Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik
Technische Universität Berlin

Institutsbericht Nr. 04/98

Realizability linearer Stress–Strain Beziehungen

dritte, überarbeitete Fassung vom Oktober'99

T. Rung

Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, Sekr. HF 1,
Müller-Breslau-Strasse 8, 10623 Berlin, Germany
rung@pi.tu-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

Die Qualität numerischer Strömungssimulationen ist eng mit der Qualität der physikalischen Modellbildung verbunden. Bei der Modellierung turbulenter Austauschmechanismen innerhalb industrieller Simulationsverfahren spielen isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle (EVM) eine zentrale Rolle. Die Popularität dieser Modelle beruht vor allem auf programmtechnischen Aspekten. Die hohe numerische Stabilität des resultierenden Gesamtsystems und die algorithmisch einfache Umsetzung des Ansatzes machen isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle äußerst attraktiv. Letzteres gilt insbesondere in industriellen Anwendungen, in denen keine wesentlichen Prioritätsunterschiede zwischen numerischer Effizienz und Genaugkeit existieren.

Trotz ihrer teilweise jahrzehntelangen Verfügbarkeit fanden alternativen Vorgehensweisen, wie beispielsweise Reynolds-Spannungs Transportgleichungsmodellierung (RSTM) oder Grobstruktursimulation (LES), außerhalb akademischer Bereiche nur wenig Verbreitung. Formal existierende Vorteile höherwertiger Ansätze zur Simulation turbulenter Strömungen spiegeln sich häufig nicht in der Qualität der Ergebnisse für industrielle Anwendungen wider, der Mehraufwand ist jedoch zumeist beträchtlich. Die physikalisch genauere Modellbildung setzt daher oftmals eine defizitäre Kosten-Nutzen Entwicklung in Gang. Ein Beispiel hierfür ist die im Folgenden diskutierte isotrope Wirbelzähigkeitsmodellierung auf der Basis von Zweigleichungsmodellen. Im Rahmen komplexer industrieller Anwendungen greift man gegenwärtig häufig immer noch auf numerisch kostengünstigste algebraischen Wirbelzähigkeitsmodelle zurück, obwohl die darin verankerte Parametrisierung des turbulenten Längen- und Geschwindigkeitsmaßes mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit und Grenzschichtintegralgrößen äußerst fragwürdig ist. Demgegenüber vermögen Zweiparametermodelle, in denen zwei zusätzliche Transportgleichungen für turbulente Längen- und Geschwindigkeitsmaße verwendet werden, oftmals keine entscheidenden Verbesserungen zu erzielen. Der Beitrag versucht zu verdeutlichen, weshalb herkömmliche Zweiparametermodelle ihr Potential vielfach nicht einlösen können. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das Beispiel einer einfachen, zweidimensionalen Scherströmung an dem sich die Motivation des Beitrags anschaulich darstellen läßt.

Mit Hilfe des *Realizability-Prinzips* wird der allen linearen Wirbelzähigkeitsmodellen zugrunde liegende Boussinesq-Ansatz auf seine Konsistenz zu fundamentalen statistischen Grundsätzen überprüft. Die Analyse offenbart Defizite der linearen Modellierungstechnik, welche in Gestalt einer Zwangsbedingung isoliert werden können. Niederparametrige Modelle vermögen hiervon kaum zu profitieren, weil die Zwangsbedingung bei der Parameterreduktion oftmals bereits verletzt wurde. Im Unterschied zu algebraischen und Eingleichungsmodellen gelingt die Berücksichtigung dieser Zwangsbedingung für Zweigleichungsmodelle durch Parametrisierung einer Konstanten. Ferner erkennt man deutlich, daß sich die Herleitung üblicher Wirbelzähigkeitsmodelle zu eng an die Betrachtung zweidimensionaler Scherströmungen im lokalen Gleichgewicht anlehnt.

Im Anschluß daran folgt eine kritische Bewertung des linearen Wirbelzähigkeitskonzepts aus dem Blickwinkel der Darstellungstheorie. Der Abschnitt strebt die formale Erörterung von Schwierigkeiten bei der Darstellung bestimmter physikalischer Mechanismen an, und versucht eine Motivation zur Verwendung von Invarianten einer im darstellungstheoretischen Sinne höherwertigen Modellbildung zu entwickeln.

Der Beitrag schließt mit der Diskussion verschiedenartiger zweidimensionaler Geschwindigkeitsgradientenfelder und deren Auswirkungen auf das Turbulenzfeld. Vor dem Hintergrund der Modellbildung werden insbesondere die Einflüße der rein rotatorischen (distorsionsfreien) Anteile, der rotationsfreien, winkeltreuen Formänderung (irrotational strain) und der nicht-inertialen Beiträge rotierender Bezugssysteme erläutert.

Ein kurzer Nachtrag befaßt sich mit der schwächsten Form des Realizability Prinzips, der sogenannten Schwartzschen Ungleichung. Mit Hilfe der Schwartzschen Ungleichung wird die Formulierung einer unteren Schranke für die Längenmaßvariable (ε, ω) in konventionellen Zweigleichungsmodellen entwickelt. Die Konsequenzen dieser Schranke für die Eigenschaften des Turbulenzmodells werden am Beispiel des $k-\omega$ Modells von Wilcox (1988) illustriert.

2 Illustratives Beispiel

Ausgangspunkt der Untersuchungen sei das im Folgenden diskutierte illustrative Beispiel einer einfachen zweidimensionalen Scherschicht auf der Basis raumfester kartesischen Koordinaten. Die additive Zerlegung des Geschwindigkeitsgradiententensors nach symmetrischem und antimetrischem Anteil lautet in diesem Fall:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & 0 \\ -W_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{1}$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \qquad W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) .$$

Der symmetrische Anteil S_{ij} wird im Folgenden als *Deformationgeschwindigkeiten-* oder *Scherraten (Strain-Rate) Tensor,* der antimetrische Anteil als *Drehgeschwindigkeiten-* oder *Wirbeltensor* bezeichnet. Im Falle kompressibler Strömungen läßt sich der Deformationsgeschwindigkeitentensor in einen kugelsymmetrischen Dilatationsbeitrag und einen Deviator zur Beschreibung der Distorsionsanteile zerlegen

$$S_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}\delta_{ij}S_{kk}}_{\text{Dilatationsbeitrag}} + \underbrace{\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right)}_{\text{Distorsionsbeitrag } \tilde{S}_{ij}} . \tag{2}$$

Der Einfachheit halber stelle man sich beispielsweise eine ungekrümmte, zweidimensionale Grenzschicht- oder Kanalströmung mit $S_{12} = W_{12} = 0.5\, U_{,y}$ vor. Die Ausführungen dieses Abschnitts gelten jedoch ohne Einschränkung der Allgemeinheit für sämtliche 2D und 3D Situationen in denen die $S_{\alpha\alpha}$ null, oder zumindest klein im Vergleich zu den Nebendiagonalenelementen $S_{\alpha\beta}$ sind.

2.1 Modellierung der Normalspannungen

Wertet man das nach Boussinesq (1877) benannte *lineare Wirbelzähigkeitsprinzip*

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij}k - 2\nu_t\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{3}$$

$$\nu_t := \text{Wirbelzähigkeit} = c_\mu k T_t$$

für den Strömungstyp (1) aus, so erkennt man unmittelbar die in extremem Widerspruch zur Realität stehende Vorhersage isotroper kinematischer Normalspannungen

$$\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = \frac{2}{3}k . \tag{4}$$

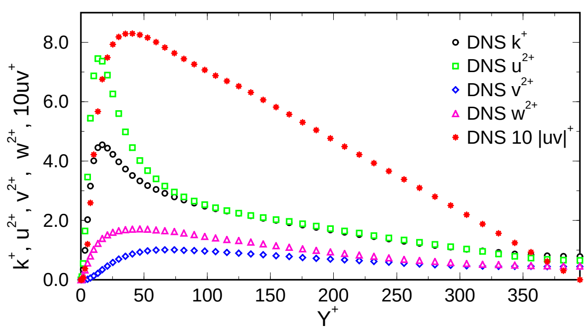


Abbildung 1: Turbulente Kanalströmung (Re_τ=395): Reynolds-Spannungen aus direkter numerischer Simulation (Kim et al. 1987).

Tatsächlich liegt das Verhältnis zwischen kleinster und größter (kinematischer) Normalspannung bei diesem Strömungstyp für nicht verschwindende Scherraten erfahrungsgemäß im Bereich von 3-10 (Abbildung 1). Bei genauerer Betrachtung des oben skizzierten Ergebnisses (4) tritt ein weiteres eigenartiges Phänomene zu Tage:

- Der strukturell einfachste Zustand mit dem höchstmöglichen Symmetriegrad ist die isotrope Turbulenz, deren Korrelationstensor invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems ist. Isotrope Turbulenz wird daher üblicherweise mit kugelsymmetrischen Korrelationstensoren verbunden (Rotta 1972). Im Grenzfall isotroper Normalspannungszustände sollten folglich sämtliche Schubspannungskomponenten aus Konsistenzgründen verschwinden, was beim linearen Wirbelzähigkeitsansatz (3) augenscheinlich nur im trivialen Grenzfall S_{12}=0 gelingt.

Die angesprochenen Probleme werden durch die unzulängliche Modellierung der Normalspannungen $\overline{u_i u_i}$ verursacht. Im Sinne einer Polynomdarstellung

$$\overline{u_i u_j} = P\left(\delta_{ij}, S_{ij}, \qquad S_{ij}^2, S_{ik}W_{kj} + S_{jk}W_{ki}, W_{ij}^2, S_{ij}^3, ...\right) \tag{5}$$

werden die Normalspannungen für das betrachtete Scherströmungsbeispiel nur von nullter Ordnung in den Geschwindigkeitsgradienten genau approximiert, wohingegen die Schubspannungen von erster Ordnung genau approximiert werden. Das oben untersuchte Beispiel ist keinesfalls akademischer Natur, vielmehr läßt sich die Mehrheit der in der Praxis auftretenden Strömungen dergestalt beschreiben. Für *lokal* zweidimensionale turbulente Scherströmungen läßt sich ganz allgemein sagen, daß die Normalspannungen von den geraden Potenzen einer Polynomdarstellung beschrieben werden und die Schubspannungen von den ungeraden Potenzen. Eine präzisere Modellierung von Normalspannungen verlangt demzufolge mindestens einen quadratischen Ansatz. Dies verdeutlicht sich anhand der Definition einer *effektiven anisotropen Wirbelzähigkeit,* welche, in Analogie zu anisotropen linear-elastischen Materialgesetzen, durch einen Tensor vierter Stufe (Hinze 1959; Gatski und Speziale 1993) beschrieben wird

$$\overline{u_i u_j} \;=\; \frac{2}{3}\delta_{ij} k - 2\nu_{ijkl}\left(\tilde{S}_{kl} + W_{kl}\right) \;. \qquad (6)$$

Die effektive Wirbelzähigkeit wird Rahmen des linearen EVM (3) als isotrop angenommen. Mit Hilfe der allgemeinen Darstellung eines isotropen Tensors vierter Stufe findet man

$$\begin{aligned} \nu_{ijkl}^{\mathrm{EVM}} &:= A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \\ \leadsto^{(6)} \quad \overline{u_i u_j} &= \frac{2}{3}\delta_{ij}\, k - 2\left[A\delta_{ij} S_{kk} + (B+C) S_{ij} + (B-C) W_{ij}\right] \;. \end{aligned} \qquad (7)$$

Hieraus ergibt sich vermöge simpler Symmetrie– ($\overline{u_i u_j} = \overline{u_j u_i}$) und Kontraktionsrestriktionen ($\overline{u_k u_k} = 2k$) unmittelbar das lineare EVM (3). Modelle von Typ (3) werden deswegen auch *isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle* genannt. Die trotz allem erfolgreiche Anwendung isotroper Wirbelzähigkeitsmodelle in der numerischen Strömungmechanik legt daher die folgende Schlußfolgerung nahe:

Der Einfluss anisotroper Normalspannungszustände auf Scherströmungen ist von untergeordneter Bedeutung.

Eine detailliertere Analyse auf der Basis von Reynolds-Spannungs Transportgleichungsmodellen bestätigt diese Schlußfolgerung. Davon ausgenommen sind Strömungen unter dem Einfluss ausgeprägter sekundärer Strömungsmerkmale. Hierzu zählen in erster Linie:

- Die Variation des mittleren Geschwindigkeitsfeldes durch den exklusiven Einfluss von Normalspannungsanisotropie auf bestimmte Geschwindigkeitskomponenten, z.B. Sekundärströmung in der Rohrebene nichtkreisförmiger Rohre.
- Strömungen unter dem Einfluss großer Bereiche mit extremer Stromlinienkrümmung und der damit verbundenen Auslöschung oder Anfachung der Produktion turbulenter Schubspannungen, z.B. stark verdrallte Strömungen.
- Strömungsfelder stromab extremer "Diskontinuitäten".

2.2 Modellierung der Schubspannungen

Die soeben gemachten Aussagen unterstreichen die zentrale Bedeutung einer korrekten Darstellung des Transportes turbulenter Schubspannungen bei der Simulation komplexer industrieller (Scher-) Strömungen. Für das hier betrachtete Beispiel (1) berechnet

berechnet sich die einzige von Null verschiedene Komponente der turbulenten Schubspannung zu:

$$\overline{u_1 u_2} = -2\nu_t S_{12} = -2c_\mu k T_t S_{12} \,. \qquad (8)$$

Eine Evaluierung der Beziehung (8) ist sicherlich in vieler Weise möglich. Zumeist konzentrieren sich die in der Literatur vorhandenen Arbeiten auf die Beurteilung der spezifischen Vorschriften zur Berechung der Basisparameter k und T_t. Im Falle der Zweigleichungsmodelle repräsentieren diese zusätzliche abhängige Veränderliche, welche mit Hilfe semi-empirischer Transportgleichungen bestimmt werden. Populäre Varianten basieren auf $T_t{=}\tau$ (Speziale, Abid und Anderson 1992), $T_t{=}k/\epsilon$ nach Jones und Launder (1972) oder $T_t^{-1}{=}c_\mu\omega$ gemäß Wilcox (1993). Durch empirische Schließungsannahmen, wie z.B. die sog. Mischungsweghypothese, lassen sich die Basisparameter aber auch auf die vorhandenen abhängigen Veränderlichen des Impuls- und Kontinuitätsproblems abbilden. Beispiele für derartige Null–und Eingleichungsmodelle findet man z.B. bei Baldwin und Lomax (1978) oder Spalart und Allmaras (1992).

Die letzten beiden Terme in (8) neutralisieren sich in einer Dimensionsanalyse, weshalb sich einfacher

$$\overline{u_1 u_2} = -c_\mu k \alpha, \qquad \alpha = 2 T_t S_{12} \qquad (9)$$

notieren läßt. Tatsächlich liegt den meisten isotropen Wirbelzähigkeitsmodellen ungeachtet der Schließungsannahmen für k und T_t die Betrachtung der Beziehung (9) für den ausgezeichneten gleichgewichtsnahen (Referenz-) Fall $\alpha \approx c_\mu^{-0.5}$ zugrunde. Die Proportionalitätskonstante c_μ wird im Zusammenhang mit EVM demnach üblicherweise als das Quadrat des *Anisotropiefaktors* angesehen:

$$c_\mu \approx \frac{(\overline{u_1 u_2})^2 + (\overline{u_2 u_3})^2 + (\overline{u_1 u_3})^2}{k^2}. \qquad (10)$$

Die Annahme, es handele sich bei dieser Relation um eine universelle Konstante, ist zweifelsfrei falsch und deutet auf ein inhärentes Problem herkömmlicher EVM hin. Die Kritik soll an dieser Stelle nicht näher vertieft werden. In Bezug auf viele Ein- und Zweiparamtermodelle sei lediglich bemerkt, daß die Anstrengungen in Anbetracht des vorrangigen Ziels der Modellierung – eine korrekte Beschreibung turbulenter Schubspannungen – unter Umständen auf dem falschen Weg – Lösung der Transportgleichung für k – betrieben werden. Der Ansatz zur Lösung einer Transportgleichung für den Betrag der resultierenden Schubspannung, wie beispielsweise von Johnson und King (1984) vorgeschlagen, war möglicherweise auch deswegen erfolgreicher. Die exakte Transportgleichung der Turbulenzenergie k birgt andererseits wesentlich weniger Schwierigkeiten, genauer gesagt ungeschlossene Terme (z.B. Druck-Scherkorrelationsanteile), in sich.

Im folgenden Abschnitt soll eine formale Untersuchung des Boussinesq-Ansatzes, unabhängig von der spezifischen Wahl der turbulenten Basisparameter, vorgenommen werden.

3 Realizability-Prinzip

Die Mehrzahl der bekannten Strategien zur Erweiterung des Gültigkeitsbereichs von statistischen Turbulenzmodellen basiert letztlich auf den Prinzipien der rationalen Mechanik, insbesondere der *Darstellungs- oder Invariantentheorie* (Gatski und Speziale 1993; Lumley 1978; Spencer 1971; Zheng 1994). Im Unterschied zu empirisch/heuristischen Modellierungstechniken wird dabei eine allgemeingültige analytische Bestimmung der Modellkoeffizienten angestrebt. Mathematisch betrachtet sind die Koeffizienten des Turbulenzmodells dimensionslose Skalare und somit unabhängig (invariant) von der Wahl des Koordinatensystems. Es ist daher naheliegend, die Koeffizienten nicht konstant zu setzen, sondern als skalare Funktion aller im mathematischen Modell enthaltenen linear unabhängigen (irreduziblen) Invarianten der Tensorkoordinaten darzustellen. Die Invariantentheorie reduziert analog zur Dimensionsanalyse die Anzahl der beteiligten Parameter. Neben der Identifikation der im System auftretenden Einflussparameter müssen zu deren Bestimmung ergänzende Zwangsbedingungen, aus möglichst übergeordneten Prinzipien oder Axiomen, formuliert werden. Die Formulierung der Zwangsbeziehungen basiert typischerweise auf dem Realizability-Prinzip (Schumann 1977; Lumley 1978), der Rapid Distortion Theorie (RDT) (Reynolds 1987), der Renormalisierungsgruppentheorie (RNG) (Yakhot et al. 1992) oder der strengen darstellungstheoretischen Behandlung von linearisierten algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen (Gatski und Speziale 1993). Die Zwangsbedingungen setzen die Koeffizienten des Turbulenzmodells in Verhältnis zu den dimensionslosen irreduziblen Invarianten des Parameterraums.

