieder erreicht werden.

Außerdem sind die benachbarten Lösungen so nahe, daß Abweichungen auf diese Kurven nicht unbedingt als große Sprünge sichtbar werden. Wie schon erwähnt, verlieren die zusätzlichen Lösungen damit ihre Problematik, wenn sie bei starker Krümmung den Lösungen des Schalenstreifens nahe Werte liefern.

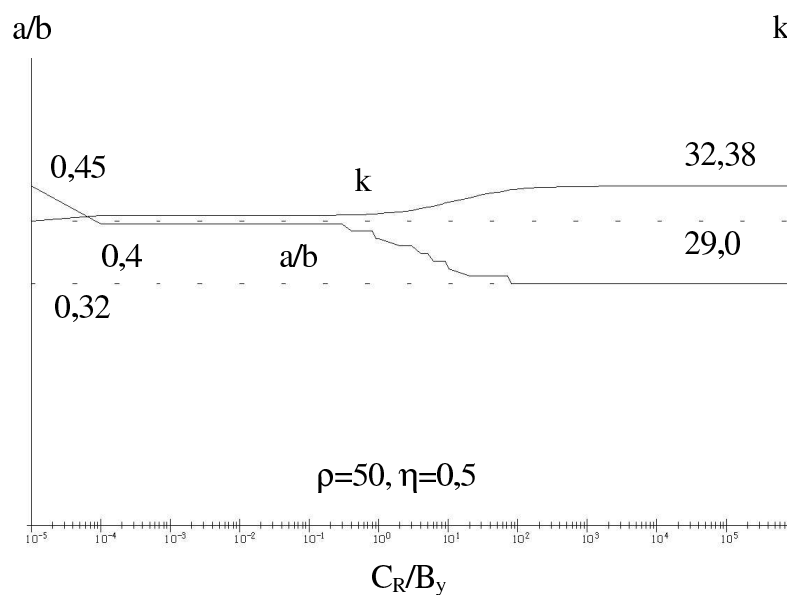


Abb. 6.29: Beulwert und Seitenverhältnis über Einspannung

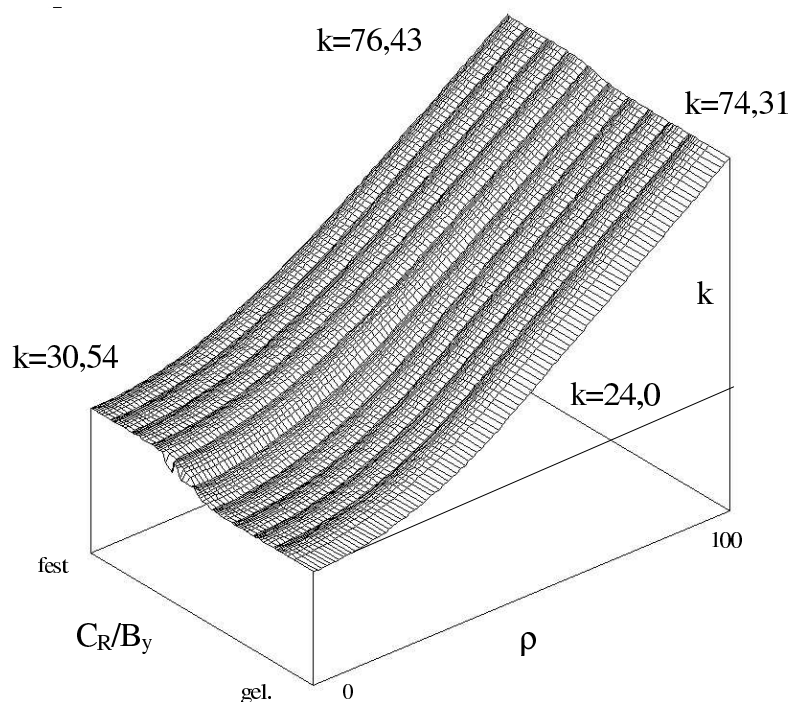


Abb. 6.30: Beulwert über Krümmung und Einspannung, $\eta=2$

Im Anschluß seien mit den Abbildungen 6.30 und 6.31 für eine Kreuzzahl von zwei ebenfalls zwei dreidimensionale Darstellungen von Ergebnissen für Antimetrie gegeben. Trotz der recht groben Schrittweite für das Seitenverhältnis und einiger Ausreißer dieser Werte sind die Ergebnisse für die Beulwerte außer einer Delle im ebenen Fall sehr glatt. Dies beruht auf den sehr flachen Minima der Beulwerte in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses, wie z.B. Abbildung B.18 zu entnehmen ist.

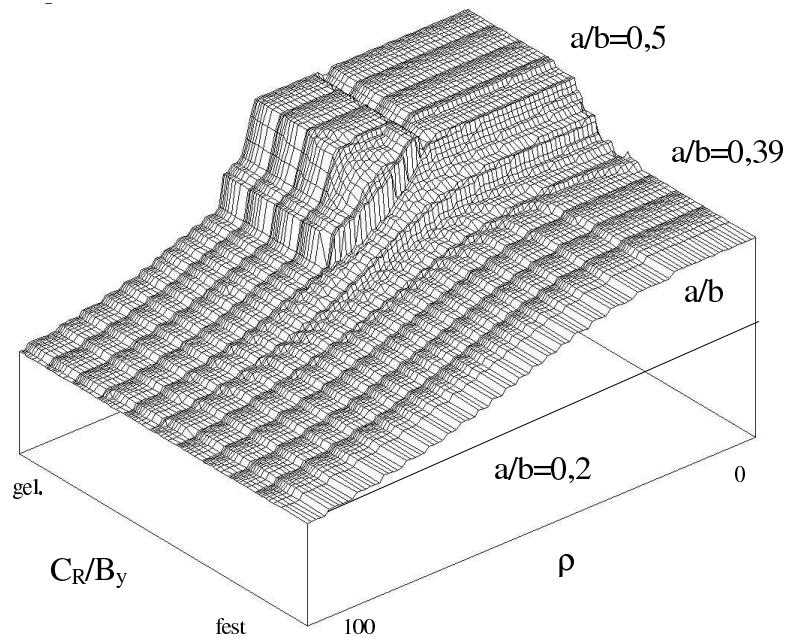


Abb. 6.31: Seitenverhältnis über Krümmung und Einspannung, $\eta=2$

7 Beulformen

Der Unterschied zwischen symmetrischer und antimetrischer Beulform ist bereits in der Einleitung an Hand der Abbildungen 1.1 und 1.2 erklärt worden. Diese Darstellungen von Beulformen sind im Rahmen von FEM-Rechnungen entstanden und deswegen sehr gut und brauchbar. Es ist zu sehen, daß der zweite Schalenstreifen in Abbildung 1.2 stärker gekrümmt ist, weswegen die antimetrische Beulform möglich ist, denn wie in dieser Arbeit gezeigt, bei starker Krümmung kann beides auftreten.

In diesem Kapitel sollen kurz die Ergebnisse dargestellt werden, die bei dem Versuch entstanden sind, die Beulform mittels der Funktionen für $w(x,y)$ in den Gleichungen aus Kapitel 3.3 darzustellen. In [2] sind bereits mehrere FEM-Abbildungen dargestellt, die hier nicht wiederholt werden. In [2] sind zur Einspannung keine Beulformen dargestellt, da deren Berechnung nicht zu bewerkstelligen ist.

Für gelenkige Lagerung ist die Darstellung der Beulform für beliebige Kreuzzahlen und Krümmungen mit diesem Verfahren möglich, Abbildung 7.1, 7.3 und 7.4 sind ein Beispiel, aber es bedarf großer Genauigkeit bei den Beulwerten, damit Proportionalitätsfaktoren und Nullstellen bestimmt werden, die genau die Randbedingungen erfüllende Funktionen liefern.

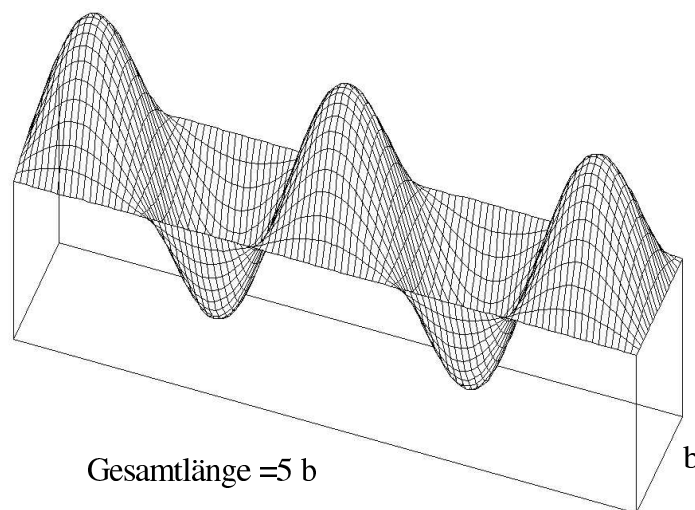


Abb. 7.1: Symmetrische Beulform, gelenkig gelagert, eben, $a/b=1$

Demonstriert ist das in Abbildung 6.2. Während Abbildung 6.1 mit einem Beulwert von 4,00030 berechnet worden ist, ist in Abbildung 6.2 der Beulwert 4,0 genommen worden. Hier ist also die Tatsache, daß mit $p=0,1$ der ebene Schalenstreifen abgebildet werden soll, und

nicht mit $\rho=0$, was nicht möglich ist, schon für eine Abweichung ausschlaggebend. Es ist zwingend notwendig, den Beulwert zum vorgegebenen Seitenverhältnis auf mindestens fünf Nachkommastellen genau zu bestimmen, um korrekte Darstellungen zu erhalten.