Der vorliegende Beitrag kommt aufgrund der vorgegebenen isotropen EVM Struktur der Modellbildung ohne darstellungstheoretische Elemente aus, und befaßt sich unmittelbar mit der Entwicklung einer physikalisch tragfähigeren Formulierung auf der Basis von (3). Die Ergebnisse ermöglichen eine verbesserte Darstellung von schergetriebenen Strömungen, vermögen jedoch nicht sämtliche der eingangs geschilderten Anomalien des isotropen EVM Konzeptes zu korrigieren. Ergänzend hierzu befaßt sich der vierte Abschnitt mit formalen Aspekten der isotropen Wirbelzähigkeitsdefinition.

3.1 Realizability-Restriktionen

Bei der ins Auge gefassten Modellbildung handelt es sich um eine statistische Betrachtung. Ausgangspunkt der Vorgehensweise ist die statistische Zerlegung der Momentanwerte $\tilde{\phi}$ der bilanzierten Größen in einen Mittelwert ϕ und eine entsprechende Fluktuation φ

$$\tilde{\phi} = \phi + \varphi \; . \tag{11}$$

Der Mittelwert kennzeichnet i.a. das Ensemblemittel. Für statistisch stationäre oder periodische Strömungen wird jedoch zumeist eine zeitliche bzw. phasenbezogenen Mittelung vorgenommen. Substituiert man sämtliche Momentanwerte entsprechend der Zerlegung (11) und mittelt die so enstehenden Bilanzgleichungen, so ergeben sich an

Stelle der Impulsgleichungen die sogenannten *Reynoldsgleichungen* (Reynolds 1895), in denen neben den mittleren Impulsgrößen U_i auch die Reynolds-Spannungen $\overline{u_i u_j}$ in Gestalt zweiter statistischer Momente auftreten (Hinze 1959). Die Reynolds-Spannungen genügen daher fundamentalen statistischen Zusammenhängen, die im Rahmen der numerischen Strömungsmechanik häufig unter dem Begriff *Realizability*-Prinzip zusammengefaßt werden:

$$\overline{u_\alpha^2} \quad \geq 0 \qquad \rightarrow \quad \text{keine negative Varianz,} \tag{12}$$

$$\left(\overline{u_\alpha u_\beta}\right)^2 \quad \leq \overline{u_\alpha^2}\;\overline{u_\beta^2} \qquad \rightarrow \quad \text{Ungleichung nach Schwartz.} \tag{13}$$

Da es sich bei $\overline{u_\alpha^2}$ um Anteile turbulenter kinetischer Energie handelt, ist die erste der beiden Realizability-Restriktionen auch physikalisch einsichtig: Energie ist nie negativ. Die Schwartzsche Ungleichung (13) ergibt sich mathematisch aus der Tatsache, daß die Reynolds-Spannungen durch einen symmetrischen, positiv semi-definiten Tensor repräsentiert werden. Diese Aussage trifft prinzipiell auf die Korrelationsmatrix zweier beliebiger fluktuierender physikalischer Größen $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\phi}$ zu:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \overline{\gamma^2} & \overline{\gamma\varphi} \\ & \\ \overline{\gamma\varphi} & \overline{\varphi^2} \end{pmatrix} \; . \tag{14}$$

Ein symmetrisch positiv semi-definiter Tensor besitzt die Eigenschaft, daß seine Determinante und seine (stets reelen) Eigenwerte nie negativ werden können:

$$\det(\underline{\underline{A}}) \geq 0 \quad \rightsquigarrow \; \overline{\gamma^2}\;\overline{\varphi^2} - \left(\overline{\varphi\gamma}\right)^2 \geq 0 \; . \tag{15}$$

Physikalisch läßt sich die Schwartzsche Ungleichung dadurch erklären, daß zwei unterschiedliche, statistisch fluktuierende Größen φ und γ in ihrem Verhalten vollkommen korreliert sind, wenn sie sich statistisch gleich verhalten. Die Entwicklung der beiden Größen ließe sich in diesem Falle, in dem das zweite statistische Moment der beiden Größen maximal wäre, beispielsweise durch dieselbe Fourierreihe darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_c \cos\left(n\pi t\right) + \alpha_s \sin\left(n\pi t\right) \; , \\ \gamma &= \zeta \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_c \cos\left(n\pi t\right) + \alpha_s \sin\left(n\pi t\right) \; , \\ &\rightsquigarrow \left(\varphi\gamma\right)^2 = \left(\varphi\varphi\right) \quad \left(\gamma\gamma\right) \; . \end{aligned} \tag{16}$$

Eine allgemeinere Formulierung der Schwartzschen Ungleichung, welche die Korrelation zwischen einem Skalar und einem Vektor beschreibt, ergibt sich aus:

$$\left[\overline{\varphi_i\varphi_j}\;\overline{\gamma^2} - \left(\overline{\varphi_i\gamma}\right)\left(\overline{\varphi_j\gamma}\right)\right] \;\geq\; 0 \, . \tag{17}$$

Insbesondere leitet man von (17) exemplarisch folgende, häufig verwendete Aussagen ab:

$$\overline{uv}\;\overline{\theta^2} - \left(\overline{u\theta}\right)\left(\overline{v\theta}\right) \geq 0 \, ,$$

$$
\begin{aligned}
\overline{u^2}\;\overline{\theta^2} - \left(\overline{u\theta}\right)^2 &\geq 0\,, \\
\overline{v^2}\;\overline{u^2} - \left(\overline{uv}\right)^2 &\geq 0\,, \\
\overline{w^2}\;\overline{uv} - \left(\overline{uw}\right)\left(\overline{vw}\right) &\geq 0\,.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Die Gewährleistung plausibler Stress-Strain Beziehungen mit Hilfe des Wirbelzähigkeitsprinzips (3) verlangt die Konsistenz der modellierten Reynolds-Spannungen zum Realizability-Prinzip (12,13,17). Die Anwendung der Restriktion (13) auf das Beispiel der einfachen zweidimensionalen Scherschicht (4,8) ergibt sofort:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9} &\geq (c_\mu S_{12} T_t)^2\,, \qquad \text{oder} \\
c_\mu &\leq \frac{1}{3 S_{12} T_t}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Mit Hilfe der skalierten dimensionslosen zweiten Invarianten S des Strain-Rate Tensors S_{ij}

$$
S := T_t \sqrt{2 S_{kk}^2}, \qquad \text{mit} \quad 2\,S_{kk}^2 = 2\,S_{ki} S_{ik} = (S^*)^2 \tag{20}
$$

gelingt im hier untersuchten Musterbeispiel (1) eine kompaktere Darstellung der Realizability-Bedingung (13)

$$
c_\mu \leq \frac{1}{1.5\;S} \quad . \tag{21}
$$

Die zuletzt notierte Beziehung beweist, daß eine konsistente Modellierung der Reynolds-Spannungen mit Hilfe des Wirbelzähigkeitsprinzips nur für einen nicht konstante Koeffizienten c_μ gelingt. In Verbindung mit dem Standardwert $c_\mu = 0.09$ wird die Approximation (8) mit steigendem Scherparameter $S \geq 7.4$ beliebig falsch.

3.2 Realizability-Analyse

Die allgemeingültige Untersuchung des Realizability-Prinzips empfiehlt zunächst die Definition eines spurfreien Strain-Rate Tensors $\tilde{S}_{ij}$

$$
\tilde{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \qquad \rightsquigarrow \quad \tilde{S}_{kk} = 0\,. \tag{22}
$$

Im Sinne der Allgemeingültigkeit ist eine Betrachtung auf der Basis des Hauptachsensystems der Distorsion $\tilde{S}_{ij}$ hilfreich. Für einen beliebigen symmetrischen Tensor zweiter Stufe besitzt die Säkulargleichung

$$
\det\left(\tilde{S}_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}\right) = 0 \tag{23}
$$

drei reelle Lösungen λ_k (k=1,2,3). Den drei Eigenwerten λ_k sind drei paarweise orthogonale Eigenvektoren zugeordnet. Wählt man die Eigenvektoren als Basisvektoren, kann $\tilde{S}_{ij}$ durch eine Hauptachsentransformation auf Diagonalgestalt gebracht werden

$$
\tilde{S}_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{24}
$$

wobei wegen der Spurfreiheit des Deviators $\underline{\underline{\tilde{S}}}$ zusätzlich

$$
\tilde{S}_{kk} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{25}
$$

gilt. Sortiert man die Eigenwerte nach der Größe ihres Betrags, z.B. $|\lambda_1| > |\lambda_2|; |\lambda_3|$, so ergibt sich unter der Voraussetzung nicht-trivialer Situationen $\lambda_1 \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 + \lambda_3 = -\lambda_1 \qquad \rightarrow \lambda_2 &= -0.5(a+1)\lambda_1 \qquad \text{und} \\
\lambda_3 &= -0.5(a-1)\lambda_1\,, \quad -1 \leq a \leq 1
\end{aligned} \tag{26}
$$

Damit läßt sich (24) wie folgt notieren ($S_{11}^* = \lambda_1$):

$$
\tilde{S}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-a}{2} \end{pmatrix} S_{11}^*, \tag{27}
$$

Hierin stellen $S_{11}*$ die Primärdistorsionsgeschwindigkeit im Hauptachsensystem und a einen Parameter zur Beschreibung der Abweichung vom zweidimensionalen Distorsionszustand dar.

Die im Folgenden verwendeten Invarianten von $\tilde{S}_{ij}$ lassen sich ebenfalls auf der Basis der Primärdistorsion des Hauptachsensystems und a darstellen:

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_{kk}^2 &= (S_{11}^*)^2 \left(1.5 + 0.5\;a^2\right)\,, \\
\tilde{S}_{kk}^3 &= \tilde{S}_{ki}\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{jk} = \left(1 - 0.25(1+3a^2)\right)(S_{11}^*)^3\,, \\
\rightsquigarrow S &= T_t\sqrt{2\tilde{S}_{kk}^2} = T_t\,|S_{11}^*|\sqrt{3+a^2}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\rightsquigarrow \Psi := \sqrt{48}\;\frac{\tilde{S}_{kk}^3}{\left(\sqrt{2\tilde{S}_{kk}^2}\right)^3} = +/-\;\sqrt{48}\;\frac{1-0.25(1+3a^2)}{(3+a^2)^{1.5}} \quad \rightarrow \;\Psi \in [-1,1]\,. \tag{28}
$$

Der Schiefen–Parameter Ψ dient im weiteren Verlauf der Diskussion als Sensor zur Erkennung und Adaption an lokal dreidimensionale Zustände. Man beachte das die Definition des dimensionslosen *Scherparameters* S gemäß (28) derjenigen aus (20) vorzuziehen ist.

Durch den linearen Zusammenhang zwischen $\tilde{S}_{\alpha\beta}$ und $\overline{u_\alpha u_\beta}$ müssen die Eigenrichtungen der beiden Tensoren übereinstimmen. Die Gestalt des Reynolds-Spannungstensors ändert sich daher beim Übergang in das Hauptachsensystem von $\tilde{S}_{ij}$ in ähnlicher Weise wie die des Strain-Rate Tensors. Notiert man die Reynolds-Spannungen mit Hilfe des linearen Wirbelzähigkeitsprinzips (3) für (27), so ergeben sich lediglich für die Normalspannungskomponenten von Null verschiedene Werte. Hieraus folgt eine zentrale Eigenschaft linearer EVM:

Die Schwartzsche Ungleichung (13) ist für lineare Wirbelzähigkeitsmodelle durch die Gewährleistung positiver Normalspannungsanteile (12) automatisch befriedigt.

Die folgenden Überlegungen konzentrieren sich daher auf die Forderung (12). Hierzu werden die drei relevanten Grenzfälle des Strain-Rate Tensors im Hauptachsensystem (27) untersucht (Abbildung 2):

- zweidimensionale Distorsion: $a^2 = 1$ und $S^*_{11} > 0$,
- achsensymmetrische Kontraktion: $a = 0$ und $S^*_{11} > 0$,
- achsensymmetrische Expansion: $a = 0$ und $S^*_{11} < 0$.

Abbildung 2: Illustration von zweidimensionaler Distorsion (links) und achsensymmetrischer Kontraktion (rechts).

3.2.1 Zweidimensionale Distorsion

Die Betrachtungen beschränken sich auf die Gewährleistung einer positiven Normalspannungskomponente $\overline{u_1 u_1}$ gemäß (12) für $a^2 = 1$ und $S^*_{11} > 0$. Eine analoge Aussage läßt sich für den nicht diskutierten Fall $\overline{u_3 u_3}$ und $S^*_{11} < 0$ machen.

Die Auswertung des EVM (3) für dieses Beispiel liefert

$$\frac{\overline{u_1 u_1}}{2k} = \frac{1}{3} - c_\mu T_t |S^*_{11}| = \frac{1}{3} - c_\mu \frac{S}{\sqrt{3+1}} \ . \tag{29}$$

Die Normalspannung $\overline{u_1 u_1}$ ist genau dann immer positiv, wenn

$$c_\mu \leq \frac{1}{1.5\ S} \ . \tag{30}$$

Das Realizability-Prinzip wäre beispielsweise durch einen Ansatz der Form

$$c_\mu = \frac{1}{A_0 + A_{1(2D)} S} \ , \qquad \text{mit} \quad A_{1\ (2D)} = 1.5 \quad \text{und} \quad A_0 > 0 \, , \tag{31}$$

befriedigt. Von besonderem Interesse ist die Betrachtung des Grenzwerts $\lim S \to \infty$. Der durch steigende Werte von S^*_{11} beschriebene Wirbelstreckungsmechanismus sollte eine anhaltende Schwächung der Normalspannung $\overline{u_1 u_1}$ bewirken, ohne jedoch negative Werte zu erreichen. Hieraus folgt, daß im Grenzfall $\lim S \to \infty$ sowohl die Normalspannung $\overline{u_1 u_1}$ selbst, als auch ihre Ableitung nach dem dimensionslosen Scherparameter S gerade verschwinden:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_1 u_1}}{2k} &> 0 \qquad \text{für} \quad S < \infty \, , \\ \lim_{S\to\infty} \frac{\overline{u_1 u_1}}{2k} &= 0 \, , \\ \lim_{S\to\infty} \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\overline{u_1 u_1}}{2k}\right) &= 0 \, . \end{aligned} \tag{32}$$

Letzteres bedeutet, daß für verschwindende Werte der Normalspannung $\overline{u_1 u_1}$ mit variierendem Scherparameter keinerlei Tendenz zur Annahme negativer $\overline{u_1 u_1}$-Werte besteht. Setzt man dieses Gedankenspiel fort, so ergibt sich die sogenannte *strenge Realizability-Beziehung,* nach der die erste von Null verschiedene Ableitung der Normalspannung nach dem dimensionslosen Scherparameter positiv sein muß, damit das Modell niemals zu negativen Normalspannungwerten strebt. Durch Einsetzen von (31) in (29) überprüft man leicht:

$$\overset{(31)}{\lim_{S\to\infty}} c_\mu = \frac{2}{3} S \, , \qquad \leadsto \overset{(29)}{\lim_{S\to\infty}} \frac{\overline{u_1 u_1}}{2k} = \overset{(29)}{\lim_{S\to\infty}} \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\overline{u_1 u_1}}{2k}\right) = 0 \ . \tag{33}$$

3.2.2 Achsensymmetrische Kontraktion

Die Betrachtungen beschränken sich wiederum auf die Gewährleistung einer positiven Normalspannungskomponente $\overline{u_1 u_1}$ gemäß (12) für $a^2 = 0$ und $S^*_{11} > 0$. Die verbleibenden Normalspannungen sind für diesen Fall trivialerweise stets positiv.

Die Auswertung des EVM (3) für dieses Beispiel liefert

$$\frac{\overline{u_1 u_1}}{2k} = \frac{1}{3} - c_\mu T_t |S^*_{11}| = \frac{1}{3} - c_\mu \frac{S}{\sqrt{3}} \ . \tag{34}$$

Die Normalspannung $\overline{u_1 u_1}$ ist genau dann immer positiv, wenn

$$c_\mu \leq \frac{1}{\sqrt{3}\ S} \ . \tag{35}$$

Das Realizability-Prinzip wäre in diesem Falle beispielsweise durch einen Ansatz der Form

$$c_\mu = \frac{1}{A_0 + A_{1(AK)} S} \ , \qquad \text{mit} \quad A_{1\ (AK)} = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad A_0 > 0 \tag{36}$$

befriedigt.

3.2.3 Achsensymmetrische Expansion

Die Betrachtungen beschränken sich abweichend von den oben gemachten Ausführungen auf die Gewähleistung positiver Normalspannungskomponenten $\overline{u_2u_2} = \overline{u_3u_3}$ gemäß (12) für $a^2 = 0$ und $S^*_{11} < 0$. Die verbleibende Normalspannung $\overline{u_1u_1}$ ist in diesem Fall stets positiv.

Die Auswertung des EVM (3) für dieses Beispiel liefert

$$\frac{\overline{u_2u_2}}{2k} = \frac{\overline{u_3u_3}}{2k} = \frac{1}{3} - \frac{c_\mu}{2} T_t |S^*_{11}| = \frac{1}{3} - c_\mu \frac{S}{2\sqrt{3}} \,. \tag{37}$$

Die Normalspannungen $\overline{u_2u_2} = \overline{u_3u_3}$ sind genau dann immer positiv, wenn

$$c_\mu \leq \frac{2}{\sqrt{3}\, S} \,. \tag{38}$$

Das Realizability-Prinzip wäre somit beispielsweise durch einen Ansatz der Form

$$c_\mu = \frac{1}{A_0 + A_{1(AE)} S} \,, \qquad \text{mit} \quad A_{1\,(AE)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad A_0 > 0 \tag{39}$$

befriedigt.

3.2.4 Parametrisierung des Anisotropiekoeffezienten c_μ

Die oben angestellten Überlegungen belegen die Unzulänglichkeiten linearer Wirbelzähigkeitsmodelle (3) bei der Wiedergabe komplexer Interaktionsmechanismen zwischen verschiedenen, vom Gleichgewichtszustand abweichenden Distorsionsgeschwindigkeiten, und den dazugehörigen Reynolds-Spannungen. Zur Gewährleistung plausibler linearer Stress-Strain Beziehungen (3) für stark variierende Scherraten S empfiehlt sich eine zu den Zwangsbedingungen (31, 36, 39) konsistente Formulierung. Dies gelingt unter Verwendung der in (28) definierten Invariantenfunktion Ψ mit dem Ansatz von Shih et al. (1995):

$$A_1 := \gamma \cos\left[\xi \cos^{-1}(\Psi)\right] \,. \tag{40}$$

Die hierin benutzten Hilfsgrößen γ und ξ bestimmen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
{}^{(36)} \rightsquigarrow A_{1\,(AK)} &= \gamma \cos\left[\xi \cos^{-1}(1)\right] = \sqrt{3} &&\rightarrow \gamma = \sqrt{3} \\
{}^{(31)} \rightsquigarrow A_{1\,(2D)} &= \sqrt{3}\cos\left[\xi \cos^{-1}(0)\right] = 1.5 &&\rightarrow \xi = \frac{1}{3} \\
{}^{(39)} \rightsquigarrow A_{1\,(AE)} &= \sqrt{3}\cos\left[\frac{1}{3}\cos^{-1}(-1)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} &&\rightarrow \text{o.k.}
\end{aligned} \tag{41}$$

Die Bestimmung des letzten freien Parameters A_0 geschieht empirisch. Eine analytische Bestimmung dieses Koeffizienten gelingt nicht, da sich der damit korrespondierende Grenzwert $\lim S \to 0$ einer analytischen Betrachtung verschließt. Der Vergleich mit

expliziten algebraischen Spannungsmodellen empfiehlt Werte im Bereich von $8 < A_0 < 3$. Betrachtet man zur Kalibirierung von A_0 exemplarisch das bereits im zweiten Kapitel diskutierte Beispiel einer ebenen Kanal- oder Grenzschichtströmung, für das der Wert von $c_\mu\,(S = 3.3)$ im logarithmischen Bereich etwa 0.09 beträgt, so ergibt sich:

$$0.09^{-1} = A_0 + 1.5 \cdot 3.3 \qquad \rightsquigarrow A_0 = 6 \,. \tag{42}$$

Hiermit ergibt sich schließlich:

$$c_\mu = \frac{1}{6 + A_1\, S} \qquad A_1 = \sqrt{3}\cos\left[\frac{1}{3}\cos^{-1}(\Psi)\right] \,. \tag{43}$$

Der dem Koeffizienten A_0 in (42) zugewiesene Wert kann durch Anwendung von c_μ auf ebene homogene Scherschichten bei stationärer Turbulenz validiert werden. In diesem Beispiel sollten für $S = 6$ ein Anisotropiekoeffizient c_μ im Bereich von 0.055 berechnet werden, was tendenziell dem in (43) berechneten Wert entspricht. Weitere Verbesserungen der Formulierung (43) ergeben sich aus der expliziten Betrachtung rein rotatorischer Anteile im nächsten Kapitel.
Zum Abschluß dieses Abschnitts sei darauf hingewiesen, daß der dimensionslose Scherparameter $S = T_t\sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$ im Rahmen von Null- und Eingleichungsmodellen in der Regel kein eigener Freiheitsgrad, sondern vielmehr eine Konstante ist. Bei der Parameterreduktion von T_t geht man beispielsweise häufig von der Annahme

$$T_t = \frac{3.3}{\sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}} \tag{44}$$

aus. In solchen Fällen gelingt eine Anpassung des linearen Wirbelzähigkeitsmodells an das Realizability-Prinzip natürlich nicht mehr. Ursache für dieses Problem ist die Entwicklung der Parameterreduktion aus der Annahme des lokalen Gleichgewichts von Produktion (P) und Dissipation (ε):

$$\frac{P}{\varepsilon} := 1 \quad \rightsquigarrow \quad 2\; c_\mu\; T_t^2 S_{ij} S_{ij} = 1 \,. \tag{45}$$

3.3 Time-scale Realizability

Neben dem oben diskutierten Realizability-Prinzip zur Gewährleistung plausibler Reynolds-Spannungen existiert eine weitere Realizability-Beziehung, welche unter dem Namen *time-scale Realizability* bekannt ist (Durbin 1991). Diese Beziehung besagt, daß das turbulente Zeitmaß nie unterhalb des Zeitmaßes der viskosen Dissipation (das sog. Kolmogorov Zeitmaß) liegen darf. Da die höchste Frequenz ($\sim T_t^{-1}$) im Turbulenzenergiespektrum die viskose Dissipation repräsentiert, leuchtet die o.a. Restriktion physikalisch unmittelbar ein:

$$T_t = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, \alpha\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right) \qquad \text{Durbin (1991)}: \ \alpha \approx 6 \,. \tag{46}$$

Die Beachtung der time-scale Realizability ist, im Gegensatz zur Realizability der Reynolds-Spannungen, von untergeordneter Bedeutung für die Simulationsqualitität. Der Einfluss der Beziehung (46) beschränkt sich für gewöhnlich auf die Transportgleichung der Dissipation von Turbulenzenergie (Jones und Launder 1972):

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} - D_\varepsilon = P_\varepsilon - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{T_t}\,. \tag{47}$$

Im Falle von $P_\varepsilon = T_t^{-1} C_{\varepsilon 1} P$ spielt die time-scale Realizability auch für den Produktionsterm in (47) ein Rolle. Da das viskose Zeitmaß $\sqrt{\nu/\varepsilon}$ meist klein gegenüber (k/ε) ist, läßt es sich in guter Näherung in den Koeffizienten $C_{\varepsilon 2}$ des viskosen Vernichtungsterms absorbieren:

$$\begin{aligned} T_t^{-1} &= \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)\left[\frac{1}{\max\left(1, \alpha\sqrt{\frac{c_\mu \nu}{\nu_t}}\right)}\right] \approx \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)\left[\frac{1}{1+\alpha\sqrt{\frac{c_\mu \nu}{\nu_t}}}\right] \\ \rightsquigarrow \quad C_{\varepsilon 2} &\rightarrow C_{\varepsilon 2}\left[\frac{1}{1+\alpha\sqrt{\frac{c_\mu \nu}{\nu_t}}}\right]\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Die time-scale Realizability stabilisiert in der Regel die numerische Approximation, da sie in natürlicher Weise singuläre Werte vermeidet.

3.4 Invarianten des Reynolds-Spannungsanisotropietensors

Im Rahmen der Invariantentheorie und des Realizability-Prinzips findet man in der Literatur häufig kompaktere Darstellungen der Zusammenhänge, die jedoch wesentlich abstrakter sind. Kompakte Darstellungen verwenden bevorzugt spurfreie, dimensionslose Tensoren. Die Invarianten ihrer Tensorkoordinaten sind dementsprechend günstigerweise auch dimensionslos, was die funktionale Verknüpfung mit den Koeffizienten des Turbulenzmodells erleichtert. Zudem besitzen spurfreie Tensoren nur zwei unabhängige Invarianten. Das wichtigste Beispiel ist der *Reynolds-Spannungsanisotropietensor* b_{ij}. Dieser spurlose und dimensionslose symmetrische Tensor charakterisiert die Abweichungen der Reynolds-Spannungen vom kugelsymmetrischen Zustand:

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,. \tag{49}$$

Der Anisotropietensor besitzt ähnliche Eigenschaften wie der spurlose Distorsionsbeitrag des Deformationsgeschwindigkeitentensor $\tilde{S}_{ij}$. Die beiden Tensoren sind bei isotroper Wirbelzähigkeitsmodellierung (3) linear miteinander verknüpft:

$$b_{ij} = -c_\mu T_t \tilde{S}_{ij}\,. \tag{50}$$

Auch für den Anisotropietensor besitzt die Säkulargleichung

$$\begin{aligned} \det\left(b_{ij} - \xi_k \delta_{ij}\right) &= 0 \\ &= \xi_k^3 - I_b \xi_k^2 + II_b \xi_k - III_b = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

drei reelle Lösungen ξ_k (k=1,2,3). Die in (51) verwendeten skalaren Ausdrücke I_b,II_b und III_b sind die Invarianten des Tensors b_{ij}, deren Definition unmittelbar aus der Säkulargleichung folgt:

$$\begin{aligned} I_b = &\quad b_{kk} &&= tr\{\underline{\underline{b}}\} \\ II_b = &\quad \tfrac{1}{2}\left(b_{kk}b_{mm} - b_{km}b_{mk}\right) &&= \frac{1}{2}\left(tr^2\{\underline{\underline{b}}\} - tr^2\{\underline{\underline{b}}^2\}\right) \\ III_b = &\quad \det\left(b_{ij}\right) &&= \frac{1}{6}\left(b_{kk}b_{mm}b_{nn} - 3b_{kk}b_{mn}b_{nm} + 2b_{km}b_{mn}b_{nk}\right) \\ & &&= \frac{1}{6}\left(tr^3\{\underline{\underline{b}}\} - 3tr\{\underline{\underline{b}}\}tr\{\underline{\underline{b}}^2\} + 2tr\{\underline{\underline{b}}^3\}\right)\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Die erste Invariante I_b verschwindet aufgrund der Spurfreiheit von b_{ij}. Den drei Eigenwerten ξ_k sind wiederum drei paarweise orthogonale Eigenvektoren zugeordnet. Wählt man die Eigenvektoren als Basisvektoren, dann kann b_{ij} ebenfalls durch eine Hauptachsentransformation auf Diagonalgestalt gebracht werden:

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}\,. \tag{53}$$

Von Interesse ist die Darstellung der Invarianten im Hauptachsensystem von b_{ij}:

$$I_b = \quad b_{kk} \quad = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\,, \tag{54}$$

$$II_b = \quad -\tfrac{1}{2}\left(b_{km}b_{mk}\right) \quad = \left(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1\right)\,, \tag{55}$$

$$III_b = \quad \tfrac{1}{3}\left(b_{km}b_{mn}b_{nk}\right) \quad = \xi_1\xi_2\xi_3\,. \tag{56}$$

Wie man leicht überprüfen kann gilt für die Spurelemente des Anisotropietensors:

$$\frac{2}{3} \geq b_{\alpha\alpha} \geq -\frac{1}{3} \qquad \to \quad \frac{2}{3} \geq \xi_k \geq -\frac{1}{3}\,. \tag{57}$$

Das Realizability-Prinzip legt die Grenzen möglicher Reynolds-Spannungszustände präzise fest. Diese Grenzen lassen sich auf der Basis signifikanter Extrema der beiden Hauptinvarianten II_b und III_b im Hauptachsensystem diskutieren:

- Zwei-Komponenten Turbulenz: $\xi_3 = -1/3\,,$
- achsensymmetrische Turbulenz: $1/6 \leq \xi_2 = \xi_3 \geq -1/3\,.$

Für achsensymmetrische Turbulenz empfiehlt sich die Unterscheidung nach $\xi_2, \xi_3 \geq 0$ und $\xi_2, \xi_3 \leq 0$. Die Bereichsgrenzen bilden in der Invariantenkarte (Abbildung 3) die Kanten eines Dreiecks.

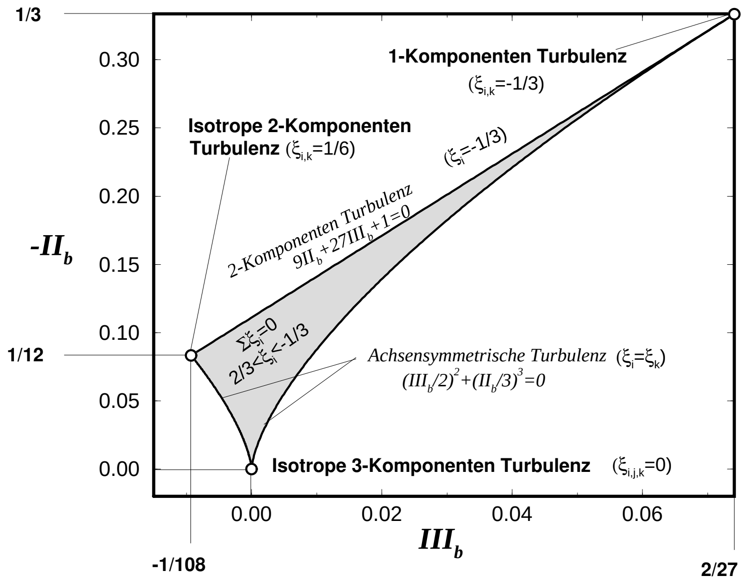


Abbildung 3: Invariantenkarte des Anisotropietensors der Reynolds-Spannungen.

Die Eckpunkte des Dreiecks werden durch folgende ausgezeichnete Punkte markiert:

- Ein-Komponenten Turbulenz: $\xi_2 = \xi_3 = -1/3\,, \quad \xi_1 = 2/3\,,$
- Zwei-Komponenten Isotropie: $\xi_2 = \xi_3 = 1/6\,, \quad \xi_1 = -1/3\,,$
- Drei-Komponenten Isotropie: $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0\,.$

Das Realizability-Prinzip erlaubt nur Zustände innerhalb des Dreiecks oder entlang seiner Kanten. Im Folgenden soll der Verlauf der Bereichgrenzen erläutert werden:

1) Im Falle der ebenen oder Zwei-Komponenten Turbulenz $\overline{u_i u_3} = 0$ lautet die Säkulargleichung (51):

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{3} - \xi_k\right)\left[(b_{11} - \xi_k)\,(b_{22} - \xi_k) - b_{12}\right] = 0 \\ &\rightsquigarrow \ \text{z.B.}: \ \xi_3 = -\frac{1}{3} \quad \overset{(54)}{\rightarrow} \xi_1 = \frac{1}{3} - \xi_2\,. \end{aligned} \tag{58}$$

Die Hauptinvarianten bestimmen sich in diesem Falle zu

$$II_b = -\left(\xi_2^2 + \frac{1}{9} - \frac{\xi_2}{3}\right) \qquad III_b = \frac{\xi_2}{3}\left(\xi_2 - \frac{1}{3}\right)\,. \tag{59}$$

Die Linearkombination der Hauptinvarianten repräsentiert eine Geradengleichung

$$II_b + 3III_b = -\frac{1}{9} \tag{60}$$

in der $III_b/-II_b$ Ebene. Die Endpunkte dieser Geraden ergeben sich aus zwei spezifischen Zuständen zweifach entarteter Eigenwerte. Der erste Endpunkt repräsentiert den Zustand der Ein-Komponenten Turbulenz:

$$1-\text{C Turbulenz}: \ \ \xi_2 = \xi_3 = -\frac{1}{3} \qquad \rightsquigarrow III_b = \frac{2}{27}\,, \quad II_b = -\frac{1}{3}\,, \tag{61}$$

der zweite Eckpunkt den Zustand isotroper zweidimensionaler Turbulenz:

$$2-\text{C Isotropie}: \ \ \xi_2 = \xi_3 = \frac{1}{6} \qquad \rightsquigarrow III_b = \frac{-1}{108}\,, \quad II_b = -\frac{1}{12}\,. \tag{62}$$

2) Achsensymmetrische Turbulenz ist durch denn allgemeinen Zustand zweifach entarteter Eigenwerte gekennzeichnet:

$$\text{achsensym. Turbulenz}: \ \ \xi_2 = \xi_3 \qquad \overset{(54)}{\rightarrow} \quad \xi_1 = -2\xi_2\,. \tag{63}$$

Hiervon ergibt sich die Verknüpfung der beiden von Null verschiedenen Hauptinvarianten als kubische Beziehung:

$$II_b = -3\xi_2^2\,, \qquad III_b = -2\xi_2^3 \qquad \rightarrow \left(\frac{III_b}{2}\right)^2 + \left(\frac{II_b}{3}\right)^3 = 0. \tag{64}$$

Isotrope dreidimensionale Turbulenz liegt im Falle dreifach entarteter Eigenwerte vor:

$$3-\text{C Isotropie}: \ \ \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \qquad \rightsquigarrow III_b = 0\,, \quad II_b = 0\,. \tag{65}$$

4 Strukturelle Defizite isotroper Modelle

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit strukturellen Defiziten isotroper EVM. Die Ausführungen knüpfen an die anfänglich geschilderte Eigenart linearer Wirbelzähigkeitsmodelle einfachen Scherströmungen a priori isotrope Normalspannungszustände zuzuordnen an:

Im Falle isotroper Normalspannungszustände sollten die Schubspannungskomponenten aus Konsistenzgründen verschwinden,

andererseits sollten schubspannungsbehaftete Zustände mit Normalspannungsanisotropie verbunden sein.