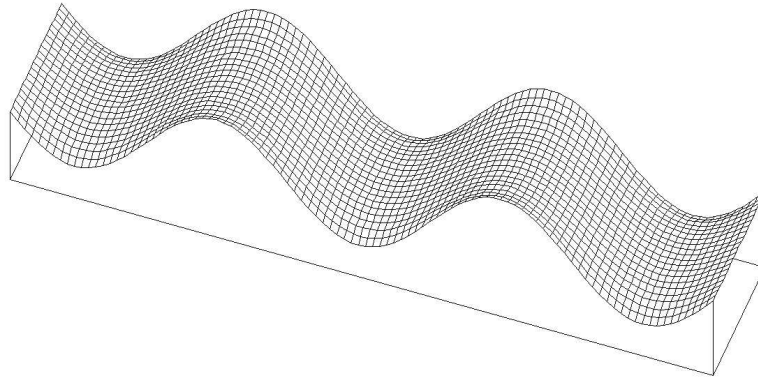


Abb. 7.2: Fehlerhafte Beulform

Damit muß jedes als Beulform darzustellende Ergebnis nachiteriert werden, da diese übertriebene Genauigkeit für den Beulwert die Rechenzeit bei automatischer Variation ins Unermeßliche treiben würde und von vornherein gar nicht benötigt wird.

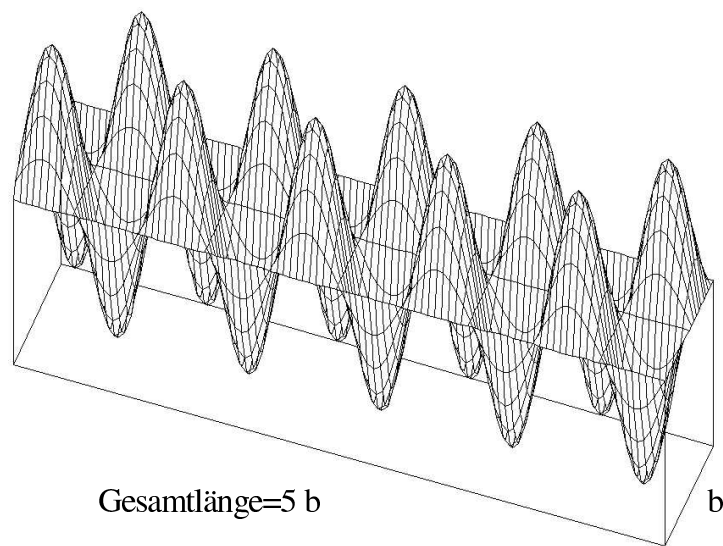


Abb. 7.3: Antimetrische Beulform, gelenkig gelagert, eben, $a/b=1/2$

Das Beulseitenverhältnis in Abbildung 7.4 zur antisymmetrischen Beulform ist größer als 0,5, was den in Kapitel sechs dargestellten Ergebnissen zu widersprechen scheint, doch in Abbildung B.22 ist z.B. zu erkennen, daß das Minimum bei Antimetrie bei starker Krümmung ebenfalls sehr breit ist. Bei noch stärkeren Krümmungen sind dadurch auch Lösungen mit größeren Seitenverhältnissen als 0,5 möglich. Dieses ist hier dargestellt, da mit kleineren Seitenverhältnissen die Darstellung mit Beulen überfrachtet gewesen wäre.

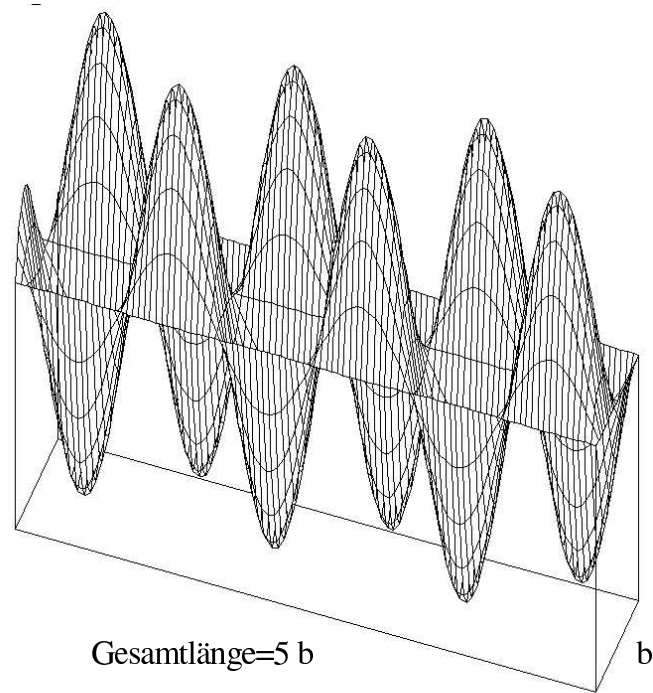


Abb. 7.4: Antimetrische Beulform, gelenkig gelagert, $\rho=60$, $a/b=0,8$

Die Beulamplituden sind offensichtlich extrem übertrieben und können nicht berechnet werden, was der linearen Theorie zugrundeliegt und bereits in Kapitel 3.4 erklärt ist. Daß die Beulamplituden in der Darstellung so sehr hoch sind, liegt unter anderem an einer automatischen Skalierung. Da jedoch die Darstellung der Beulformen für Werte von C_R ungleich Null nicht möglich waren, ist nicht mehr Zeit investiert und die Darstellungen sind so belassen worden, denn erst mit Einspannung hätte sich der Aufwand gelohnt.

Daß die feste Einspannung nicht zu einem Ergebnis als Beulform verarbeitet werden konnte, liegt wahrscheinlich nicht nur an der extremen Instabilität dieser Berechnung der Beulformen. Es war innerhalb der Zeit nicht möglich, auch nur ein halbwegs Bild zu erzeugen, trotz hoher Genauigkeiten. Die Ursachen konnten trotz vieler Versuche und verschiedener Herangehensweisen nicht geklärt werden.

Wie sich die Beulform bei steigender Krümmung verhält, entnimmt man [2]. Die Anzahl der Beulen in Längsrichtung steigt an.

8 Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wird das Beulverhalten eines gekrümmten, orthotropen Schalenstreifens bei beliebiger Längsrandeinspannung für symmetrische und antimetrische Beulform untersucht.

Zur Bestimmung des Beulwertes wird ein homogenes, gekoppeltes, partielles Differentialgleichungssystem aufgestellt und eine allgemeine Lösung bestimmt. Mit dieser werden die Randbedingungen für verschiedene Lastvorgaben überprüft, und es wird über dem Seitenverhältnis die minimale Last aufgesucht. Übergeordnet werden die Krümmung, die Einspannfederzahl und verschiedene Orthotropieparameter variiert, um deren Einfluß auf den Beulwert zu untersuchen.

Auf [2] aufbauend ist eine Untersuchung der Übertragungsmatrizenmethode vorangegangen, die im Anhang dargestellt ist.

Die benötigten Grundgleichungen für das Verfahren sind angegeben, und an die Ableitung des Verfahrens schließt sich im vierten Kapitel ein Vergleich mit einigen analytisch berechenbaren Lösungen an. Zusammen mit [2] und [3] ist dabei eine Übereinstimmung der numerisch ermittelten Werte mit den analytischen Beulwerten des Schalenstreifens festzustellen, wobei die numerische Auswertung zusätzliche Lösungen liefert, die bei Isotropie als vom Seitenverhältnis unabhängiger Rohrbeulwert identifizierbar sind. Dieser ist von der Einspannfederzahl nicht beeinflußt.

Bei Orthotropie existieren zwei Lösungen, die bei $\eta > 1$ im Girlandendiagramm von unten und bei $\eta < 1$ von oben kommen, wenn ε und ζ bei eins bleiben. Bei Antimetrie gibt es noch eine weitere Girlande deren Minimum auf den tieferen Lösungen, die für $\eta > 1$ nicht mehr als der Rohrbeulwert aus [1] bezeichnet werden können, liegt. Dies zeigt die Auftragung über der Krümmung. Denn zusätzlich dazu, daß diese Werte nicht mehr vom Seitenverhältnis unabhängig sind wie bei Isotropie, liefern sie für größere Krümmungen bei Kreuzzahlen größer als eins Lösungen unterhalb der Rohrbeulgeraden, wie bereits in [2] und [3] festgestellt.

Der Einfluß des Hauptsteifigkeitsverhältnisses ε wird vom Programm ebenfalls korrekt wiedergegeben und der Wert eins ergibt bei Krümmung den höchsten Beulwert. Eine systematische Untersuchung des Einflusses der Scherzahl mit einem Vergleich analytischer Lösungen ist aus Zeitgründen nicht erfolgt, doch zeigen die Ergebnisse eine richtige Tendenz.

Die numerisch ermittelten Girlandenkurven im fünften Kapitel zeigen, wie die tieferen Lösungen mit zunehmender Krümmung immer mehr steigen und sich der Lösung des Schalenstreifens nähern, was im Verhalten den Rohrbeulwerten entspricht. Es wird verdeutlicht, daß besonders bei kleinen Kreuzzahlen Probleme bei der Automatisierung der Variation zu erwarten sind. Jedoch fallen die Lösungen bei starken Krümmungen zusammen, so daß in den Auftragungen über der Krümmung nur ein Knick beim Übergang zum linearen Verlauf auftritt, Kapitel sechs. Empfehlungen für die Automatisierung schließen das fünfte Kapitel ab. Allgemeingültige Aussagen sind aber nicht möglich, da keine beliebigen Parametervariationen durchgeführt werden.

Die wichtigste Erkenntnis ist die, daß es sinnvoll ist, je nach Kreuzzahl eine andere Suchrichtung anzuwenden. Bei $\eta > 1$ ist es zweckmäßig, den Startwert für den Beulwert oberhalb des Erwartungswertes anzusetzen, und dann von oben zu suchen, um Interferenz mit den von unten kommenden, tieferen Lösungen zu vermeiden. Anders bei Kreuzzahlen kleiner als eins. Hier wird sinnvollerweise der Beulwert von unten gesucht und ein größeres Seitenverhältnis als der Erwartungswert angesetzt. Dies kann jedoch keine Garantie liefern, immer auf der Lösung des Schalenstreifens zu landen. Unproblematisch ist das, wenn das Seitenverhältnis irrelevant ist, weil sich die zu den gleichen minimalen Beulwerten starker Krümmung unterscheiden. Außerdem gelten die Tendenzen dann nicht mehr, wenn noch Scherzahl und Hauptsteifigkeitsverhältnis beliebig variiert werden. Es wäre sehr sinnvoll, als Anschluß Untersuchungen über das Lösungsverhalten für bestimmte Bereiche durchzuführen, z.B. für $\eta < 1$, $\varepsilon < 1$, $\zeta = 1$ und $\eta < 1$, $\varepsilon > 1$, $\zeta = 1$ und $\eta > 1$, $\varepsilon < 1$, $\zeta = 1$ und so weiter. Das ist zwar sehr umfangreich, kann aber behilflich sein, das Lösungsverhalten in seiner gesamten Vielfalt darzustellen und somit eine fehlerfreie Automatisierung ermöglichen.