Im bereits mehrfach zitierten Fall der ebenen Scherströmung wird diese Restriktion vom linearen Wirbelzähigkeitsansatz nur durch die triviale Lösung $S_{12} = 0$ befriedigt. Die Anomalie ist signifikant für eine Vielzahl ähnlich gelagerter Defizite der statistischen Turbulenzmodellierung. Ein weiteres Beispiel ist die Kolmogorov-Hypothese von der lokalen Isotropie kleinskaliger Bewegungen bei hinreichend großen Reynoldszahlen (Rotta 1972), welche die Verwendung eines isotropen Dissipationsratentensors $\varepsilon_{ij} = 2/3\,\delta_{ij}\,\varepsilon$ in den Modellgleichungen motiviert. Durbin und Speziale (1991) konnten anhand der exakten Transportgleichung für ε_{ij} in homogener, inkompressibler Turbulenz nachweisen, daß die isotrope Darstellung des Dissipationsratentensors ebenfalls nur im trivialen Fall verschwindender Deformationsgeschwindigkeiten korrekt ist.

Die Problematik scherverträglicher Normalspannungsisotropie belegt einen strukturellen Defekt (expliziter) isotroper EVM. Dieser läßt sich unmittelbar aus der Definition der isotropen Wirbelzähigkeit ergründen

$$\nu_t(k, T_t, \underline{\underline{b}}, \underline{\nabla} U) \quad = \quad -k\,\frac{b_{\alpha\beta}}{\tilde{S}_{\alpha\beta}} \ . \qquad (66)$$

Hiernach ist die Wirbelzähigkeit eine Funktion des mittleren Geschwindigkeitsfeldes und des Turbulenzfeldes, letzteres in Form von sowohl isotropen (k) als auch anisotropen (b_{ij}) Beiträgen. Eine allgemeingültige Modellierung der isotropen Wirbelzähigkeit verlangt folglich neben der Berücksichtigung geeignet gewählter Normen des Distorsionsfeldes und isotropen Turbulenzgrößen auch die Einarbeitung des Anisotropiezustands der Reynolds–Spannungen.

Die skalare Wirbelzähigkeit hängt möglicherweise von anderen Skalaren des Systems ab. Eine Identifikation solcher Abhängigkeiten kann sowohl aus plausiblen physikalischen Überlegungen (z.B. dem Realizability–Prinzip) als auch aus einer formalen mathematischen Prozedur gewonnen werden. Die formale Prozedur ist als *Darstellungs–* oder *Invariantentheorie* bekannt und soll im Folgenden kurz erläutert werden. Die Darstellungtheorie wird vor allem im Zusammenhang mit der Herleitung *expliziter algebraischer Spannungsmodelle* (EASM), deren einfachste Form das lineare Wirbelzähigkeitsmodell ist, verwendet.

4.1 Darstellungstheorie

Die Koeffizienten eines Turbulenzmodells sind dimensionslose Skalare und somit unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Diese Anforderung wird nicht nur von Konstanten sondern auch von allen aus den Tensorkoordinaten abgeleiteten Skalaren erfüllt. Die Darstellungs- oder Invariantentheorie versucht die an der Parametrisierung der Koeffizienten beteiligten Skalare einzugrenzen.

Einen ersten Überblick über die Vielzahl möglicher Einflussparameter zur Bestimmung des Anisotropiekoeffizienten c_μ erhält man aus der dimensionslosen Darstellung des Wirbelzähigkeitsansatzes (66)

$$-c_\mu s_{ij} \quad = \quad b_{ij} \qquad \text{mit} \qquad s_{ij} = T_t \tilde{S}_{ij}\,, \quad w_{ij} = T_t (W_{ij} - e_{ijk}\Omega_k)\ , \qquad (67)$$

in der e_{ijk} den Permutationstensor und Ω_k eine evt. Rotation des Bezugssystems gegen ein Inertialsystem kennzeichnet. Eine unmittelbare Bestimmung des Koeffizienten c_μ aus der tensorwertigen Gleichung (67) gelingt nicht. Es lassen sich jedoch durch entsprechende Überschiebungen, z.B. $-c_\mu s_{ii}^2 = b_{ij} s_{ji}$ (mit $s_{ij}^2 = s_{ik} s_{kj}$), mögliche Abhängigkeiten erkennen. Da die Beziehung der isotropen Wirbelzähigkeit aus dem allgemeingültigeren anisotropen Wirbelzähigkeitsansatz (6) folgt, hängt c_μ zumindest von den Skalaren, welche sich aus den Tensoren s_{ij}, w_{ij} und b_{ij} bilden lassen, ab. Hierzu zählen unter anderen

$$c_\mu(s_{ii}^2, b_{ii}^2, w_{ii}^2, s_{ij}b_{ij}, s_{ik}^2 b_{ki}, b_{ik}^2 s_{ki}, b_{ij} w_{ji}^2, s_{ij} w_{ji}^2, s_{ii}^3, b_{ii}^3, s_{ik}^2 b_{ki}^2, s_{ik}^2 w_{ki}^2, \ldots)\ . \qquad (68)$$

Als weitere Einflussparameter kommen in voll–turbulenten Bereichen vor allem der Anisotropietensor der Dissipationsrate $\varepsilon_{ij}/\varepsilon - 2/3\,\delta_{ij}$ oder ein zweites Zeitmaß in Betracht. Daneben treten in wandnahen low–Re Bereichen weitere skalare Parameter (z.B. $Re_t = k\,T_t/\nu$) in Erscheinung. Die Beispiele belegen die Komplexität einer allgemeingültigen Bestimmung von c_μ als Funktion der linear unabhängigen Skalare der Gleichung (67).

Funktions– und Integritätsbasen

Grundsätzlich besteht anfangs das Problem der Formulierung einer *Relevanzliste* in der man sich auf die zulässigen Einflussgrößen verständigt

$$b_{ij} = b_{ij}(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, a_i, b_i, \ldots) \quad . \qquad (69)$$

Die Zusammensetzung der Relevanzliste basiert auf physikalischen Überlegungen. Mit Hilfe der Darstellungstheorie gelingt die Formulierung von sog. *Generatoren,* die den konkreten Aufbau der Polynomglieder in einer *Funktionsbasis* (69) beschreiben, z.B.

$$
\begin{aligned}
b_{ij} &= b_{ij}(s_{ij}, w_{ij}) = \sum_n a_n T_{ij}^{(n)} \\
&= a_1 s_{ij} + a_2 \underbrace{(s_{ik}w_{kj} - w_{ik}s_{kj})}_{\text{2. Generator}} + a_3 \underbrace{(s_{ij}^2 - \delta_{ij}(s_{kk}^2)/3)}_{\text{3. Generator}} \\
&\quad + a_4 \underbrace{(w_{ij}^2 - \delta_{ij}(w_{kk}^2)/3)}_{\text{4. Generator}} + a_5 \underbrace{(s_{ik}^2 w_{kj} - w_{ik}s_{kj}^2)}_{\text{5. Generator}} \quad + \ \ldots
\end{aligned} \tag{70}
$$

Im Zentrum der Formulierung von Funktionsbasen steht der *Satz von Spencer* (1959). Dieser beschreibt die Funktionsbasis $T_{ij}^{(1)} \ldots T_{ij}^{(n)}$ nach *Grad* und *Extension.* Hierbei bezeichnet der Grad eines Matrixpolynoms die maximal mögliche Anzahl von Skalarmultiplikationen zur Bildung eines Generators, und die Extension (Vielfachheit) die höchste Anzahl der Beteiligungen eines Elements aus der Relevanzliste an einem Generator:

> *Jedes Matrixprodukt aus R 3×3 Matrizen (Elementen der Relevanzliste) kann als Matrixpolynom mit der Extension $\leq R+1$ und dem Grad $\leq G$ ausgedrückt werden. Der Grad des Polynoms wird durch den Umfang der Relevanzliste bestimmt. Für $R = 1$ gilt $G = 2$ und für alle $R \geq 2$ findet man $G = \max(5, R+2)$.*

Ein Beweis gelingt mit Hilfe des verallgemeinerten Caley–Hamilton Theorems (Anhang B). Für $R = 1$ folgt der Satz von Spencer unmittelbar aus der ursprünglichen Form des Caley–Hamilton Theorems

$$
A_{ij}^3 = A_{kk}\, A_{ij}^2 - 0.5(A_{kk}A_{ll} - A_{kk}^2)A_{ij} + (\det[A_{ij}])\, \delta_{ij} \ . \tag{71}
$$

Neben der Bestimmung der Generatoren stellt sich die Frage nach der Spezifikation der Koeffizienten $a_1 \ldots a_n$. Leider vermag die Darstellungstheorie ohne zusätzliche Zwangsbedingungen keine präzisen Angaben über die Gestalt der Koeffizienten zu machen. Die Koeffizienten können Funktionen aller möglichen linear unabhängigen *(irreduziblen)* skalaren Kombinationen η_i von Tensorkoordinaten der Generatoren sein. Die Menge der Kombinationen $\eta_1 \ldots \eta_k$ nennt man *Integritätsbasis,* die einzelnen Elemente *Invarianten.*

4.2 Anisotrope Wirbelzähigkeitsmodelle

Die im Rahmen der Ingenieurwissenschaften allgemeinste statistische Modellbildung basiert auf Transportgleichungen für Reynolds–Spannungen. Diese verknüpfen in ihrer einfachsten Form die Tensoren b_{ij}, s_{ij}, und w_{ij} (vgl. Kapitel 4). Für die Entwicklung allgemein anisotroper Wirbelzähigkeitsmodelle ist $b_{ij} = b_{ij}(s_{ij}, w_{ij})$ folglich ein sehr wichtiges Beispiel. Hierfür findet man nach Spencer eine Funktionsbasis vom Grade 5

und der Vielfachheit 3, welche zunächst auf 62 zu berücksichtigende spurfreie Generatoren führt. Zu einer kompakteren Darstellung auf der Basis von 16 Generatoren gelangt man mit Hilfe des Caley–Hamilton Theorems. Abschließende Symmetriebedingungen reduzieren die Funktionsbasis formal auf 10 Generatoren (Gatski und Speziale 1993; Lübcke und Rung 1999):

$$
\begin{array}{ll}
T_{ij}^{(1)} = s_{ij} & T_{ij}^{(2)} = s_{ik}w_{kj} - w_{ik}s_{kj} \\
T_{ij}^{(3)} = s_{ij}^2 - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\, s_{kk}^2 & T_{ij}^{(4)} = w_{ij}^2 - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\, w_{kk}^2 \\
T_{ij}^{(5)} = s_{ik}^2 w_{kj} - w_{ik}s_{kj}^2 & T_{ij}^{(6)} = w_{ik}^2 s_{kj} + s_{ik}w_{kj}^2 - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\, s_{kl}w_{lk}^2 \\
T_{ij}^{(7)} = w_{ik}^2 s_{kl}w_{lj} - w_{ik}s_{kl}w_{lj}^2 & T_{ij}^{(8)} = s_{ik}^2 w_{kl}s_{lj} - s_{ik}w_{kl}s_{lj}^2 \\
T_{ij}^{(9)} = w_{ik}^2 s_{kj}^2 + s_{ik}^2 w_{kj}^2 - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\, s_{kl}^2 w_{lk}^2 & T_{ij}^{(10)} = w_{ik}^2 s_{kl}^2 w_{lj} - w_{ik}s_{kl}^2 w_{lj}^2 \ .
\end{array} \tag{72}
$$

Die Integritätsbasis setzt sich in diesem Falle aus fünf irreduziblen Invarianten zusammen

$$
\eta_1 = s_{ii}^2 \ , \qquad \eta_2 = w_{ii}^2 \ , \qquad \eta_3 = s_{ii}^3 \ , \qquad \eta_4 = s_{ik}w_{ki}^2 \ , \qquad \eta_5 = s_{ik}^2 w_{ki}^2 \ . \tag{73}
$$

Aufgrund der Tatsache, daß b_{ij} nur fünf linear unabhängige Elemente – zwei Normalspannungs- und drei Schubspannungskomponenten – besitzt, gelingt eine weitere Reduktion der Funktionsbasis auf fünf Genratoren, z.B. die in Glg. (70) angegebene Form (Lübcke und Rung 1999). Dabei ist zu beachten, daß die Zusammensetzung der minimalen Funtionsbasis nicht eindeutig ist und die jeweils gewählte Basis in bestimmten pathologischen Strömungssituationen linear abhängige Generatoren aufweisen kann (Jongen und Gatski 1998). Ein weiterer Nachteil der minimalen Basis ist, daß im Zuge der Reduktion überzähliger Generatoren eine aufwendig zu berechnende höhere irreduzible Invariante

$$
\eta_6 \ = \ s_{ij}w_{jk}s_{kl}^2 w_{li}^2 \ , \qquad \text{mit} \quad \tilde{\eta}_1 = 0.5\eta_1 \ , \ \tilde{\eta}_2 = 0.5\eta_2 \ , \ \tilde{\eta}_3 = \eta_3/3 \qquad \text{und}
$$

$$
\begin{aligned}
(\eta_6)^2 \ = \ & (\tilde{\eta}_2)^3[4(\tilde{\eta}_1)^3 + (\tilde{\eta}_3)^2] + 4\tilde{\eta}_1(\tilde{\eta}_2)^2[\tilde{\eta}_3\eta_4 - 2\tilde{\eta}_1\eta_5] + \tilde{\eta}_1(\eta_4)^2[\eta_5 - \tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2] \\
& +5(\eta_5)^2\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 - 3\eta_4\eta_5\tilde{\eta}_2\tilde{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3(\eta_4)^3 - (\eta_5)^3
\end{aligned}
$$

auftritt, die lediglich betragsmäßig durch die fünf irreduziblen Invarianten substituiert werden kann (Lund und Novikov 1992). Unabhängig davon ist eine reduzierte Basis mit weniger als fünf Generatoren das adequate Mittel ingenieurtechnischer Berechnungen. Das es sich bei Ansätzen der Form (70) um anisotrope Wirbelzähigkeitsansätze handelt, erkennt man beispielsweise an der Identität

$$
\begin{aligned}
b_{ij} &= \underbrace{a_1 s_{ij}}_{\text{isotroper Anteil}} + a_2(s_{ik}w_{kj} - w_{ik}s_{kj}) + a_3(s_{ij}^2 - \delta_{ij}(s_{kk}^2)/3) \\
&= \underbrace{\left[a_1\delta_{ik}\delta_{jl} + a_2\,(\delta_{il}w_{kj} - w_{ik}\delta_{jl}) + a_3\left(s_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}s_{kl}\right)\right]}_{\text{anisotrope Wirbelzähigkeit} \qquad 2\,\nu_{ijkl}\,(kT_t)^{-1}} \ s_{kl} \qquad .
\end{aligned} \tag{74}
$$

Eine detailliertere Einführung in die Technik findet man z.B. bei Gatski und Speziale (1993), Jongen und Gatski (1998) oder Lübcke und Rung (1999).

Anwendungsbereich und Gültigkeitsrestriktionen

Bei der Anwendung und Beurteilung von Stress–Strain Beziehungen muß zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Approximationstechniken und den damit verbundenen Einschränkungen unterschieden werden:

- Durch die Festlegung der Relevanzliste trifft man eine einschränkende Auswahl der berücksichtigten physikalischen Effekte. Dies betrifft gleichermaßen die Integritäts– und die Funktionsbasis und daher sämtliche Koordinaten von b_{ij}.

- Die Vernachlässigung hochgradig nichtlinearer Glieder einer Funktionsbasis beinhaltet sicherlich auch die Vernachlässigung physikalischer Phänomene, ist jedoch nicht unbedingt in der gleichen Weise restriktiv wie die Vernachlässigung bestimmter Einflussgrößen in der Relevanzliste. Da die Generatoren oftmals mit der Modellierung spezifischer Koordinaten von b_{ij} assoziiert werden können, betrifft die Änderung der Funktionsbasis nicht alle Koordinaten gleichermaßen.

Der entscheidende Unterschied liegt im Umfang der berücksichtigten Integritätsbasis. Häufig können einzelne physikalische Mechanismen an bestimmte Invarianten gekoppelt werden und erhalten damit Einzug in den Modellierungsprozess. Die wichtigsten Kopplungsaussagen lauten:

– Nichtgleichgewichts–Effekte lassen sich durch das Deformationsmaß $\eta_1 = s^2_{ii}$ quantifizieren,

– Abweichungen vom zweidimensionalen Deformationszustand werden durch die Invariante $\eta_3 = s^3_{ii}$ beschrieben,

– Krümmungseffekte sind mit der zweiten Invarianten des Wirbeltensors $\eta_2 = w^2_{ii}$ verknüpft.

Die nichtlineare Stress–Strain Beziehung (70) läßt sich als Reihenentwicklung, deren Glieder mit steigender Nichtlinearität an Bedeutung verlieren, auffassen. Die Koeffizienten der dominanten Terme hängen jedoch in der Regel nicht ausschließlich von den Invariaten der schwach nichtlinearen Generatoren ab, wie die Realizability–Untersuchung zeigte ($c_\mu(\eta_1, \eta_3)$). Zur Verdeutlichung dienen die folgenden drei Beispiele.

A) zweidimensionale Betrachtung

Beschränkt man seine Betrachtungen auf zweidimensionale mittlere Geschwindigkeitsfelder dann verschwinden zwei der drei Schubspannungskomponenten von b_{ij} und es verbleiben lediglich drei linear unabhängige b_{ij} Elemente. Analog reduziert sich die Funktionsbasis (70) auf drei linear unabhängige Generatoren und die Integritätsbasis

auf zwei irreduzible Invarianten ($\eta_3 = \eta_4 = 0$ und $\eta_5 = 0.5\eta_1\eta_2$; Gatski und Speziale 1993)

$$b_{ij} = -c_\mu \left[s_{ij} + \beta_2 (s_{ik} w_{kj} - w_{ik} s_{kj}) - \beta_3 (s^2_{ik} - 1/3\, \delta_{ij} s^2_{kk}) \right] \quad ,$$
$$c_\mu, \beta_2, \beta_3 = f(\eta_1, \eta_2) \ . \tag{75}$$

Eine Unterscheidung zwischen zwei– und dreidimensionalen Deformationszuständen ist selbst bei näherungsweise einachsiger Scherung durch die Vernachlässigung von η_3 kaum mehr möglich. Die Invariante η_3 kann aber z.B. zur Vermeidung der bekannten *'round–to–plane jet anomaly'* gemäß (40) von Bedeutung sein. Eine bessere Vorhersagefähigkeit unterbestimmter Funktionsbasen ist bei formal nicht reduzierten Integritätsbasen zu erwarten. Dies gilt insbesondere für dreidimensionale Zustände (Jongen und Gatski 1998).

B) ein– und zweiachsige Scherung

Für das wichtige Beispiel einer einachsigen ebenen Scherung mit $S_{12} = W_{12} = 0.5\, S^*$ verdeutlicht die quadratische Stress–Strain Beziehung (75) unmittelbar die oben erwähnte Entkopplung von Generatoren und b_{ij}–Koordinaten

$$b_{12} = -0.5 c_\mu S \ , \quad b_{11} = 0.5 c_\mu S^2 \left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{6} \right) \ , \quad b_{22} = -0.5 c_\mu S^2 \left(\beta_2 - \frac{\beta_3}{6} \right) \ . \tag{76}$$

Die Verwendung quadratischer Wirbelzähigkeitsmodelle vermag offenkundig die Anomalie scherverträglicher Normalspannungsisotropie zu vermeiden. Gleichzeitig wird deutlich, daß eine quadratische Modellierung gegenüber dem linearen Ansatz keine Vorteile in Bezug auf die Darstellung turbulenter Schubspannungen besitzt. Druckinduzierte Strömungsablösung wird daher vom linearen und quadratischen Ansatz gleichermaßen gut oder schlecht vorhergesagt.
Die Berücksichtigung kubischer Terme wäre mit einer Korrektur der Schubspannungsverteilung im Falle gekrümmter (zweiachsiger) Scherströmungen verbunden ohne nennenswerten Einfluss auf den Verlauf der Normalspannungen zu nehmen (Lübcke und Rung 1999). Die Stress–Strain Beziehung gliedert sich somit für Scherströmungen in einen normalspannungsbezogenen Anteil (gerade Potenzen) und einen schubspannungsbezogenen Anteil (ungerade Potenzen).

C) linearisierter Ansatz

Für den Ansatz $b_{ij} = b_{ij}(s_{ij})$ liefert die Darstellungstheorie unter Verwendung der Kontraktionsbedingung $b_{ii} = 0$ unmittelbar

$$b_{ij} = -c_\mu \left[s_{ij} + \beta (s^2_{ij} - 1/3\, \delta_{ij} s^2_{kk}) \right] \qquad \text{mit} \qquad c_\mu, \beta = f(\eta_1, \eta_3) \ . \tag{77}$$

Aufgrund der mangelhaften Relevanzliste bleiben Krümmungsmechanismen, welche von den Invarianten des Wirbeltensors getragen werden, hierin unberücksichtigt.

Lineare Wirbelzähigkeitsmodelle

Lineare Wirbelzähigkeitsansätze sind mathematisch betrachtet vierfach unterbestimmt und können deswegen prinzipiell nur eine Komponente des Anisotropietensors zufriedenstellend modellieren. Hiervon ausgenommen ist das unten diskutierte Beispiel der achsensymmetrischen Turbulenz, daß aufgrund der strukturellen Übereinstimmung von b_{ij} und s_{ij} durch einen impliziten linearen Ansatz exakt beschrieben wird.
Im Zusammenhang mit ingenieurstechnischen Anwendungen ist die Modellierung der mit der dominanten Komponente des Scherratentensors korrespondierenden Reynoldsschen Schubspannung das primäre Ziel. Die Verbesserung isotroper EVM widmet sich daher zielgerichtet der genaueren Modellierung dieser Schubspannung. Das lineare Wirbelzähigkeitsprinzip sollte hierzu nicht aus der Form $b_{ij}(s_{ij})$ entwickelt werden, sondern als führender Term einer weitergehenden Modellbildung $b_{ij}(s_{ij}, w_{ij}, \varepsilon_{ij}, \ldots)$ angesehen werden. Die Qualität der Modellbildung kann im Rahmen der o.g. Einschränkungen durch die möglichst umfangreiche Berücksichtigung aller Invarianten gezielt verbessert werden.

4.3 Achensymmetrische Turbulenz

Die statistisch achsensymmetrische Turbulenz ist nach dem isotropen Zustand der zweite strukturell einfache Grenzfall von besonderem Interesse. Die Voraussetzungen für achsensymmetrische Turbulenz sind weniger restriktiv als für kugelsymmetrische isotrope Zustände. Im Rahmen dieser Arbeit lohnt die gesonderte Betrachtung der statistisch achsensymmetrischen Turbulenz aufgrund der Tatsache, daß das lineare Wirbelzähigkeitsgesetz die Situation exakt beschreibt. Ursache hierfür ist die strukturelle Überstimmung von b_{ij} und $\tilde{S}_{ij}$ in einem achsensymmetrischen Deformationsfeld. Sowohl der Anisotropietensor der Reynolds-Spannungen b_{ij} als auch der Distorsionstensor $\tilde{S}_{ij}$ lassen sich durch den selben achsensymmetrischen Tensor zweiter Stufe beschreiben, welcher im oben skizzierten Hauptachsensystem die folgende Darstellung besitzt (Rotta 1972)

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ij} &= -(3\delta_{i1}\delta_{1j} - \delta_{ij})\ \frac{1}{2} S^*_{11} , \\ b_{ij} &= (3\delta_{i1}\delta_{1j} - \delta_{ij})\ A . \end{aligned} \tag{78}$$

Weiterhin lassen sich die höheren Invarianten b^3_{ii} und S^3_{ii} in gleicher Weise als Funktion der niedrigeren Skalare b^2_{ii} und S^2_{ii} darstellen (vgl. Glg. 28 und 64). Aus Gleichung (78) läßt sich auch ohne explizite Kenntnis des Hauptachsensystems eine exakte Wirbelzähigkeitsbeziehung formulieren

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S^{*2} = \tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{jk}\ \delta_{ik} &= \frac{3}{2} S^{*2}_{11} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\delta_{i1}\delta_{1j} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{S^*}\ \tilde{S}_{ij} , \\ II^*_b = b_{ij}b_{jk}\ \delta_{ik} = -2II_b &= 6\,A^2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{b_{ij} = -(\sqrt{2II^*_b}/S^*)\ \tilde{S}_{ij}} . \end{aligned} \tag{79}$$

Tabelle 1: Vergleich der berechneten Anisotropieparameter c_μ für zwei verschiedene lineare Modellierungstechniken in (homogenen) Scherströmungen mit direkten numerischen Simulationen von Kim et al. (1987) bzw. Rogers et al. (1986).

	DNS		Glg. (43)		Glg. (80)	
	$\sqrt{II^*_b}$	P/ε	c_μ	$P/\varepsilon = c_\mu S^2$	c_μ	$P/\varepsilon = c_\mu S^2$
DNS (S=3.3)	0.303	1.00	0.091	0.99	0.130	1.41
DNS (S=5.7)	0.351	1.85	0.069	2.23	0.087	2.83

Der Vergleich mit herkömmlichen Wirbelzähigkeitsmodellen ergibt die u.a. Definiton des Anisotropieparameters

$$c_\mu = \frac{\sqrt{2II^*_b}}{S} . \tag{80}$$

Die Besonderheiten achsensymmetrischer Turbulenz werden von der Darstellungstheorie wiedergegeben, da wahlweise $T^{(1)}_{ij}$ oder $T^{(3)}_{ij}$ in achsensymmetrischen Distorsionsfeldern als einzige linear unabhängige Generatoren verbleiben. Die Beziehung (80) degeneriert, in Kenntnis der darstellungstheoretischen Vollständigkeit eines linearen Ansatzes $b_{ij} = -c_\mu s_{ij}$, zu einem trivialen Äquivalent der Kontraktionsbedingung $b^2_{kk} = II^*_b$.

Die Beziehung (80) weist im Unterschied zu den vorstehend skizzierten Vorschlägen auf der Basis des Realizability–Prinzips die geforderte Abhängigkeit der Wirbelzähigkeit vom Anisotropiezustand der Reynolds–Spannungen auf. Die Wirbelzähigkeit verschwindet im Falle isotroper Spannungszustände und die Anomalie tritt formal nicht in Erscheinung. Für die praktische Anwendung ist die Formulierung (80) aus mehreren Gründen unzweckmäßig: (**A**) Gleichung (80) ist implizit und daher nur bedingt hilfreich; (**B**) die Gültigkeit von (80) beschränkt sich auf achsensymmetrische Zustände; (**C**) im wichtigen Fall der ebenen Scherströmungen findet man wegen $c_\mu S \approx 0.3$ eine etwa um den Faktor $\sqrt{2}$ zu hohe Wirbelzähigkeit (Tabelle 1). Abhilfe könnte eine semi-empirische Beziehung für den Transport des Anisotropieparameters II^*_b schaffen, welche jedoch die Komplexität des Modells steigert. Daneben ist eine heuristische Formulierung der Form

$$c_\mu = \frac{\sqrt{\phi\ II^*_b}}{S} , \qquad \phi = \max\left[2 - \left(\frac{-\eta_2}{\eta_1}\right)^\gamma , \Gamma\right] \tag{81}$$

denkbar. In Bezug auf die Simulation ebener Scherströmungen verbleibt prinzipiell aber das allen linearen Wirbelzähigkeitsmodellen anhaftende Problem nicht darstellbarer Normalspannungsanisotropie und die (damit verbundene) defizitäre Wiedergabe von Wanddämpfungsmechanismen. Eine verbesserte Modellierung verlangt entweder die Berücksichtigung einer weiteren Invariante (Wandämpfung durch b^3_{ii}) oder nichtlinearer Terme (75).

5 Modellierung rotatorischer Einflüsse

Eine der größten Herausforderungen der statistischen Turbulenzmodellierung ist die präzise Vorhersage von Turbulenz unter dem Einfluss von Stromlinienkrümmung und Systemrotation. Krümmungseffekte treten mit zunehmender Abweichung des Drehgeschwindigkeitstensors W_{ij} vom Distorsionsanteil des Deformationsgeschwindigkeitentensors $\tilde{S}_{ij}$ auf. Sie haben einen überproportional großen Einfluss auf die Entwicklung der turbulenten Schubspannung und der Turbulenzenergie. Im Anschluß an die oben diskutierten Invariantenbeziehungen befaßt sich der folgende Abschnitt mit der phänomenologischen Erweiterung der Integritätsbasis um η_2.

5.1 Phänomenologie

Experimentelle Untersuchungen (Bradshaw 1973; Muck et al. 1985a; Muck et al. 1985b) zeigen, daß die Entwicklungen der Reynoldsschen Schubspannung und der Normalspannungsanisotropie deutlich von der Stomlinienkrümmung abhängen. Das wesentliche Merkmal von Krümmungseffekten ist die Modifikation des Produktionsmechanismus. Notiert man die Produktionsterme einzelner Reynoldspannungen für das hier bereits oft zitierte Beispiel der inkompressiblen, zweidimensionalen Scherströmung (1)

$$P_{\overline{u^2}} = -2\overline{uv}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \qquad P_{\overline{v^2}} = -2\overline{uv}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \tag{82}$$

$$P_{\overline{uv}} = -\left(\overline{u^2}\frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v^2}\frac{\partial U}{\partial y}\right) \qquad P = -\overline{uv}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) ,$$

dann wird deutlich, daß für das Beispiel eines rotationsbehafteten Starrkörperwirbels

$$\underline{U} = \alpha\left(y\underline{e}_x - x\underline{e}_y\right) , \tag{83}$$

im Falle anfänglich isotroper Turbulenz zunächst die Produktion von Turbulenzenergie und turbulenter Schubspannung, und in der Folge (mit bertragsmäßig sinkenden Schubspannungen) auch die restlichen Produktionsterme verschwinden.

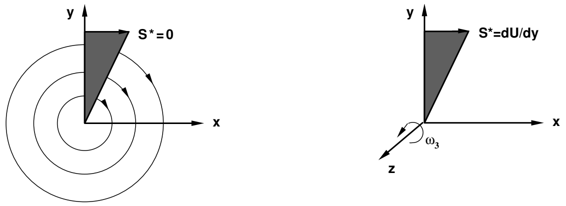


Abbildung 4: Starrkörperwirbel (links) und rotierende homogene Scherströmung (rechts).

Die Überlagerung von Systemrotation kann analog zur Stromlinienkrümmung Turbulenz anfachen oder dämpfen. Im angeführten Beispiel (83) denke man sich z.B an Stelle des Starrkörperwirbels die, ebenfalls in Abbildung 4 dargestellte homogene Scherströmung $\underline{U} = \alpha y \underline{e}_x$, in einem um die $\underline{e}_z$-Achse rotierenden Bezugssystem.

Das Geschwindigkeitsgradientenfeld läßt sich, wie in (1) gezeigt, in einen symmetrischen S_{ij} und antimetrischen (rein rotatorischen) Anteil W_{ij} zerlegen. Der Einfluss des antimetrischen Wirbeltensors auf die Konstitutivgleichung des Wirbelzähigkeitsprinzips (3) ist aus materialtheoretischem Blickwinkel zunächst unverständlich. Das Prinzip der materiellen Objektivität (Beobachterindifferenz) verbietet die Berücksichtigung antimetrischer Anteile des Geschwindigkeitsgradiententensors zur Modellierung von Materialverhalten: Warum sollten die formänderungsfreien W_{ij} Anteile der Geschwindigkeitsgradienten Materiallasten ($\rightarrow$ Reynolds-Spannungen $\overline{u_i u_j}$) verursachen? Die Reynolds-Spannungen sind im eigentlichen Sinne keine Materialspannungen, sondern das zweite statistische Moment des konvektiven Terms der Bewegungsgleichungen. Der Wert der Reynolds-Spannungen bestimmt sich folglich auch nicht aus einer objektiven Materialeigenschaft, sondern aus dem Bewegungszustand (Speziale 1989). Die Bewegungsgleichungen sind in diesem Sinne nicht objektiv. Beim Übergang in ein beschleunigtes Bezugssystem sind bekanntlich gerade deswegen Scheinkräfte (z.B. Corioliskräfte) einzuführen, um zu gewährleisten, daß weiterhin dieselben Materialeigenschaften zu beobachten sind. Als Untermenge der konvektiven Terme partizipieren die Reynolds-Spannungen von diesen Scheinkräften. Sie genügen darüber hinaus eigenen, nicht-objektiven Bewegungsgleichungen. Ihre Modellierung orientiert sich daher nicht an den Konstruktionsprinzipien thermomechanischer Materialien, sondern an der korrekten Darstellung der Bewegungsgleichungen. Mit Hilfe der Darstellungstheorie gelingt die Herleitung der Reynolds-Spannungen, als im allgemeinen nicht-lineare Funktion (5) des Deformationsgeschwindigkeiten- und Wirbeltensors, aus den Bewegungsgleichungen. Die darin auftretenden rotatorischen Terme beschreiben nicht-objektive Einflussparameter, die symmetrischen Terme beschreiben die objektiven Einflussparameter.