Eine weitere Schlußfolgerung ist, sich bei den Ergebnissen für stärkere Krümmung, bei denen sich in der Lösung des Schalenstreifens doppelte Minima ausbilden, immer auf dem Minimum des kleineren Seitenverhältnisses zu bleiben, da das andere Minimum bei Einspannung zu stark steigt und nicht gegen den richtigen Wert konvergiert.

Die automatisch erzeugten Ergebnisse des sechsten Kapitels liegen korrekt und die Werte der Antimetrie bleiben nur in einem Fall nicht über denen der Symmetrie. Das ist der Fall bei Kreuzzahlen kleiner eins bei fester Einspannung für stärkere Krümmung. Es zeigt sich in anderen Vergleichen, daß dabei die Lösung für Symmetrie, die allerdings auch so von [3] angegeben wird, eher zu hoch als die der Antimetrie zu tief liegt. Da es keine analytischen Vergleichswerte gibt, sind die Lösungen der festen Einspannung für Krümmung bei $\eta < 1$ bei Symmetrie auf jeden Fall anzuzweifeln. Das bedeutet, daß sie physikalisch nicht in die Reihe der anderen Ergebnisse einzuordnen sind, aber als Lösung des Gleichungssystems angegeben werden können.

Die feste Einspannung bleibt grundsätzlich über der gelenkigen Lagerung oder läuft in diese für zunehmende Krümmung ein.

Die Darstellung der Beulformen gestaltet sich als eher problematisch und extrem instabil. Hierfür können eher FEM-Darstellungen dienen. Ganz im Gegensatz zu den Beulwerten sind hier Schwankungen in den Ausgangswerten von entscheidender Auswirkung. Die Darstellung für Einspannung ist dementsprechend gar nicht gelungen.

Als Resultat bleibt, daß das Verfahren zur Bestimmung besonders der Beulwerte zu symmetrischen Beulformen bei Isotropie uneingeschränkt verwendbar ist. Der analytisch berechenbare und vom Seitenverhältnis unabhängige Rohrbeulwert kann sehr gut ausgeschlossen werden.

Je mehr Parameter variiert werden und bei Orthotropie ist eher Vorsicht geboten, doch sind die Lösungen des Schalenstreifens isolierbar. Bei Automatisierung zur Einbindung in einen anderen Algorithmus, siehe [10], ist extreme Vorsicht geboten, wenn das Seitenverhältnis von Bedeutung wird, das es durchaus mehrere im Beulwert nahe beieinander aber im Seitenverhältnis unterschiedliche Lösungen mit sehr flachen Minima gibt.

A Anhang: Übertragungsmatrizenmethode

In diesem Teil des Anhanges soll in aller Kürze auf die Berechnung des Beulens mit Berücksichtigung des Schubes eingegangen werden.

In [2] ist vorgeschlagen, dieses mittels der Übertragungsmatrizenmethode zu versuchen und so möglicherweise zu besseren Ergebnissen zu kommen. Zu Beginn der Diplomarbeit ist das versucht worden, jedoch sind ebenfalls große Probleme aufgetreten, so daß dieses Verfahren nicht weiter verfolgt worden ist. Der benötigte Zeitaufwand wäre um ein vielfaches höher gewesen.

Mittels der drei Differentialgleichungen in $u(x,y)$, $v(x,y)$ und $w(x,y)$ mit Schub

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (c_{12} + c_{33}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (c_{12} + c_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{r} \left((c_{45} + 2c_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + c_{55} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right), \\ c_{44} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(c_{45} + 2c_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{55} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2p_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{22} \frac{1}{r^2} w &= 0 \end{aligned} \quad (A-1)$$

ergibt sich ein Polynom achten Grades, bei dem diesmal nur ein Koeffizient Null ist, siehe [2]. Eine Reduktion ist somit nicht möglich. Es ist eventuell nicht unerheblich, ob mit dieser oder der reduzierten Differentialgleichung aus [2] gerechnet wird, was jedoch auf Grund des Abbruchs dieses Verfahrens nicht geklärt worden ist. Mittels der allgemeinen Lösungen und den bestimmten Proportionalitätsfaktoren kann dann der Zustandsvektor formuliert werden, wobei die Kräfte aus dem Materialgesetz mit den aus den Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen gewonnenen Verzerrungen bestimmt werden.

Der für das Verfahren gewählte Zustandsvektor sieht wie folgt aus:

$$\underline{v}^T = \left[w, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u, \quad v, \quad n_y, \quad n_x, \quad m_y, \quad n_{xy} \right]. \quad (A-2)$$

Mit den allgemeinen Lösungen und den Proportionalitätsfaktoren erhält man in Matrixschreibweise:

$$\underline{v}(x,y) = \underline{\underline{M}}(x,y) \cdot \underline{k}, \quad \underline{k} \in \mathbb{R}^8, \quad \underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8, \quad (A-3)$$

wobei der Vektor \underline{k} aus acht beliebig wählbaren Konstanten besteht. Die Matrixelemente von \underline{M} ergeben sich aus den acht Summanden der allgemeinen Lösungen für die acht verschiedenen Nullstellen. Auf deren Angabe wird verzichtet, da sie sehr umfangreich wäre und benötigte Angaben [2] in Kapitel 3.3 vollständig zu entnehmen sind. Mit dem Zusammenhang A-3 kann jetzt vom linken zum rechten Rand übertragen werden:

$$\begin{aligned}\underline{v}(x, y = b/2) &= \underline{M}(x, y = b/2) \cdot \underline{k} \Leftrightarrow \underline{k} = \underline{M}^{-1}(x, y = b/2) \cdot \underline{v}(x, y = b/2), \\ \underline{v}(x, y = -b/2) &= \underline{M}(x, y = -b/2) \cdot \underline{k}, \text{ also} \\ \underline{v}(x, y = -b/2) &= \underline{M}(x, y = -b/2) \cdot \underline{M}^{-1}(x, y = b/2) \cdot \underline{v}(x, y = b/2).\end{aligned}\tag{A-4}$$

Der Einbau der Einspannwirkung wird mit den Zusammenhang 2.6-2 zu

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ u \\ v \\ n_y \\ n_x \\ 0 \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \underline{v}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm \frac{C_R}{bB_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ u \\ v \\ n_y \\ n_x \\ m_y \\ n_{xy} \end{bmatrix}, \quad \underline{v}^* = \underline{C} \cdot \underline{v}, \tag{A-5}$$

oder mit einer Null in der zweiten Zeile, so daß die Einspannmatrix \underline{C} nur gestürzt und das Element mit der Einspannfederzahl als Kehrwert gebildet wird. Dies ist dann für hohe Einspannfederzahlen stabiler in der numerischen Auswertung. Der Vektor mit dem Sternchen ist der neue Zustandsvektor, in dem die Einspannwirkung enthalten ist, wobei das Vorzeichen im Matrixelement mit C_R am rechten und linken Rand unterschiedlich ist. Es ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}\underline{v}^*(y = -b/2) &= \underline{C} \cdot \underline{M}(x, y = -b/2) \cdot \underline{M}^{-1}(x, y = b/2) \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{v}^*(x, y = b/2), \\ \underline{v}^*(y = -b/2) &= \underline{U} \cdot \underline{v}^*(y = b/2),\end{aligned}\tag{A-6}$$

mit der Übertragungsmatrix \underline{U} . In den beiden Matrizen \underline{C} muß das angesprochene Vorzeichen unterschiedlich sein, dabei ist es egal welches Vorzeichen welchem Rand zugeordnet wird.

Nun können an den Rändern beliebige, nicht symmetrische Randbedingungen für die Zustandsgrößen vorgegeben werden! An einem Beispiel soll das für die allerdings symmetrischen Randbedingungen dieser Arbeit getan werden:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ v \\ n_x \\ 0 \\ 0 \\ n_{xy} \end{bmatrix} (x, y = -b/2) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & . & u_{18} \\ u_{21} & u_{22} & . & . & . & . & . & . \\ u_{31} & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ u_{81} & . & . & . & . & . & . & u_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ v \\ n_x \\ 0 \\ 0 \\ n_{xy} \end{bmatrix} (x, y = b/2) . \quad (A-7)$$

Diese symmetrischen Randbedingungen sind erfüllt, wenn die Nullen erfüllt werden. Die anderen Größen sind beliebig. Es muß also die Lösbarkeitsbedingung des Gleichungssystems überprüft werden, das aus den Zeilen gebildet wird, in denen links Nullen stehen, und den Spalten, die zu Elementen des rechten Vektors gehören, die nicht Null sind. In diesem Fall also:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ v \\ n_x \\ 0 \\ 0 \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & u_{12} & & u_{14} & u_{15} & & u_{18} \\ & & & & & & \\ & u_{32} & & u_{34} & u_{35} & & u_{38} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ u_{62} & & u_{64} & u_{65} & & u_{68} \\ u_{72} & & u_{74} & u_{75} & & u_{78} \\ & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ v \\ n_x \\ 0 \\ 0 \\ n_{xy} \end{bmatrix} . \quad (A-8)$$

Alle anderen Elemente sind unbedeutend. Die zu überprüfende Lösbarkeitsbedingung, die im bisherigen Verfahren der Überprüfung der Randbedingungen als letzter Schritt entspricht, lautet damit also:

$$\begin{vmatrix} u_{12} & u_{14} & u_{15} & u_{18} \\ u_{32} & u_{34} & u_{35} & u_{38} \\ u_{62} & u_{64} & u_{65} & u_{68} \\ u_{72} & u_{74} & u_{75} & u_{78} \end{vmatrix} = 0. \quad (A-9)$$

Es ist eine 4x4-Determinante auszuwerten. Analog können auch die Eigenwerte dieser Teilmatrix bestimmt und auf Minima untersucht werden.