Die Erfahrung zeigt, daß sich symmetrische und antimetrische Anteile in verschiedener Weise auf die Entwicklung der Reynolds-Spannungen auswirken. Die Beachtung rein rotatorischer Anteile ist im Zusammenhang mit linearen Stress-Strain Beziehungen (3) nur auf der Basis der Invarianten des Wirbeltensors W_{ij}, z.B. der dimensionslosen zweiten Invarianten

$$\Omega = T_t \sqrt{2 W_{ij} W_{ij}} \tag{84}$$

möglich, weil der Tensor selber aufgrund seiner antimetrischen Eigenschaft keine geeignete Basis zur Modellierung der symmetrischen Reynolds-Spannungen darstellt. Betrachtet man das bereits mehrfach zitierte Beispiel einer zweidimensionalen Grenzschicht- oder Kanalströmung, dann erübrigt sich eine getrennte Betrachtung antimetrischer Anteile, weil in diesem Falle $S = \Omega$ gilt.
Einen ersten Hinweis zur Modellierung antimetrischer Einflüsse im Rahmen linearer Wirbelzähigkeitsmodelle erhält man durch die Analyse der in Abbildung 5 skizzierten Strömung über eine ebene, rückwärtsspringende Stufe. Üblicherweise werden

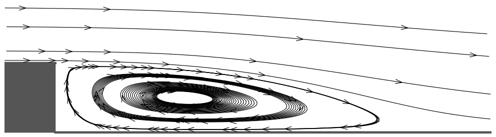
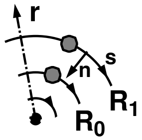


Abbildung 5: Stromlinien in der Umgebung des Stufensprungs einer turbulenten, rückwärtsspringenden Stufenströmung ($\mathrm{Re}_{\mathrm{step}}$=37 500).

die Strömungsverhältnisse im Rezirkulationsgebiet von den Wirbelzähigkeitsmodellen falsch wiedergegeben, weswegen die Ablöselänge zu kurz berechnet wird. Ausschlaggebend hierfür ist eine Überschätzung der turbulenten Schubspannung im Bereich stark positiv gekrümmter Stromlinien. Im Grenzfall extrem positiver Stromlinienkrümmung – man stelle sich diesbezüglich etwa den o.a. Starrkörperwirbel Wirbel (83) vor – verschwindet die dominante Strain-Rate Komponente S_{12}. Der Scherparameter S wird dadurch stark geschwächt, gleichzeitig steigen die Komponenten des Wirbeltensors mit anwachsender negativer Krümmung. Das Verhältnis von Ω/S ist somit ein geeigneter Indikator für Intensität und Charakter der Stromlinienkrümmung:

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega}{S} &= 1 \qquad \rightarrow \text{ keine Stromlinienkrümmung}\,,\\
\frac{\Omega}{S} &< 1 \qquad \rightarrow \text{ positive Stromlinienkrümmung}\,,\\
\frac{\Omega}{S} &> 1 \qquad \rightarrow \text{ negative Stromlinienkrümmung}\,.
\end{aligned}$$

Allgemein läßt sich sagen, daß positive Stromlinienkrümmung Turbulenz anfacht, wohingegen negative Stromlinienkrümmung Turbulenz schwächt. Hierbei sei die Krümmung negativ, wenn die Geschwindigkeit mit dem Radius zunimmt. Ein besseres Verständnis von der Wechselwirkung zwischen Turbulenz und Krümmung vermittelt die vergleichende Betrachtung von Starrkörper– (negative/stabilisierende Krümmung) und Potentialwirbel (positive/destabilisierende Krümmung). Beide in Abbildung 6 skizzierten Wirbeltypen werden vom Gleichgewicht zwischen Druck- und Trägheitskräften beherrscht:



$$\rho\frac{U_s^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \qquad \text{(radiale Druckgleichung)}\,. \tag{85}$$

Die Strömung ist stabil, wenn ein Fluidelement nach seiner Versetzung (z.B. durch eine turbulente Fluktuation) vom Ausgangsradius $r = R_0$ auf einen Radius $r = R_1$ durch

den in R_1 wirkende Druckgradienten wieder auf seinen Ausgangsradius zurückgedrängt wird. Der in R_1 wirkende Druckgradient $\partial p/\partial r$ muß in einer stabilen Konfiguration somit bei einer Versetzung nach Aussen ($R_1 > R_0$) zunehmen ($\rightarrow$ Starrkörperwirbel) und bei einer Versetzung nach Innen abnehmen. Analog verhält es sich bei einer radiusfesten Störung der Umfangsgeschwindigkeit U_s. Eine lokale Übergeschwindigkeit verursacht eine Verdrängung des Fluids nach Aussen, eine lokale Untergeschwindigkeit initiiert eine entgegengesetzte Bewegung.

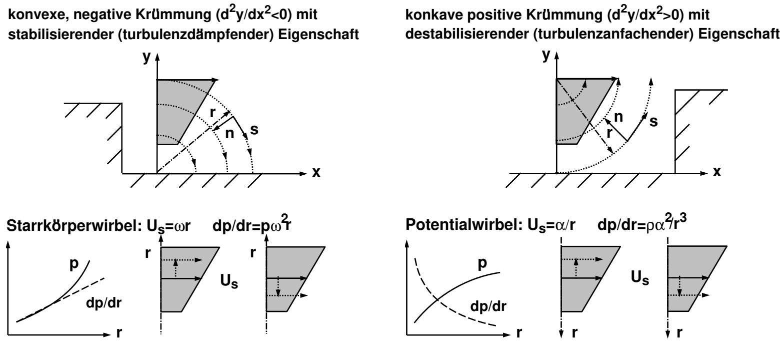


Abbildung 6: Erläuterung von Krümmungsmechanismen durch Starrkörper- bzw. Potentialwirbelmodelle.

Trägt man die Geschwindigkeitsstörungen für beide Wirbeltypen anhand von Abbildung 6 auf, so wird deutlich daß sich diese im Falle des Starrkörperwirbels in die homogene Schichtung integrieren lassen. Demgegenüber wird der Aufbau des freien Wirbels durch eine Geschwindigkeitsfluktuation gestört, weswegen Gebiete positive Stromlinienkrümmung prinzipiel instabil, bzw. turbulenzanfachend sind.
Zur besseren Berücksichtigung rein rotatorischer Anteile empfiehlt sich die Modifikation von c_μ in (31). Dazu wird der Anisotropieparameter in geeigneter Weise zusätzlich nach der zweiten Invarianten Ω des Wirbeltensors W_{ij} parametrisiert:

$$c_\mu = \frac{1}{A_0 + A_1\sqrt{A_2 S^2 + A_3\Omega^2}}\,. \tag{86}$$

Die Komponenten des Wirbeltensors W_{ij} verschwinden keineswegs automatisch nach Transformation in das Hauptachsensystem von $\tilde{S}_{ij}$. Die oben erarbeiteten Realizability-Restriktionen gelten aber weiterhin unverändert. In Bezug auf die Gewährleistung des Realizability-Prinzips genügt die Betrachtung von Zuständen $\Omega = 0$ im Ansatz (86). Zusätzliche Beiträge aus $\Omega \neq 0$ wirken sich im Sinne der Ungleichung positiv auf die Konsistenz zum Realizability-Prinzip aus.

Für zweidimensionale Scherströmungen ohne Stromlinienkrümmung ($S = \Omega$) sollte kein Unterschied zwischen (86) und (31) bestehen, weswegen

$$A_2 + A_3 = 1 \tag{87}$$

folgt. Eine Empfehlung für die Wichtung der Einflüsse von S und Ω in (86) ist schwer zu geben. Im Folgenden werden exemplarisch zwei Alternativen vorgestellt, von denen die erste den naheliegenden Ansatz gleichgewichtiger Einflüsse von S und Ω verfolgt, die zweite durch Betonung des Einflusses antimetrischer Anteile leichte Vorteile in Hinblick auf starkes Nichtgleichgewicht verspricht.

5.1.1 Variante 1: gleichgewichtige Berücksichtigung von S und Ω

Ausgangspunkt der Variante 1 ist die gleichartige Gewichtung der Einflüsse von S und Ω in (86):

$$A_2 = A_3 = 0.5\,. \tag{88}$$

Die Realizability-Analyse bezieht sich, wie bereits angesprochen, auf den hierfür ungünstigsten Fall $\Omega = 0$ in (86):

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_1\sqrt{0.5\;S^2}}\,. \tag{89}$$

Die vorstehend skizzierten Realizability-Bedingungen führen in Kombination mit dem Ansatz (40)

$$A_1 = \gamma \cos\left[\xi \cos^{-1}(\Psi)\right]$$

auf das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
{}^{(36)} \rightsquigarrow A_{1\;(AK)} &= \gamma \cos\left[\xi \cos^{-1}(1)\right] = \sqrt{\tfrac{3}{A_2}} &&= \sqrt{6} &&\to \gamma = \sqrt{6}\,,\\
{}^{(31)} \rightsquigarrow A_{1\;(2D)} &= \sqrt{6} \cos\left[\xi \cos^{-1}(0)\right] = \tfrac{3}{2\sqrt{A_2}} &&= \frac{3}{\sqrt{2}} &&\to \xi = \frac{1}{3}\,,\\
{}^{(39)} \rightsquigarrow A_{1\;(AE)} &= \sqrt{6} \cos\left[\tfrac{1}{3} \cos^{-1}(-1)\right] = \sqrt{\tfrac{3}{4\;A_2}} &&= \frac{\sqrt{6}}{2} &&\to \text{o.k.}
\end{aligned} \tag{90}$$

Kalibriert man abschließend A_0 wieder mittels $c_\mu\,(S = 3.3) = 0.09$, so ergibt sich:

$$0.09^{-1} = A_0 + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 3.3 \qquad \rightsquigarrow A_0 = 4\,. \tag{91}$$

Die gesuchte Formulierung des Anisotropieparamters lautet somit:

$$c_\mu = \frac{1}{4 + A_1\sqrt{0.5S^2 + 0.5\Omega^2}} \qquad A_1 = \sqrt{6} \cos\left[\frac{1}{3} \cos^{-1}(\Psi)\right]\,. \tag{92}$$

5.1.2 Variante 2: Betonung deformationsfreier Anteile

Ausgangspunkt der Variante 2 ist die Betonung der Einflüsse von Ω in (86):

$$A_2 = 0.2 \qquad A_3 = 0.8\,. \tag{93}$$

Die Realizability-Analyse bezieht sich wiederum auf den hierfür ungünstigsten Fall $\Omega = 0$ in (86):

$$c_\mu = \frac{1}{A_0 + A_1\sqrt{0.2\;S^2}}\,. \tag{94}$$

Die oben skizzierten Realizability-Bedingungen führen in Kombination mit dem Ansatz (40)

$$A_1 = \gamma \cos\left[\xi \cos^{-1}(\Psi)\right]$$

auf das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
{}^{(36)} \rightsquigarrow A_{1\;(AK)} &= \gamma \cos\left[\xi \cos^{-1}(1)\right] = \sqrt{\tfrac{3}{A_2}} &&= \sqrt{15} &&\to \gamma = \sqrt{15}\\
{}^{(31)} \rightsquigarrow A_{1\;(2D)} &= \sqrt{15} \cos\left[\xi \cos^{-1}(0)\right] = \tfrac{3}{2\sqrt{A_2}} &&= \frac{3}{\sqrt{0.8}} &&\to \xi = \frac{1}{3}\\
{}^{(39)} \rightsquigarrow A_{1\;(AE)} &= \sqrt{3} \cos\left[\tfrac{1}{3} \cos^{-1}(-1)\right] = \sqrt{\tfrac{3}{4\;A_2}} &&= \frac{\sqrt{15}}{2} &&\to \text{o.k.}
\end{aligned} \tag{95}$$

Kalibriert man abschließend A_0 wieder mittels $c_\mu\,(S = 3.3) = 0.09$, so ergibt sich:

$$0.09^{-1} = A_0 + \frac{3}{\sqrt{0.8}} \cdot 3.3 \qquad \rightsquigarrow A_0 = 0\,. \tag{96}$$

Die gesuchte Formulierung des Anisotropieparamters lautet somit beispielsweise:

$$c_\mu = \frac{1}{\mathrm{MAX}\left(4, A_1\sqrt{0.2S^2 + 0.8\Omega^2}\right)} \qquad A_1 = \sqrt{15} \cos\left[\frac{1}{3} \cos^{-1}(\Psi)\right]\,. \tag{97}$$

Der überwiegende Teil der Strömungen ist von lokal zweidimensionaler Strömungsstruktur mit schwacher Stromlinienkrümmung (Ψ=0). In diesem Fall ($\Omega = S$) besitzt die Formulierung (97) ähnliche Eigenschaften wie das sogenannte *Shear-Stress Transport* (SST) Modell von Menter (1994).

5.2 Rotationsfreie & winkeltreue Deformation

Der prinzipielle Nachteil einer starken Betonung der antimetrischen Einflüsse auf c_μ liegt in der unbefriedigenden Darstellung rotationfreier Deformationzustände. Besonders kritisch wird das Modellverhalten wenn die Deformationsgeschwindigkeiten zudem annähernd winkeltreu (scherfrei) sind:

$$S_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{für } \alpha \neq \beta\,. \tag{98}$$

Sämtliche Staupunktströmungen, wie z.B. Prallstrahlen oder Bereiche in der Nähe des Staupunkts von Tragflügelprofilen, gehören zu diesem Strömungstyp. Erfahrungsgemäß kommt es in diesen Situationen zu einer deutlichen Überschätzung der Produktion von Turbulenzenergie

$$P = 0.5 P_{kk} = -\overline{u_i u_k}\,(S_{ik} + W_{ik}) = -\overline{u_i u_k}\; S_{ik} = c_\mu k T_t (2 S_{kk}^2) \tag{99}$$

durch übliche Wirbelzähigkeitsmodelle, oftmals mit weitreichenden Konsequenzen für das gesamte Strömungsfeld. Die Überschätzung der Produktion von Turbulenzenergie im Staupunktbereich kann, wie exemplarisch in Abbildung 7 illustriert, zur extrem unrealistischen Vorhersage der aerodynamischen Güte von Tragflügel- oder Schaufelprofilen führen. Die lokalen Turbulenzspitzen im Nasenbereich der Profile werden dabei durch Konvektion den stromabliegenden auftriebserzeugenden Saugbereichen zugeführt. Sie bewirken dort infolge der unrealistisch hohen Turbulenzintensität eine deutliche Unterschätzung der Saugspitzen, bei gleichzeitig überschätzten Reibungswiderständen.
In jüngster Zeit sind diesbezüglich eine Reihe populärer Gegenmaßnahmen veröffentlicht worden (z.B. Kato und Launder (1993), Jin und Braza (1994)), die eine Manipulation der Produktion in (99) vorschlagen. Diese Manipulationen ersetzen S_{kk}^2 in (99) durch W_{kk}^2, was jedoch im Widerspruch zum Boussinesq-Ansatz (3) steht. Hierzu stelle man sich vor, der Reynolds-Spannungstensor wäre *antimetrisch.* Die Produktion von Turbulenzenergie

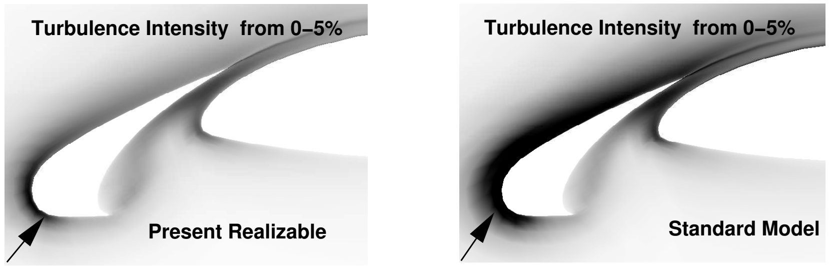


Abbildung 7: Umströmung von Mehrelemente-Tragflügelprofilen (Re=10^7, α=22^0, Ma=0.2): Vergleich der Turbulenzintensitäten im Vorflügelbereich ("present realizable" mit c_μ nach Glg. (92); "Standard Model" auf der Basis von $c_\mu = 0.09$).

ist bekanntermaßen als die halbe Spur des Produktionstensors der Reynolds-Spannungen definiert. Die Definition ergibt für die in Gleichung (100) durch einen * gekennzeichneten antimetrische Reynolds-Spannungstensoren die häufig verwendete Modifikation:

$$P^* = -\overline{u_i u_k}^*\,(S_{ik} + W_{ik}) = -\overline{u_i u_k}^*\; W_{ik}$$

Tabelle 2: Periodische Umströmung eines quadratischen Zylinders bei Re=22 000 (Exp.: Lyn et al. 1995; LES: Rodi et al. 1997). Vergleich der integralen Strömungsgrößen.

	C_d	$C_{d,rms}$	$C_{l,rms}$	St
Experiment	2.10	—	—	1.32
LES (Breuer)	2.30	0.14	1.15	1.30
realizable EVM	2.20	0.10	1.40	1.40

$$\text{mit}\quad \overline{u_i u_k}^* = -\overline{u_k u_i}^* \;\rightsquigarrow\; \overline{u_i u_k}^* = -2 c_\mu k T_t W_{ik}$$

$$\rightsquigarrow\; P^* = -c_\mu k T_t (2 W_{kk}^2)\ . \tag{100}$$

Offenbar gelangt man also zu der von vielen Autoren favorisierten wirbeltensorbasierten Darstellung der Produktion von Turbulenzenergie nur unter der falschen Vorraussetzung, daß die Reynolds-Spannungen durch einen antimetrischen Tensor repräsentiert werden.

Die Gewährleistung des Realizability-Prinzips durch den Ansatz (86) hilft im Falle von Prallstrahleffekten durch die darin verankerte umgekehrte Proportionalität des Anisotropiparameters c_μ –und damit auch der Produktion von Turbulenzenergie– zum dimensionslosen Scherparameter S. Die spezielle Formulierung (97) auf der Basis von $A_2 = 0.2$ ist für diesen Strömungstyp wegen des niedrigen Wertes für A_2 ungünstig. Offenkundig muß bei der Spezifikation von A_2 ein Kompromiß zwischen günstigen Shear-Stress Transport Eigenschaften und der Fähigkeit zur Beschreibung rotationsfreier Deformationszustände gemacht werden. An dieser Stelle sei betont, daß die oben vorgeschlagenen Varianten nur eine Richtlinie zur entgültig gewählten Formulierung sein sollen. Insbesondere ist die Gewährleistung der strengen Realizability-Beziehungen (32) weniger bedeutend. In diesem Sinne wäre z.B. $A_2 \approx 0.4$ und $\gamma \approx 3.0$ ein möglicher Kompromiß. Die Formulierung ist in diesem Fall trotz allem noch realizable, d.h. es können nie negative Normalspannungen auftreten. Die Darstellung von Nullzuständen unter rotationsfreier Distorsion $\lim S \to \infty$ ist jedoch nicht mehr möglich.