Im Vergleich zu [2] ist das augenscheinlich viel einfacher als die Auswertung einer 8x8-Determinante, doch vorangegangen ist immer eine Inversion einer 8x8-Matrix (A-4) und mehrere Matrizenmultiplikationen (A-6). Zwar ist die Inversion einer Matrix numerisch unproblematischer als die Bestimmung der Determinante, doch sind die erzielten Ergebnisse

nicht von besserer Qualität als in [2]. Dies liegt unter anderem an der viel größeren Allgemeingültigkeit und dem größeren Anwendungsspektrum dieses Verfahrens, mit dem in der dargestellten Form beliebige Randbedingungen berechenbar sind! Allerdings erkaufte man sich diesen Vorteil durch größere numerische Probleme.

Im folgenden sollen einige Ergebnisse das belegen. Im übrigen ist keine Aufteilung in symmetrische und antimetrische Anteile vorgenommen, weil bei Schubbelastung keines von beiden erwartet wird und deswegen auch die Lösungsvielfalt so nicht eingeschränkt werden darf. Angefangen wird mit Verläufen der Determinante über dem Beulwert, vergleiche Abbildung 4.7.

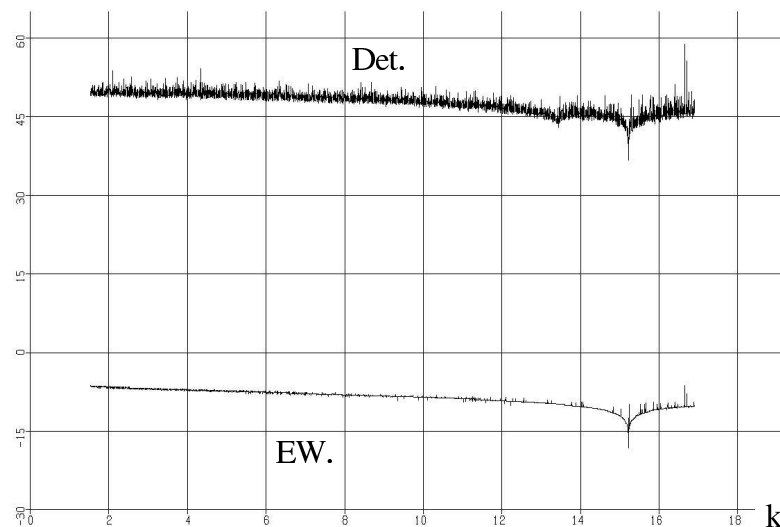


Abb. A.1: Determinante und 1. Eigenwert über Beulwert, isotrop, $C_R=0$, $\rho=20$, $p_{xy}=0$, $a/b=1$

Wie in Abbildung A.1 zu sehen ist, erhält man einen entscheidenden Vorteil, wenn man anstelle der Determinante, die als eine Hauptinvariante der Matrix das Produkt aller Eigenwerte darstellt, den ersten Eigenwert bestimmt. Zum einen ist der Verlauf sauberer, zum anderen gibt es nur ein Minimum, während im Verlauf der Determinante noch ein zweites kleineres Minimum existiert.

Für eine numerische Auswertung sind beide Verläufe noch akzeptabel, wenn man ein Suchverfahren anwendet, das nicht an einer glatten Kurve entlang iteriert und auf Steigungsänderungen reagiert, sondern das Intervallschachtelung verwendet und auf lokale Minima abfragt.

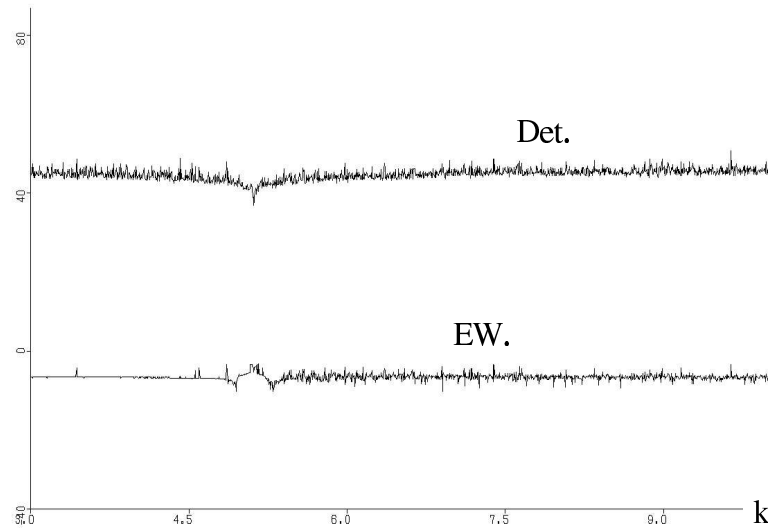


Abb. A.2: Determinante und 1. Eigenwert über Beulwert, isotrop, $C_R/B_y=10$, $\rho=0,1$, $p_{xy}=0$, $a/b=0,6$

In der Abbildung A.2 ist der Einfluß steigender Einspannung zu erkennen. Unter anderem sind die Kurvenverläufe unsauberer. Diesmal liefert der Eigenwert zwei Minima neben dem Minimum der Determinante und ein ganz kleines lokales Minimum an genau derselben Stelle. Es ist am sinnvollsten, immer beide Lösungen heranzuziehen. In [2] ist mit der Determinante für feste Einspannung eine falsche Lösung getroffen worden. Die korrekte Lösung ist nur nicht gefunden worden, was auf Grund der selbst schon im vereinfachten Verfahren dieser Arbeit auftretenden Lösungsvielfalt keine Überraschung mehr ist.

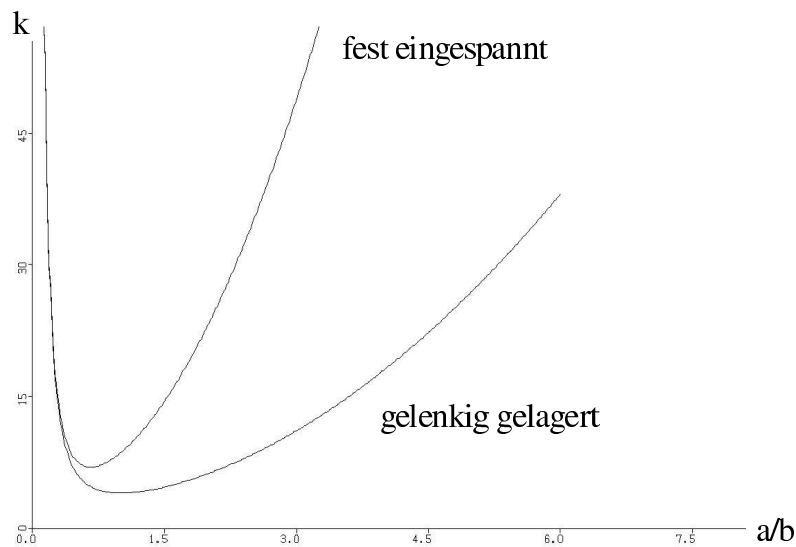


Abb. A.3: Girlande für Isotropie, $\rho=0,1$, $p_{xy}=0,2p_x$

Daß die Berechnung der festen Einspannung selbst mit 20% Schubbelastung möglich ist, zeigt Abbildung A.3, jedoch hat die Berechnung dieser Werte mehrere Stunden an Rechenzeit beansprucht, da auf Grund der Verläufe der Determinante sehr kleine Schrittweiten vorzugeben sind, um die richtigen Lösungen zu erhalten. Bedenkt man, daß die Last über dem

Seitenverhältnis für jeden Parameter zu minimieren ist so verliert dieses Verfahren seine Anwendbarkeit.

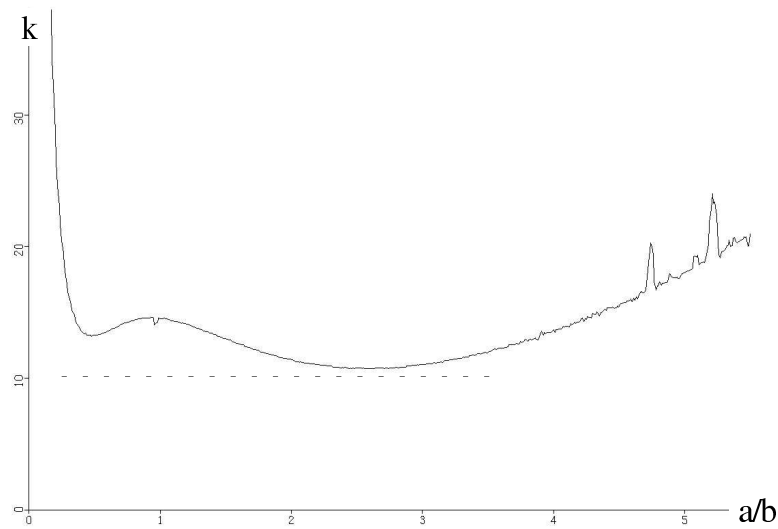


Abb. A.4: Girlande für Isotropie, $\rho=20$, $p_{xy}=0$, $C_R=0$

Außerdem ist es bei veränderten Parametern, also z.B. höherer Krümmung in Abbildung A.4 oder höherer Schublast in Abbildung A.5 fast unmöglich, die richtige Lösung zu finden. Die Werte brechen immer aus, was durch die in Abbildung A.2 gezeigten unsauberen Verläufe erklärt ist.

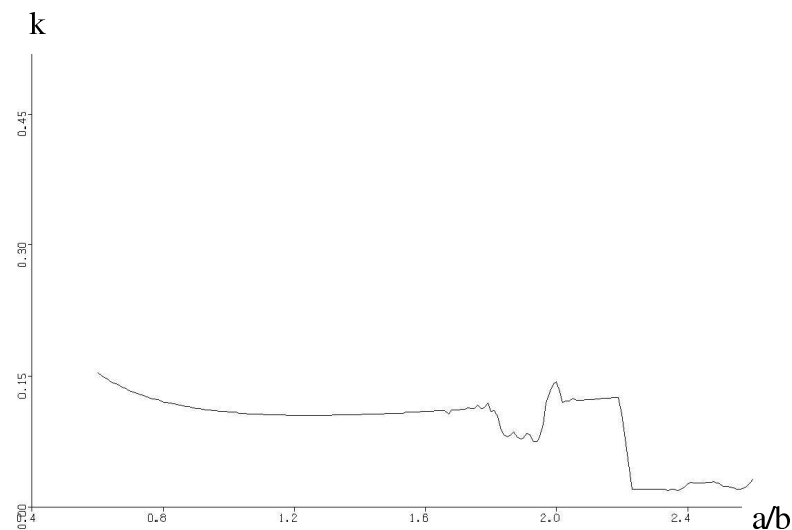


Abb. A.5: Girlande für Isotropie, $\rho=0.1$, $p_{xy}=50p_x$, $C_R=0$

Interessant ist noch, daß in Abbildung A.5 die beiden Minima nicht dasselbe Niveau haben, wie es eigentlich sein sollte, vergl. Abbildungen B.13. Ob dies daran liegt, daß nicht die vereinfachte Differentialgleichung aus [2] verwendet worden ist, ist nicht mehr untersucht worden.

Als Fazit bleibt, daß es zwar durchaus möglich ist, die gesuchten Beulwerte zu berechnen, aber automatisierte Parametervariationen durchzuführen, wird mit diesem Verfahren nur möglich sein, wenn dafür mehr Zeit zur Verfügung steht, da wesentlich kleinere Schrittweiten und ständige begleitende Kontrollen notwendig sind. Praktisch bedeutet das, daß immer wieder Rechnungen nach Fehlläufen zu unterbrechen sind.

Da es nicht möglich ist, die Qualität der Lösungen zu verbessern und es selbst ein Problem darstellt, bei Variation von a/b auf der richtigen Girlande zu bleiben, stärker noch als bei dem in den ersten Kapiteln dieser Arbeit vorgestelltem Verfahren, kann dieses Vorgehen nur zur Nachrechnung einzelner punktueller Werte empfohlen werden. Dann ist aber Schub und jede Randbedingung möglich. Für die Aufgabenstellung ist das aber nicht von Bedeutung, da mehr allgemeine Ergebnisse von Interesse sind als punktuelle Nachrechnungen.

B Anhang: Abbildungen

Hier befinden sich nur Bilder, die aus Platzgründen in einen Anhang ausgegliedert wurden. Sie werden in der Arbeit referenziert.

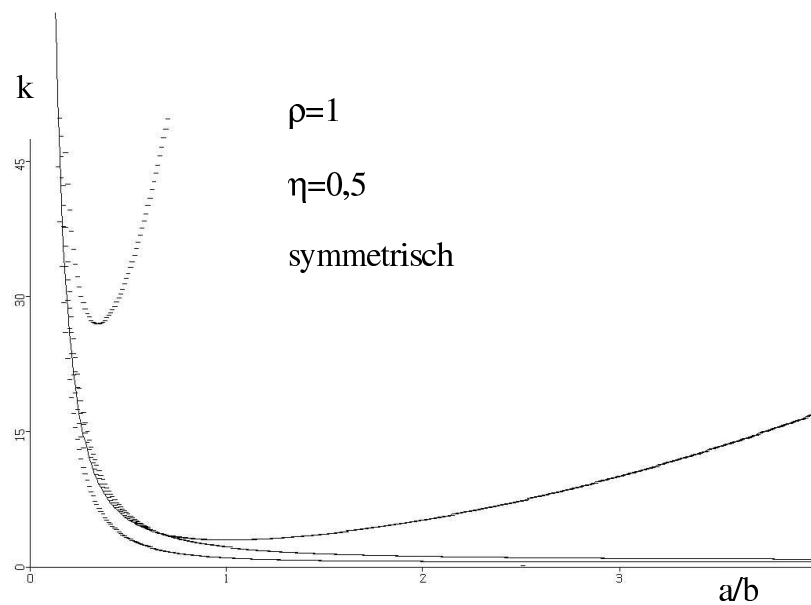


Abb. B.1: Beulwert über Seitenverhältnis

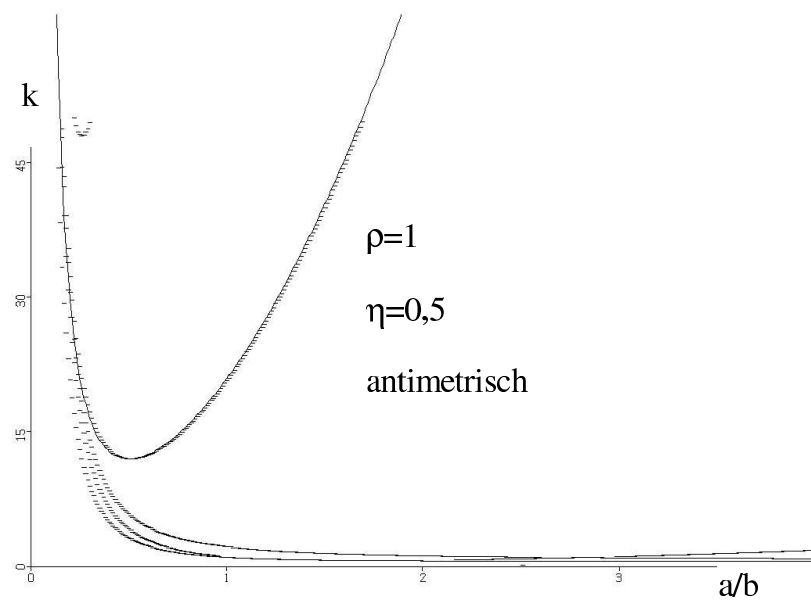


Abb. B.2: Beulwert über Seitenverhältnis

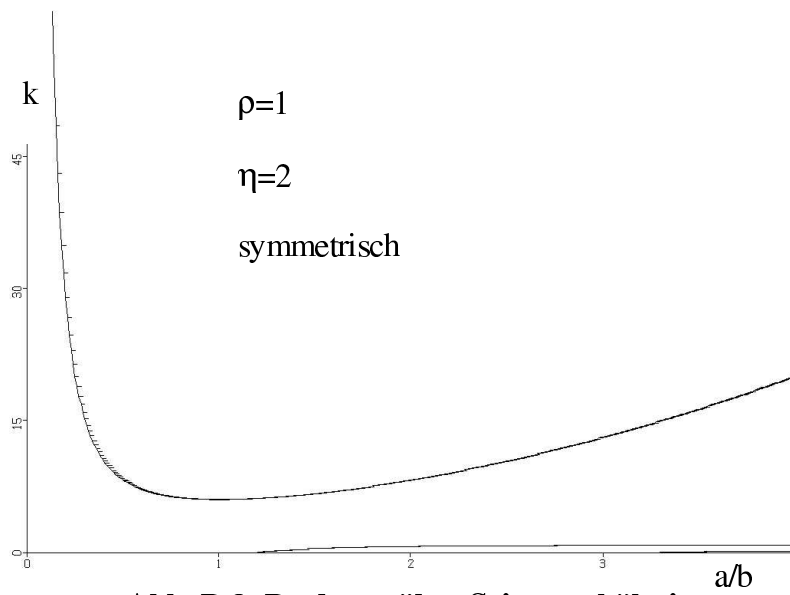


Abb. B.3: Beulwert über Seitenverhältnis

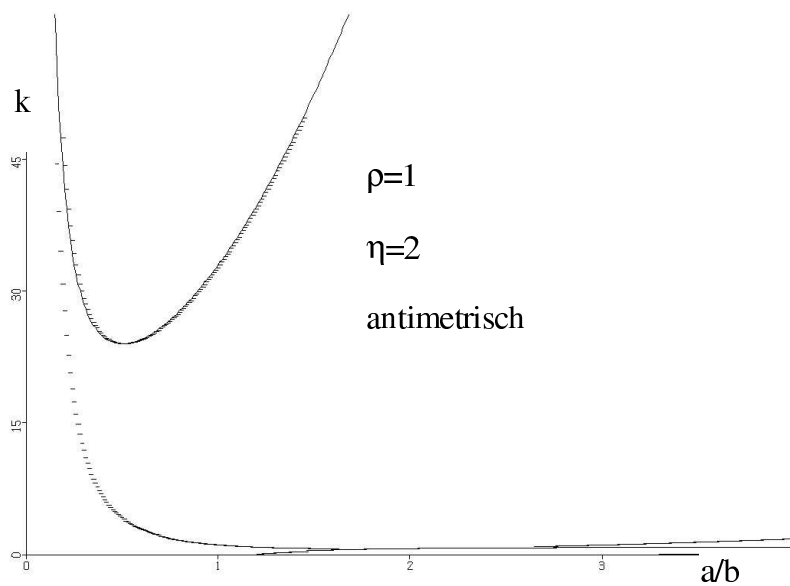


Abb. B.4: Beulwert über Seitenverhältnis

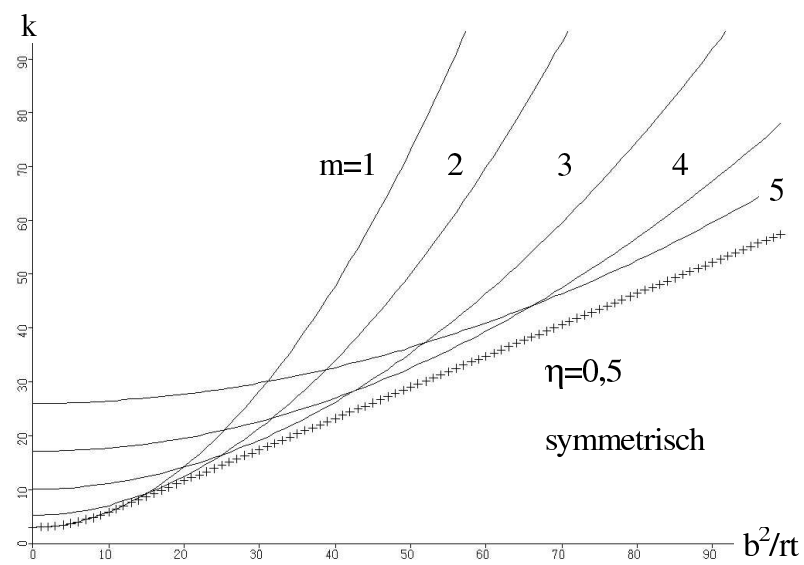


Abb. B.5: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

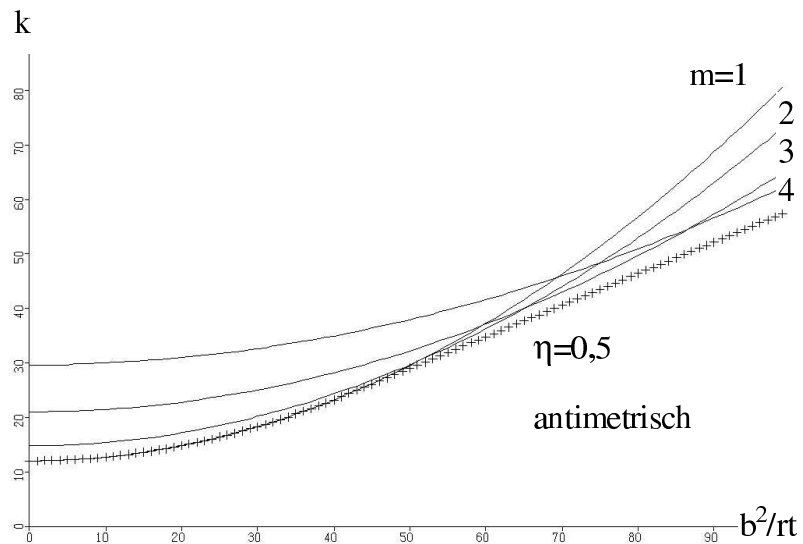


Abb. B.6: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

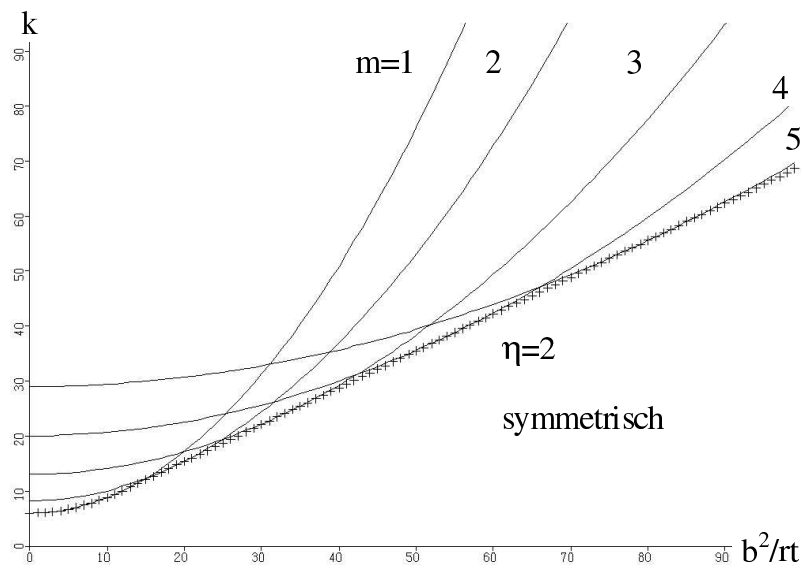


Abb. B.7: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

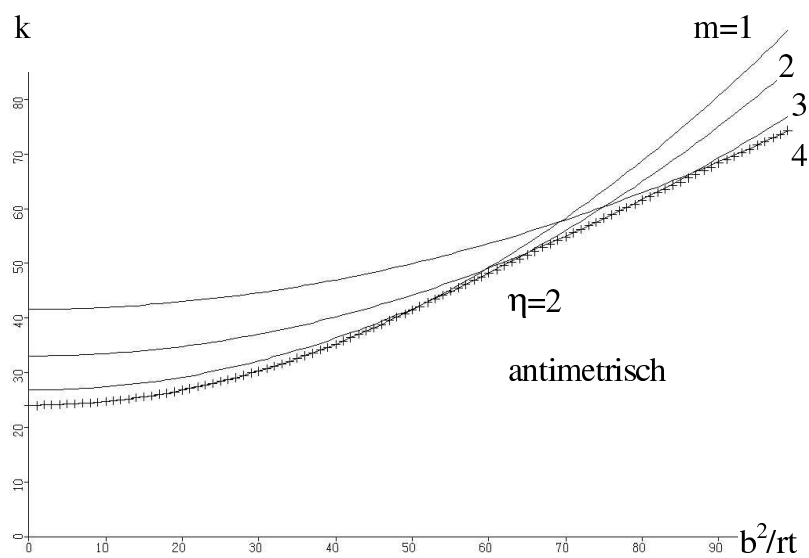