Die Formulierung plausibler Stress-Strain Beziehungen kann von großem Nutzen für die Berechnung periodischer Körperumströmungen, beispielsweise die in Abbildung 8 skizzierte zweidimensionale Zylinderumströmung (Lyn et al. 1995), sein. Vor allem bei der Umströmung stumpfer Körper kommt es im Rahmen herkömmlicher EVM zu der oben beschriebenen Überschätzung von Turbulenzenergieproduktion m Staupunktbereich stromauf des Körpers. Ohne zusätzliche ad-hoc Korrekturen, wie z.B. (100), prognostizieren herkömmliche EVM oftmals stationäre Strömungsverhältnisse ohne periodische Wirbelablösung.

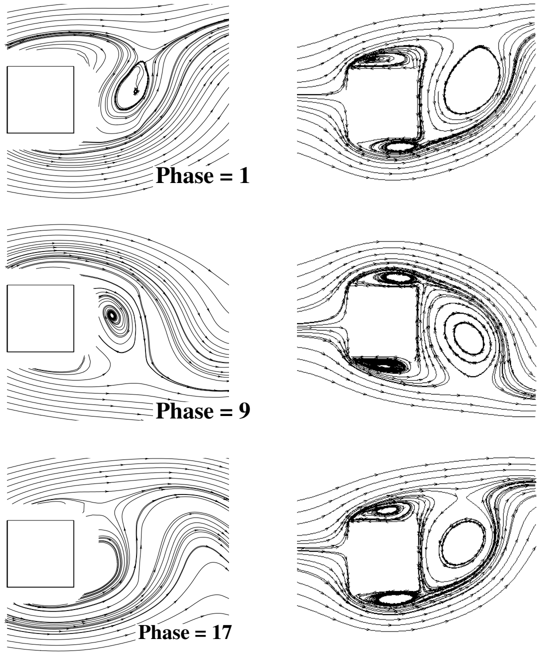


Abbildung 8: Periodische Umströmung eines quadratischen Zylinders bei Re=22 000 (Lyn et al., 1995); Vergleich der phasengemittelten Stromlinien: Linear realizable EVM (rechts) und Experiment (links).

In Folge der unzureichenden Darstellung von Prallstrahleffekten gelingt dann auch bei hinreichend großem Verhältnis von Grundströmungszeitmaß zu turbulentem Zeitmaß ($\mathrm{T}_{mean}/\mathrm{T}_t$) keine Auflösung der transienten Phänomene. Im Unterschied hierzu ist eine Formulierung auf der Basis des Realizability-Prinzips in der Lage zumindest die globalen ingenieurswissenschaftlichen Aspekte dieser Strömungen zu erfassen (Tabelle 2).

5.3 Rotierende Bezugssysteme

Die Problematik rotierender Bezugssysteme ist von großer praktischer Bedeutung für die Berechung von Strömungsmaschinen. Ungeachtet dessen, zeigen herkömmliche lineare Zweiparametermodelle keinerlei Reaktion auf den überlagernden Einfluss von Systemrotation. Demgegenüber verfügen Reynolds-Spannungsmodelle und nicht-lineare

Wirbelzähigkeitsmodelle (sofern es sich dabei um explizite algebraische Spannungsmodelle handelt), aufgrund der darin enthaltenen exakten Darstellung der Produktion individueller Spannungskomponenten, über die Fähigkeit Krümmungseinflüße a priori korrekt zu beschreiben. Im Falle von Systemrotation gilt dies allerdings nur unter der Einschränkung, daß man den Wirbeltensor um einen beobachterspezifischen Rotationsterm erweitert:

$$\hat{W}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \alpha\, \varepsilon_{ijk}\, \Omega_k\,. \tag{101}$$

Hierin repräsentiert $\underline{\Omega}$ eine beliebige Systemrotation relativ zum Inertialsystem.

Zur Erweiterung des linearen Zweiparametermodells auf Stömungen unter dem Einfluss von Systemrotation wird der antimetrische Anteil in (86) analog zu (101) modifiziert. Die Modifikation stützt sich auf das vorstehend genannte Beispiel einer ebenen homogenen Scherströmung unter dem Einfluss von Systemrotation:

$$S_{12} = 0.5\,\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \tilde{W}_{12} := 0.5\,\frac{\partial U}{\partial y} - \alpha\,\Omega_3 \qquad S^* = 2S_{12}\,. \tag{102}$$

Das Beispiel empfiehlt sich zur Kalibrierung des freien Parameters α in (102) wegen der zahlreich verfügbaren Vergleichsdaten. Neben den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse (Speziale, Abid und Blaisdell 1996) stehen auch Ergebnisse einer Grobstruktursimulation von Bardina, Ferziger und Reynolds (1983) vergleichend zur Verfügung. Die lineare Stabilitätstheorie sagt eine maximale Anfachung der Turbulenz für $\Omega_3/S^* = 0.25$ voraus. Der freie Parameter α wird daher so bestimmt, daß das lokale Maximum von $c_\mu([\Omega(\alpha)]^{-1})$ ($\to$ Minimum von Ω) in diesem Punkt auftritt:

$$\begin{aligned} T_t^{-1}\Omega = 4\,\tilde{W}_{12}\tilde{W}_{12} &= 4\,(W_{12} - \alpha\,\Omega_3)^2 \\ &= S^{*2} - 4\,S^*\alpha\,\Omega_3 + 4\,\alpha^2\,\Omega_3^2\,, \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \left(\frac{\partial(T_t^{-1}\Omega)}{\partial\alpha}\right)_{\min} = \left(8\,\alpha\,\Omega_3^2 - 4\,\Omega_3 S^*\right)_{\min} &= 0 \qquad \to \alpha_{\min} = \left(\frac{S^*}{2\,\Omega_3}\right)_{\min}, \\ \rightsquigarrow \left(\frac{S^*}{\Omega_3}\right)_{min} &= 4 \qquad \to \boxed{\alpha = 2}. \end{aligned} \tag{104}$$

Die Modifikation (104) von Ω bewirkt eine (die Strömung destabilisierende) Anfachung von Turbulenz im Bereich von

$$0 \le \frac{\Omega_3}{S^*} \le 0.5\,,$$

und steht damit in Einklang mit den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse. Nichtlineare Effekte erweitern jedoch erfahrungsgemäß den Instabilitätsbereich. Die Ergebnisse der Grobstruktursimulation zu den Anfangsbedingungen $\varepsilon_0/(S^* k_0)$=0.296 (Abbildung 9) sagen folglich, im Unterschied zur Modifikation auf der Basis von α=2, noch schwach destabilisierende Effekte aus Systemrotation oberhalb von Ω_3/S^*=0.5 voraus.

Das Reynolds gemittelte Ergebnis steht daher in geringfügigem Widerspruch zur Grobstruktursimulation. Eine Problematik des oben berechneten Wertes (α=2) ist die damit verbundene Richardsonzahlähnlichkeit von c_μ. Die Definition der Richardsonzahl

$$Ri = \frac{2\Omega_3}{S^*}\left[1 - \frac{2\Omega_3}{S^*}\right] \tag{105}$$

besagt die Ähnlichkeit der Zustände $\Omega_3/S^* = 0$ und $\Omega_3/S^* = 0.5$. Wie man leicht nachrechnen kann, besitzt die modifizierte Invariante $\tilde{W}_{ij}\tilde{W}_{ij}$ für $\alpha = 2$ eine ähnliche Symmetrie. Das frühzeitige Auftreten der Re-Stabilisierung (Dämpfung von Turbulenz) durch Systemrotation kann durch eine leichte Variation von α korrigiert werden:

$$\alpha = 2.25 \qquad \rightsquigarrow \tilde{W}_{ij} = W_{ij} - 2.25\,\varepsilon_{ijk}\,\Omega_k\,. \tag{106}$$

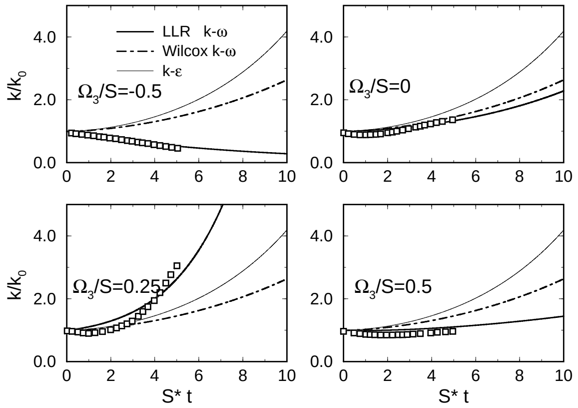


Abbildung 9: Homogene Scherströmung unter dem Einfluss von Systemrotation: Vergleich der Ergebnisse verschiedener Turbulenzmodelle (LLR: (92) & (106)) mit der Grobstruktursimulation von Bardina et al. (1983).

Abbildung 9 zeigt die hiermit erzielten Ergebnisse im Vergleich zu den Resultaten üblicher EVM (Jones und Launder 1972; Wilcox 1993) und der Grobstruktursimulation von Bardina et al. (1983).
Der in Gleichung (106) angegebene Parameterwert von α wird durch den Vergleich mit expliziten algebraischen Spannungmodellen bestätigt. Die Untersuchung des EASM in Hinblick auf die Konsistenz zu Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse rotierender homogener Scherschichten (Speziale, Abid und Blaisdell 1996) liefert auf analytischem Wege (Rung und Lübcke 1999)

$$\tilde{W}_{ij} = W_{ij} - \frac{C_4 - 4}{C_4 - 2}\,\epsilon_{ijk}\,\Omega_k\,, \qquad \text{mit} \qquad C_4 \approx 0.4\,.$$

5.3.1 Verdrallte Strömungen

Die Wirkung der Krümmungsmechanismen auf das Turbulenzfeld einer verdrallten Strömung geht am deutlichsten aus der Analyse der Produktions– und Konvektionsterme der Reynolds–Spannungen im Stromlinienkoordinatensystem hervor (Rung und Lübcke 1999). Die wichtigsten drallinduzierten Effekte lauten:

- Manipulation der Produktionsterme,
- ergänzende Konvektionsterme aus Rotation der Basisvektoren des Stromlinienkoordinatensystems.

Letztere repräsentieren die krümmungsmotivierten Coriolisbeschleunigungen, welche mit zunehmendem Drall verstärkt auftreten. Diese sind ihrem Charakter nach deviatorisch und dienen ausschließlich der Spannungsumverteilung. Da sie keinen Beitrag zur Entwicklung isotroper Größen, wie z.B. der Turbulenzenergie, leisten, ist ihre Behandlung im Rahmen isotroper Turbulenzmodelle besonders schwierig. Darüber hinaus verfügen Wirbelzähigkeitsmodelle formal über kein Instrument zur Wiedergabe von Transportmechanismen nichtisotroper Größen. Die adequate Berücksichtigung der Krümmungseinflüsse verlangt daher naturgemäß die Transportgleichungsmodellierung der einzelnen Reynolds–Spannungen.
Die konvektiven algebraischen Zusatzterme repräsentieren die wesentliche Fehlerquelle bei der Simulationen stark verdrallter Strömungen auf der Basis von ASM und EVM. Ausgehend von den Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodellen

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + C_{ij} - D_{ij} \approx \underbrace{2k\left(\frac{D\left(b_{ij}\,\underline{e}_i\,\underline{e}_j\right)}{Dt}\right)}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\left(b_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\,2\,(P - \varepsilon)}_{\text{Term 2}}\,.$$

gelangt man über eine algebraische Abschätzung der Differentialoperatoren (Term 1) zu den algebraischen Spannungsmodellen. Algebraische Spannungsmodelle, und damit auch alle linearen Wirbelzähigkeitsmodelle, basieren fast ausnahmslos auf der hypothetischen Annahme des *strukturellen Turbulenzgleichgewichts* in dem zugrunde liegenden – in der Regel kartesischen – Koordinatensystem

$$\frac{D\left(b_{ij}\,\underline{e}_i\,\underline{e}_j\right)}{Dt} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + U_k\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} \approx 0\,. \tag{107}$$

Wesentlich realistischer ist die Formulierung der Aussage (107) auf der Basis des Stromlinienkoordinatensystems $\underline{e}^{(s)}$ (Moser und Moin 1987)

$$\frac{\partial b_{ij}^{(s)}}{\partial t} + U_k\frac{\partial b_{ij}^{(s)}}{\partial x_k} \quad \approx \quad 0 \tag{108}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{D\left(b_{ij}\,\underline{e}_i\,\underline{e}_j\right)}{Dt} \quad = \quad \underbrace{\left(\frac{\partial b_{ij}^{(s)}}{\partial t} + U_k\frac{\partial b_{ij}^{(s)}}{\partial x_k}\right)}_{\approx 0} + \underbrace{\left(\frac{\partial e_i^{(s)} e_i^{(s)}}{\partial t} + U_k\frac{\partial e_i^{(s)} e_j^{(s)}}{\partial x_k}\right)}_{\text{Ergänzungsterme}} \tag{109}$$

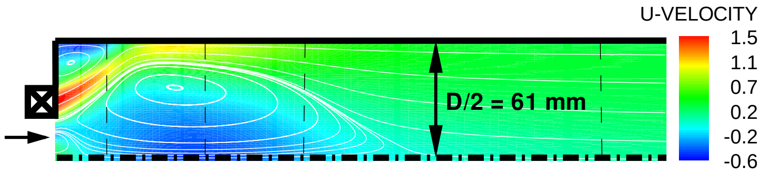


Abbildung 10: Simulation einer drallbehafteten Brennkammerströmung (Johnson und Roback 1983, $Re = 47\,500$, $S_{wirl} = 0.34$).

Im Falle stark verdrallter Strömungen durch einfache zylindrische Geometrien findet man näherungsweise konzentrische Stromlinien, und damit einen einfachen algebraischen Zusammenhang für die in (109) auftretende Ableitung der Basisvektoren des (Stromlinien=) Zylinderkoordinatensystems. Dieser entspricht exakt den algebraischen Ergänzungstermen zum Konvektionstensor der Reynolds–Spannungen, welche beim Wechsel von kartesischen auf Zylinderkoordinaten für den Starrkörperwirbel auftreten (Rung und Lübcke 1999). Die Ergänzungsterme lassen sich analog zur Gleichung (106) als Modifikation des Wirbelbeitrags interpretieren (Girimaji 1997)

$$\tilde{W}_{ij} = W_{ij} - 2.25\ \varepsilon_{ij3}\,\frac{W}{R} \tag{110}$$

Die Modifikation hat erhebliche Konsequenzen für den Wert der Invarianten Ω des Wirbeltensors und beeinflußt damit maßgeblich die Entwicklung des Anisotropieparamters c_μ.

Eine Formulierung in Stromlinienkoordinaten ist aufgrund der expliziten Abhängigkeit von der Geschwindigkeit nicht mehr unabhängig von der Wahl gleichberechtigter, unbeschleunigter Beobachter–Koordinatensysteme. Abhilfe verschafft hier die Formulierung der Gleichgewichtsaussage im Beschleunigungskoordinatensystem $\underline{e}^{(b)}$ (Girimaji 1997). Für das der Drallströmung verwandte Beispiel des Starrkörperwirbels sind Stromlinien– und Beschleunigungskoordinaten identisch. Die im Beschleunigungskoordinaten gewährleistete einfache Galilei–Invarianz verletzt jedoch die erweiterte Galilei–Invarianz, welche die Objektivität inkompressibler Medien gegenüber einer translatorischen Beschleunigung des Koordinatensystems postuliert (Speziale 1989; Spalart und Speziale 1999).

Im Folgenden wird ein kurzes Beispiel auf der Grundlage des modifizierten Wirbeltensors diskutiert werden. Man beachte, daß die Beziehung (110) nur Azimutalkorrekturen beinhaltet und die Komponente W_{12} des Wirbeltensors keine Krümmungskorrektur erfährt.

Zur Evaluierung der Krümmungskorrektur wurde exemplarisch das kalte Strömungsfeld einer von Roback und Johnson (1983) vermessenen Modellbrennkammer numerisch untersucht. Die Geometrie entspricht der in Abbildung (10) dargestellten plötzlichen Rohrerweiterung, wobei nur der erweiterte Querschnitt auf der Grundlage eines (120 x 80) Zellen umfassenden Rechengitters simuliert wurde. Die Reynoldszahl der Rohrzuströmung beträgt Re_{R_U}=47 500, die Drallzahl S_{wirl}=0.34 und das Mantelradienverhältniss $R_U/R_W/R_{\max}$=15/30/61.

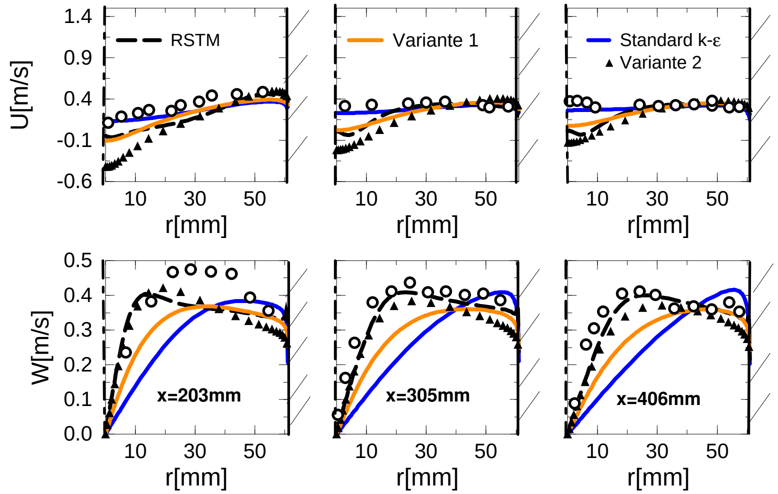


Abbildung 11: Simulation einer drallbehafteten Brennkammerströmung (Johnson und Roback 1983, $Re = 47\,500$, $S_{wirl} = 0.34$); Vergleich der berechneten Axial- und Azimutalgeschwindigkeitsprofile (U,W) in verschiedenen Schnitten (c_μ nach Glg. (92) → Variante 1 bzw. nach (97) → Variante 2).