Abb. B.8: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

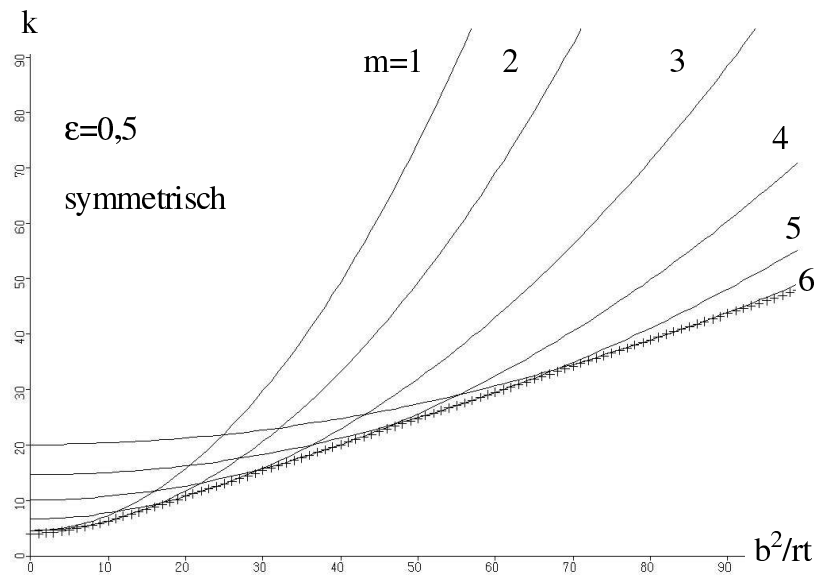


Abb. B.9: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

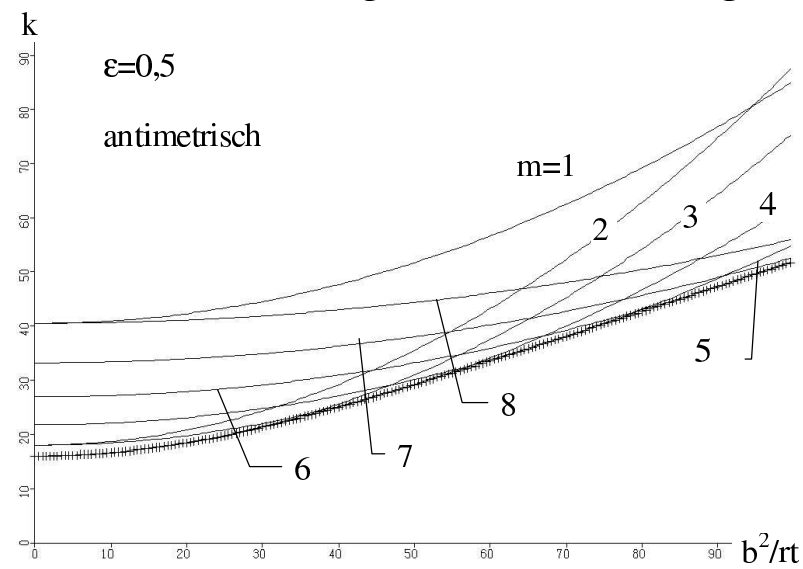


Abb. B.10: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

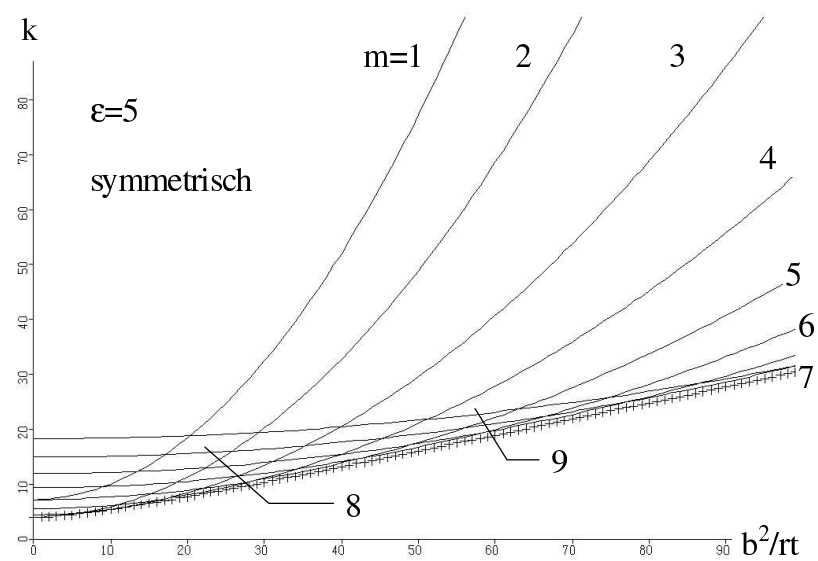


Abb. B.10: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

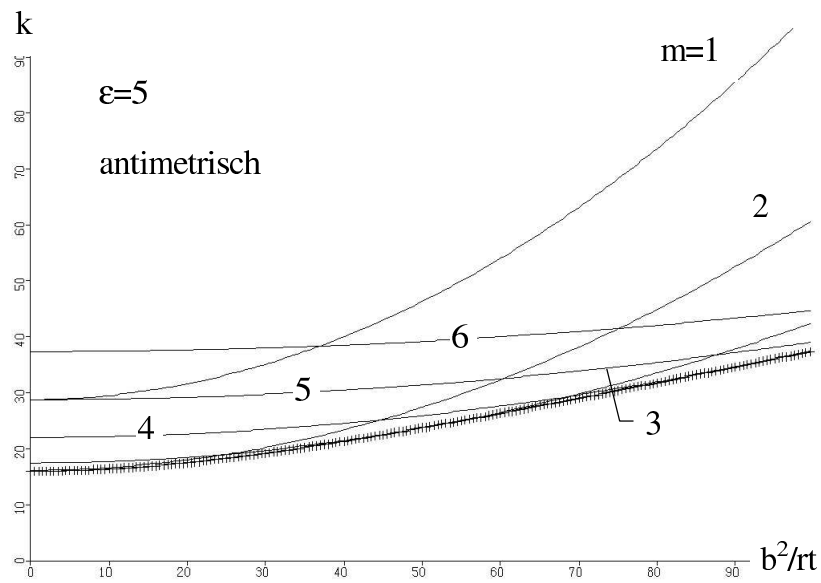
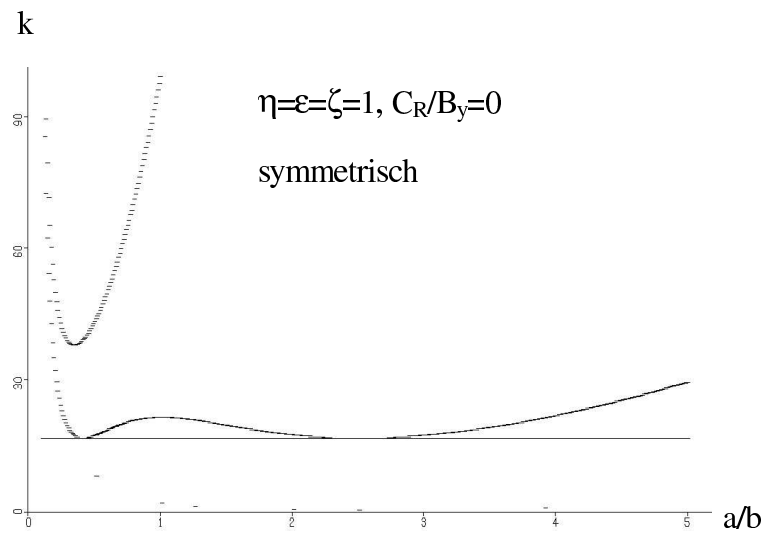
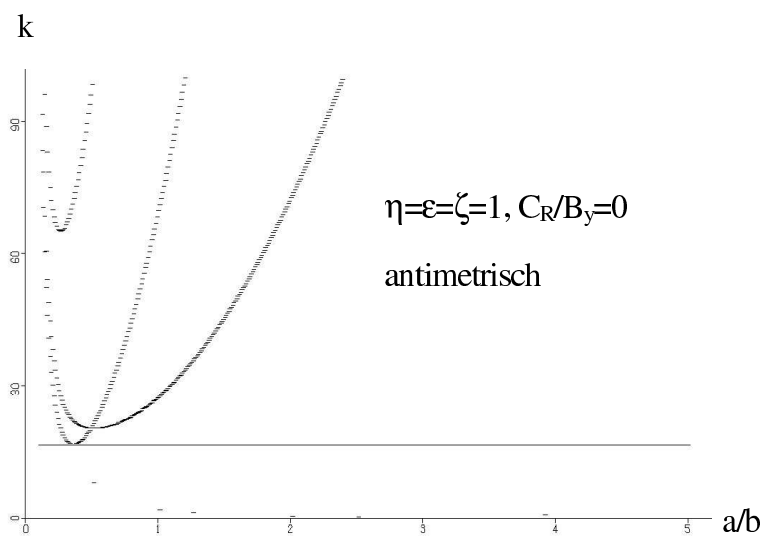
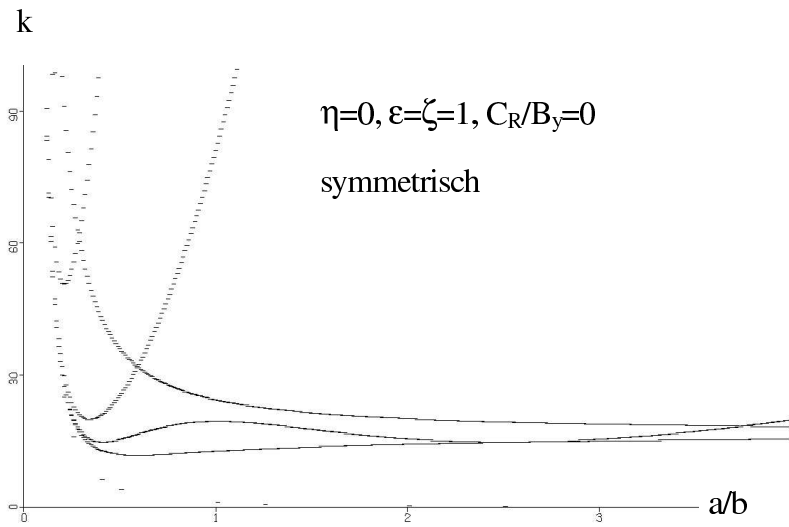
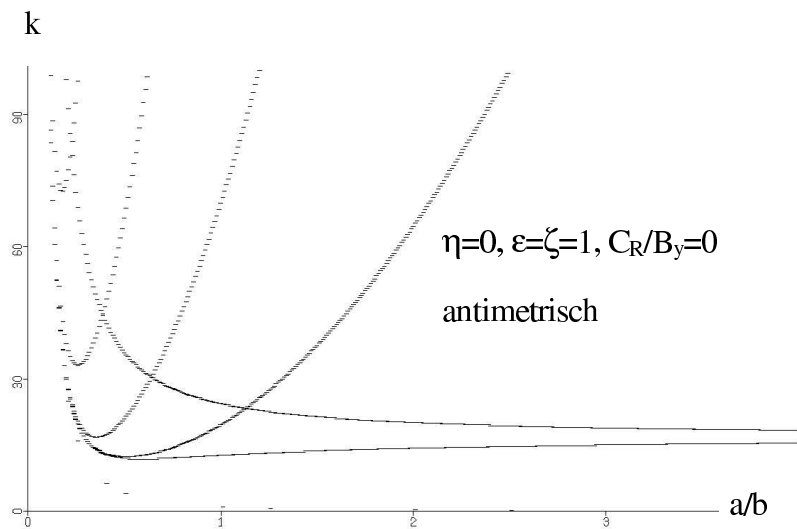
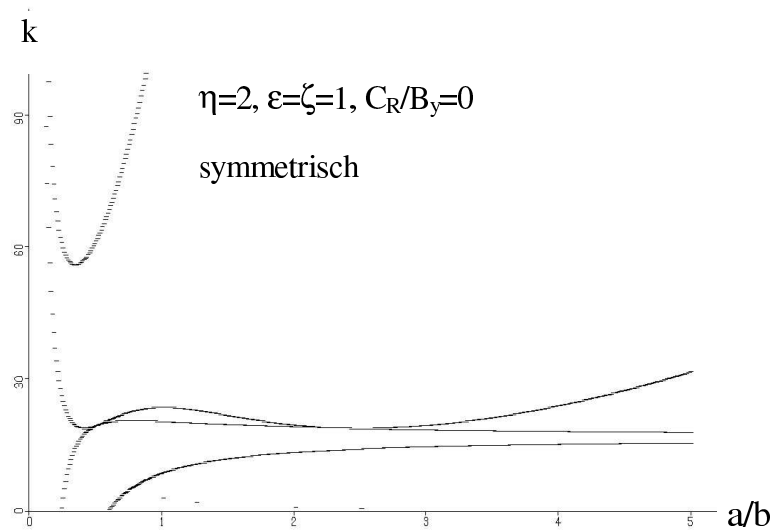
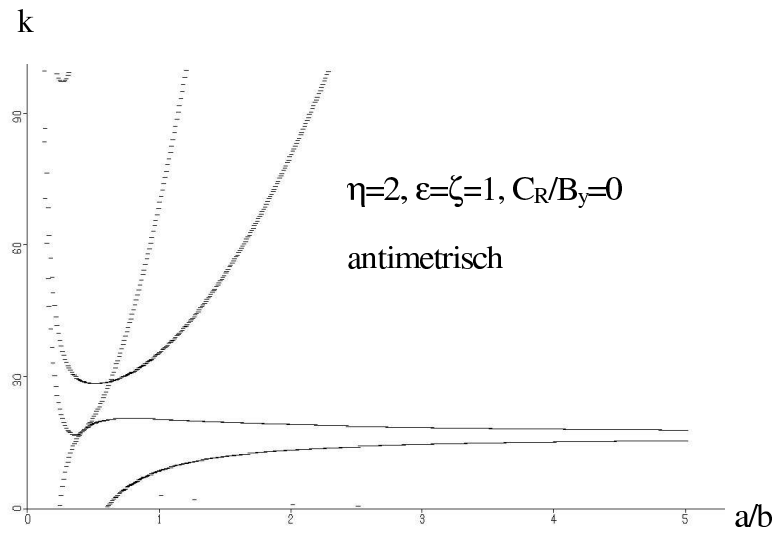
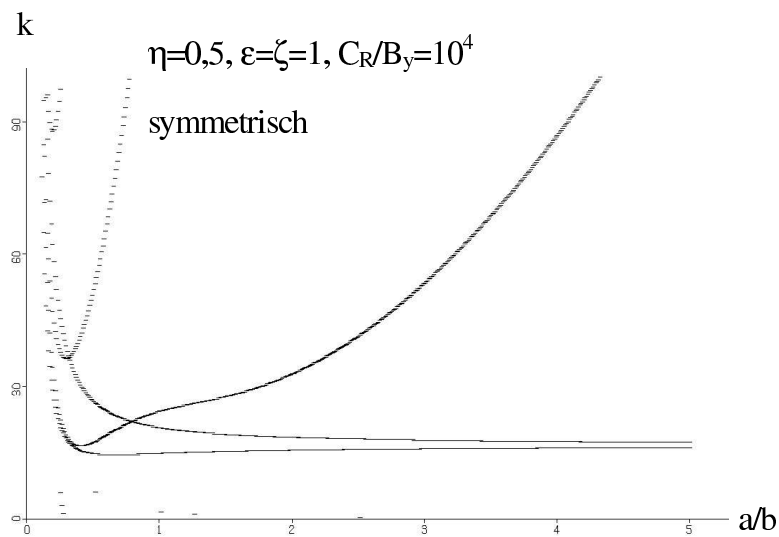
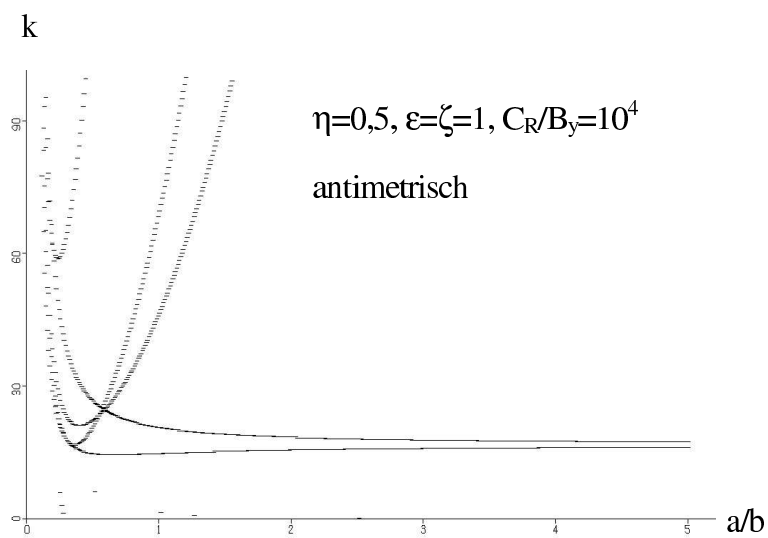
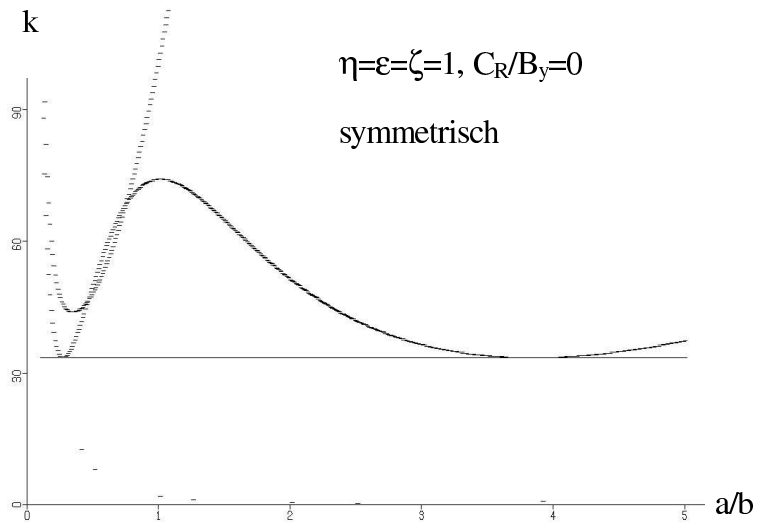
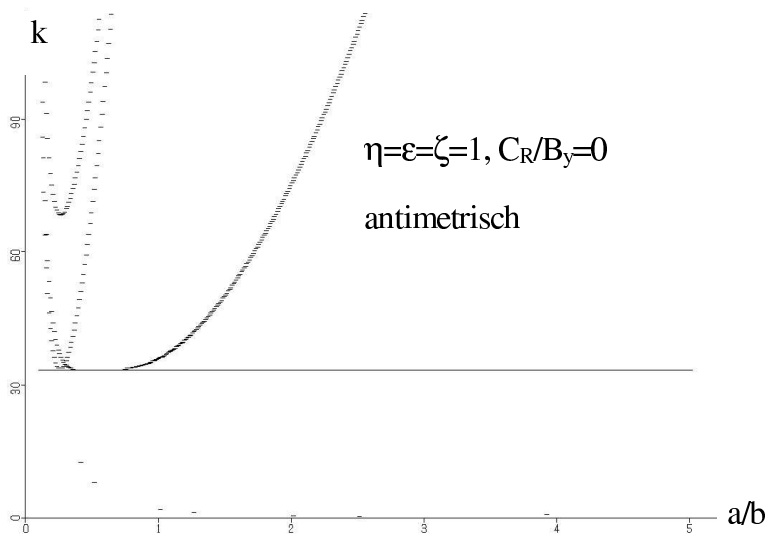
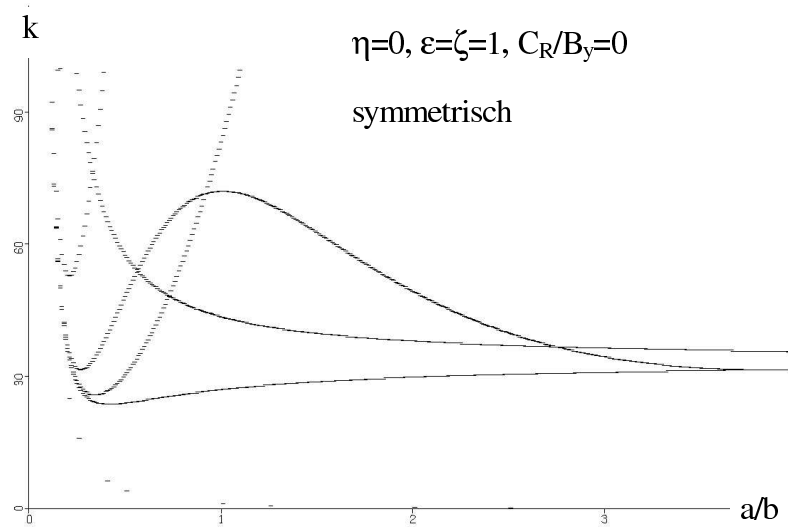


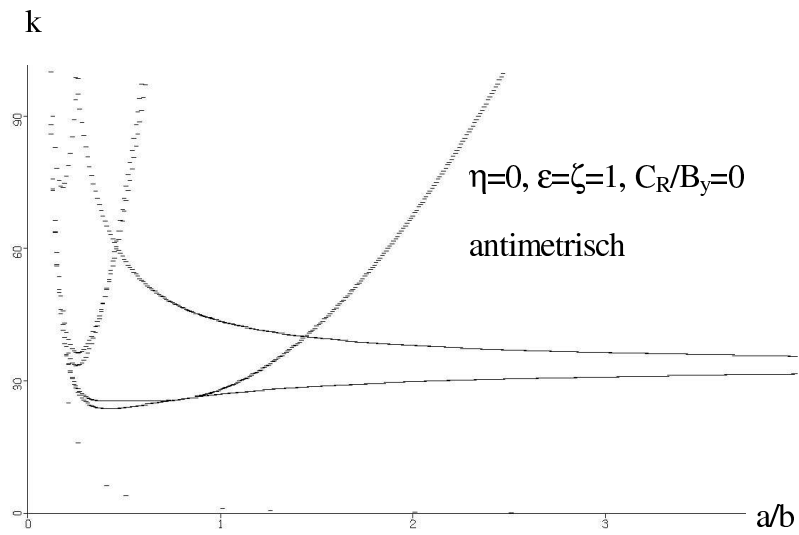
Abb. B.12: Beulwert über geometrischem Krümmungsmaß

Abb. B.13: Girlande für Symmetrie, $\rho=25$ Abb. B.14: Girlande für Antimetrie, $\rho=25$

Abb. B.15: Girlande für Symmetrie, $\rho=25$ Abb. B.16: Girlande für Antimetrie, $\rho=25$ Abb. B.17: Girlande für Symmetrie, $\rho=25$

Abb. B.18: Girlande für Antimetrie, $\rho=25$ Abb. B.19: Girlande für Symmetrie, $\rho=25$ Abb. B.20: Girlande für Antimetrie, $\rho=25$

Abb. B.21: Girlande für Symmetrie, $\rho=50$ Abb. B.22: Girlande für Antimetrie, $\rho=50$ Abb. B.23: Girlande für Symmetrie, $\rho=50$

**Abb. B.24: Girlande für Antimetrie, $\rho=50$**

C Anhang: Literaturverzeichnis

- [1] Wiedemann, J.:
Leichtbau, Band 1: Elemente. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag
1986

- [2] Bunge, U.:
Das Beulen eines Schalenstreifens unter kombinierter Schub- und Druckbelastung bei
beliebiger Längsrandlagerung. Studienarbeit, TU Berlin, ILR, unveröffentlicht 1996

- [3] Schmalstieg, M.:
Beulwerte axial belasteter, schwach gekrümmter Schalenstreifen bei beliebiger
Längsrandlagerung. Diplomarbeit, TU Berlin, ILR, unveröffentlicht 1994

- [4] Geier, B.:
Das Beulverhalten versteifter Zylinderschalen: Teil 1 Differentialgleichungen.
Z. Flugwiss. 14 (1966), Heft 7, S.306-323
Seggelke, P.; Geier, B.:
Das Beulverhalten versteifter Zylinderschalen: Teil 2 Beullasten. Z. Flugwiss. 15
(1967), Heft 12, S.477-490

- [5] Dörfler, T.:
Beulverhalten und Optimierung längsversteifter Gurtplatten unter Schub- und Druck-
belastung. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1, Nr.229, Düsseldorf: VDI-Verlag 1993

- [6] Basar, Y.; Kraetzig, W. B.:
Mechanik der Flächentragwerke, Theorie, Berechnungsmethoden und
Anwendungsbeispiele. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1985

- [7] Klingbeil, E.:
Tensorrechnung für Ingenieure. 2., überarbeitete Auflage, B.I. Hochschul-
taschenbücher, Band 197. Mannheim, Wien, Zürich: B.I. Wissenschaftsverlag, 1989

- [8] Schade, H.:
Tensoranalysis. 6., verbesserte Auflage. TU Berlin, Skript zur Vorlesung 1994

- [9] Pflüger, A.:
Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin: Springer-Verlag 1975

-
- [10] Herbeck, L.; Bunge, U.: Stabilitätsberechnung von Stringer-Schalen mit dem FEM-Programm MSC/NASTRAN. ILR-Mitteilung, TU-Berlin, 1996
 - [11] Thielemann, W.; Eßlinger, M.: Einfluß der Randbedingungen auf die Beullast von Kreiszylinderschalen. Der Stahlbau 12/1964
 - [12] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. 25. Auflage. Stuttgart, Leipzig : B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Thun, Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch. Moskau: Verlag Nauka. 1991
 - [13] Engeln-Müllges, G.; Reutter, F.: Formelsammlung zur Numerischen Mathematik, mit Standard-FORTRAN 77-Programmen. 6., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Mannheim, Wien, Zürich: B.I. Wissenschaftsverlag 1988