Abbildung (11) vergleicht die gemessenen und berechneten Axial(U)– und Azimutal(W)–Geschwindigkeitsprofile an drei ausgewählten Stationen. Die dargestellten Ergebnisse illustrieren die mit der Krümmungskorrektur (110) verbundene Verbesserung am Beispiel der beiden vorstehend skizzierten konkurrierenden Beziehungen (92) und (97) für den Anisotropieparamter c_μ (Variante 1 bzw. Variante 2). In Folge der Drallmodifikation nähern sich die Ergebnisse deutlich den Resultaten einer Modellierung auf der Basis von RSTM. Man beachte, daß sich die in der Abbildung nicht dargestellten Ergebnisse der unkorrigierten Gleichungen (92) und (97) nur geringfügig von den Resultaten des herkömmlichen Wirbelzähigkeitsansatzes unterscheiden.

6 Invariantenbasierte Modellbildung

Der folgende Abschnitt stellt eine alternative Vorgehensweise zur Konstruktion einer linearen Stress–Strain Beziehung der Form

$$b_{ij} = -c_\mu s_{ij} \tag{111}$$

vor, welche unmittelbar auf die Invarianten II_b und III_b des Spannungsanisotropie–Tensors b_{ij} zurückgreift. Die beiden von null verschiedenen Invarianten des auf der Basis von (111) berechneten Spannungsanisotropie–Tensors lauten

$$II_b = -0.5\, b_{kk}^2 = -0.5\, c_\mu^2 \eta_1 \ , \qquad III_b = 1/3\, b_{kk}^3 = 1/3\, c_\mu^3 \eta_3 \ . \tag{112}$$

Anhand von Abbildung 3 erkennt man, daß die physikalisch realisierbaren Invariantenzustände auf einen engen Bereich begrenzt sind. Dieses Merkmal ist von Bedeutung für die Konstruktion von c_μ:

Asymptotisch konsistente Formulierungen müssen auch im Grenzübergang exterm starker Distorsion noch sinnvolle Lösungen für II_b und III_b liefern.

$$c_\mu \sim \eta_1^{-1/2} \quad \text{z.B.} \quad c_\mu = \frac{1}{A_0 + A_1\sqrt{A_2 S^2 + A_3 \Omega^2}} = \frac{1}{A_0 + A_1\sqrt{2(A_2\eta_1 - A_3\eta_2)}} \ . \tag{113}$$

Zur Evaluierung der freien Parameter in (113) konzentriert man sich primär auf die asymptotischen Grenzen derjenigen Strömungszustände, die durch den linearen Ansatz darstellungstheoretisch vollständig erfasst werden (vgl. Kapitel 4 und Anhang B). Hierzu zählt in erster Linie die achsensymmetrische Turbulenz. Daneben läßt sich auch der Zustand der ebenen Streckung in die formale Untersuchung einbeziehen. Aufgrund der Unvollständigkeit des linearen Ansatzes in ebenen Strömungen ist die korrekte Erfassung der Turbulenzstruktur durch das lineare Wirbelzähigkeitsmodell nicht mehr gewährleistet. Die prognostizierten Invariantenverläufe können folglich durchaus unbefriedigend sein, sollten aber zumindest die Realisierbarkeitsbedingungen beachten.

Lineare Wirbelzähigkeitsmodelle dienen, wie bereits bemerkt, vorrangig der Modellierung turbulenter Schubspannungen in praxisnahen Scherströmungen. Unglücklicherweise sind alle o.a. Strömungssituationen rotations– und scherfrei. Eine strenge Orientierung der Modellbildung an solchen Strömungssituationen erscheint daher nicht ratsam und vermag darüber hinaus keine Aussage in Bezug auf die Rolle der Wirbelstärke–Invarianten η_2 zu machen. Ergänzend zu den oben angeführten schubspannungsfreien Strömungen sollte deswegen die homogene Scherturbulenz in die Modellbildung einbezogen werden, deren Schubspannungen durch den linearen Ansatz exakt dargestellt werden.

Achsensymetrische Turbulenz im asymptotischen Limit

Bei der achsensymetrischen Turbulenz verbleiben wegen $w_{ij} \equiv 0$ und

$$s_{ij} = s_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \tag{114}$$

wahlweise $T_{ij}^{(1)} = s_{ij}$ oder $T_{ij}^{(3)} = s_{ij}^2 - \eta_1/3\,\delta_{ij}$ als linear unabhängige Generatoren der Funktionsbasis (72)

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{10} a_k T_{ij}^{(k)} \ , \qquad \text{mit} \quad T_{ij}^{(3)} = \frac{s_{11}}{2} \quad \text{und} \quad T_{ij}^{(1)} \ , \ T_{ij}^{(k\neq 1,3)} \equiv 0 \ ,$$

weshalb der lineare Ansatz darstellungstheoretisch vollständig ist. Dies bestätigt sich wegen $\eta_1 = 1.5\, s_{11}^2$ und $\eta_3 = 0.75\, s_{11}^3$ unmittelbar anhand der aus Gleichung (112) resultierenden Identität

$$\left(\frac{III_b}{2}\right)^2 + \left(\frac{II_b}{3}\right)^3 \equiv 0 \ .$$

Die Ergebnisse einer linearen Modellbildung beschreiben daher ungeachtet der spezifischen Formulierung von c_μ stets den korrekten Lösungspfad in der Invariantenkarte (Abbildung 3). Die Realisierbarkeit der Formulierung hängt somit nur noch von der Realisierbarkeit der beiden Grenzzustände $\lim(S, \eta_1 \to \infty)$ und $\lim(S, \eta_1 \to 0)$ ab, wobei letzterer wegen $s_{ij} \equiv 0$ trivialer Weise unproblematisch ist. Für die zweite Invariante des Spannungsanisotropie–Tensors findet man in Grenzübergang $\lim(S, \eta_1 \to \infty)$

$$\lim_{S,\eta_1 \to \infty} II_b \ = \ \frac{-1}{4\, A_1^2\, A_2} \tag{115}$$

Im einzelnen unterscheidet man, in Abhängigkeit des Vorzeichens von s_{11}, die unten dargestellten beiden Situationen.

<u>A) Kontraktion</u>

Im Grenzfall unendlich starker Streckung ($s_{11} \to \infty$) sollte die Turbulenzstruktur der isotropen Zwei–Komponenten–Turbulenz zustreben:

$$\lim_{S,\eta_1 \to \infty} \qquad II_{b(\mathrm{AK})} = -1/12 \ , \qquad III_{b(\mathrm{AK})} = -1/108 \ ,$$

woraus man schließlich eine Zwangsbedingung für die Koeffizienten A_1 und A_2 in dieser Strömungssituation gewinnt

$$(A_1^2\, A_2)_{\mathrm{AK}} = 3 \ . \tag{116}$$

B) Expansion

Im Grenzfall unendlich starker Expansion ($s_{11} \to -\infty$) sollte sich Zustand der Ein–Komponenten–Turbulenz einstellen:

$$\lim_{S,\eta_1 \to \infty} \qquad II_{b(\mathrm{AE})} = -1/3 \;, \qquad III_{b(\mathrm{AE})} = 2/27 \;,$$

woraus man eine weitere Zwangsbedingung für die Koeffizienten A_1 und A_2 gewinnt

$$(A_1^2 A_2)_{\mathrm{AE}} = 0.75 \;. \tag{117}$$

Ebene Streckung im asymptotischen Limit ($s_{11} \to \infty$)

Da die beiden von null verschiedenen Generatoren $T_{ij}^{(1)}$ und $T_{ij}^{(3)}$ in der eben Streckung nicht mehr linear abhängig sind (vgl. Anhang B), wird die ebene Streckung durch den linearen Ansatz darstellungstheoretisch nicht vollständig erfaßt (in inkompressiblen Medien ist $T_{ij}^{(1)}$ beispielsweise $\in R^2$, wogegen $T_{ij}^{(1)} \in R^3$ ist). Dies kann die Güte der linearen Modellbildung ist für diesen Strömungstyp beeinträchtigen, die Ergebnisse sollten jedoch nicht die physikalisch realisierbaren Grenzen überschreiten.

In zweidimensionalen Strömungen gilt $\eta_3 \equiv 0$, weshalb die Lösungen der linearen Modellierung gemäß (112) entlang der Vertikalen $III_b = 0$ in der Invariantenkarte verläuft

$$III_{b(\mathrm{ES})} \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad b_{33(\mathrm{ES})} = 0 \;, \quad b_{11(\mathrm{ES})} = -b_{22(\mathrm{ES})} \;.$$

Die Realisierbarkeit der Strömung hängt wegen des festgelegten Lösungspfades wiederum nur von der Realisierbarkeit der beiden Extremzustände ab. Im Grenzübergang unendlich großer Streckung darf der Schnittpunkt der Vertikalen mit der die Zwei–Komponenten–Turbulenz markierenden Linie nicht überschritten werden (lim $b_{11(\mathrm{ES})} = -1/3$)

$$\lim_{S,\eta_1 \to \infty} \quad II_{b(\mathrm{ES})} = -1/9 \;, \qquad \rightsquigarrow \qquad (A_1^2 A_2)_{\mathrm{AE}} = 9/4 \;. \tag{118}$$

Homogene Scherung im asymptotischen Limit

Die homogene Scherung wird ebenfalls vom linearen Ansatz nicht korrekt wiedergegeben, da aus darstellungstheoretischen Gründen neben $T_{ij}^{(1)}$ mit $T_{ij}^{(2)}$ und $T_{ij}^{(3)}$ noch zwei weitere linear unabhängige Generatoren in Erscheinung treten. Die Strömung eignet sich primär zur Fixierung der Invarianten η_2 bzw. der damit verbunden turbulenten Schubspannung, welche in dieser Strömungssituation vom linearen Ansatz exakt wiedergegeben wird.

Abid und Speziale (1993) weisen darauf hin, daß für stark unterschiedliche Scherratenparameter weitestgehend ähnliche Anisotropiewerte b_{12} auftreten, was auch durch den Erfolg aller auf der Bradshaw–Hypothese (Bradshaw und Ferris 1972) basierender

Wirbelzähigkeitsmodelle bestätigt wird (Spalart und Allmaras 1992; Menter 1994). Die Bradshaw–Hypothese fixiert die Anisotropie in Form von

$$b_{12} \equiv 0.15 \tag{119}$$

Der in der Bradshaw–Hypothese verankerte Wert wird auch durch die im Grenzübergang $\lim S, \eta_1 \to \infty$ gültige Rapid–Distortion–Theorie (Rogers 1991) bestätigt. Diese macht darüber hinaus auch Aussagen über die Entwicklung der Turbulenzstruktur für $\lim S, \eta_1 \to \infty$. Die reale Turbulenzstruktur stebt mit steigendem η_1 der Ein–Komponenten–Turbulenz, was jedoch im Zusammenhang mit linearen Ansätzen nicht nachvollzogen werden kann

$$\lim_{S,\eta_1 \to \infty} b_{12(\mathrm{HS})} = \frac{1}{2A_1\sqrt{A_2 + A_3}} \to 0.15 \qquad \rightsquigarrow \qquad A_3 = -A_2 + \frac{1}{(0.3A_1)^2} \;. \tag{120}$$

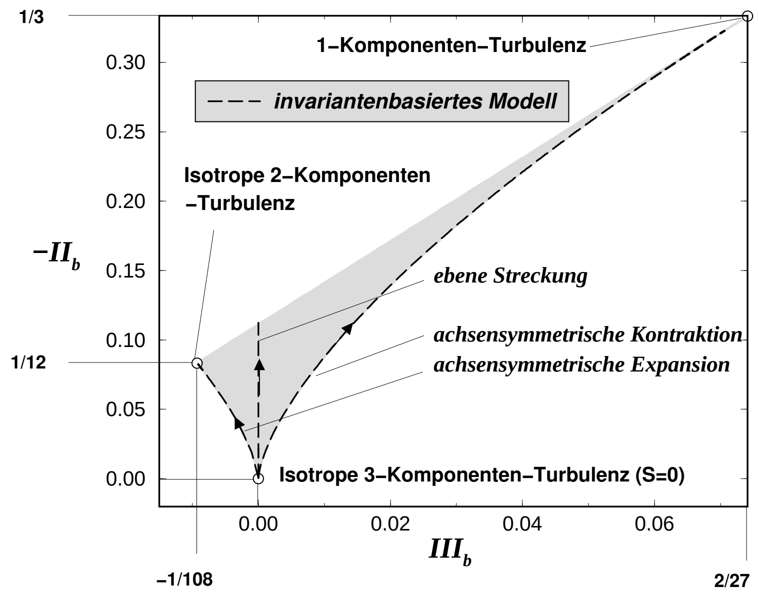


Abbildung 12: Lösungspfade der Formulierung (121) für drei rotationsfreie Distorsionen ($S \in [0, 500]$).

Tabelle 3: Vergleich der berechneten Anisotropieparameter c_μ für verschiedene lineare Modellierungstechniken in (homogenen) Scherströmungen mit direkten numerischen Simulationen von Kim et al. (1987) bzw. Rogers et al. (1986).

	DNS		Glg. (92)		Glg. (121)	
	$-b_{12}$	P/ε	$-b_{12}$	$P/\varepsilon = c_\mu S^2$	$-b_{12}$	$P/\varepsilon = c_\mu S^2$
DNS (S=3.3)	0.143	1.00	0.150	0.99	0.150	0.99
DNS (S=5.7)	0.158	1.85	0.177	2.02	0.151	1.71

Formulierung des invariantenbasierten Modells

Mit Hilfe des bereits in Gleichung (28) verwendeten Schiefenparameters lassen sich alle oben erarbeiteten Zwänge durch die folgende Formulierung befriedigen

$$c_\mu = \frac{1}{A_0 + 3.84\psi\sqrt{0.204S^2 + 0.796\Omega^2}} \; , \qquad \psi = \cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{6}\,\eta_3}{\eta_1^{1.5}}\right]\right) \; . \tag{121}$$

Die Formulierung (121) repräsentiert eine optimale Verteilung der Gewichte A_2 und A_3 aus dem Blickwinkel der Invariantenmodellierung, und liefert für Scherströmungen ($S = \Omega$) wieder das Mentersche Modell ($3.84\psi = 3.32$). Der Parameter A_0 wird hierin konsistent zum Grenzwert eines für $\lim \eta_1, \eta_2 \to 0$ gültigen Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodells nach Rotta (1951) gewählt (Rung und Lübcke 1999)

$$A_0 = 6.25\,\tanh(0.54S) \qquad \rightsquigarrow \qquad \lim_{\eta_1 \to 0} c_\mu = 0.16 \; . \tag{122}$$

Abbildung 12 skizziert die vom invariantenbasierten Modell (121) beschriebenen Lösungspfade in der Invariantenkarte. Dargestellt sind die Ergebnisse der drei rotationsfreien Distorsionen bei variierender Belastungen ($S \in [0, 500]$). Für die homogene Scherturbulenz verläuft eine vierte, kurze Linie vom isotropen Punkt entlang der Vertikalen $III_b = 0$ zum Punkt $II_b = -0.15^2$ (nicht eingezeichnet).

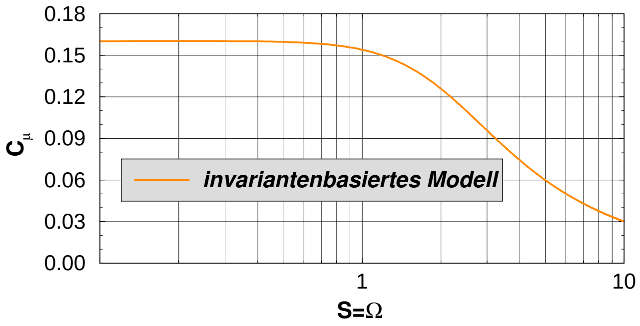


Abbildung 13: Asymptotisches Verhalten der Formulierung (121) für $S = \Omega \to 0$.

Tabelle 3 gibt Aufschluß über das Verhalten der Modellbildung (121) in einfachen Scherströmungen. Abbildung 13 skizziert das Verhalten des Modells im Grenzübergang $P/\varepsilon \to 0$.

7 Nachtrag: Schwartzsche Limitierung

Die Schwartzsche Ungleichung (13) ist, wie in Kaptitel 3.1 gezeigt, für lineare Wirbelzähigkeitsmodelle durch die Gewährleistung positiver Normalspannungen automatisch befriedigt. Sie eröffnet daher keine zusätzlichen Informationen zur Formulierung von Zwangsbedingungen. Die integrale Forrm der Ungleichung kann jedoch im Rahmen herkömmlicher Wirbelzähigkeitsansätze, die einen konstanten Anisotropieparameter c_μ, bzw. eine starre Stress–Strain Kopplung verwenden, äußerst dienlich sein. Hierbei wird nicht der Wirbelzähigkeitsansatz sondern die Zeit– bzw. Längenmaßvariable des Zweiparametermodells (z.B. ε oder ω) manipuliert. Die Manipulation erfolgt in Gestalt einer unteren Schranke, was nicht nur einfach zu implementieren ist, sondern in vielerlei Hinsicht von Vorteil für die Qualität der Lösung ist.
Die Herleitung einer integralen Form der Schwarzschen Ungleichung basiert auf der doppelten Überschiebung des Reynolds–Spannungstensors mit sich selbst. Mit Hilfe des linearen Boussinesq–Gesetzes (3) ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}(\overline{u_\alpha u_\beta})^2 = R_{ij}R_{ij} &= \left(\frac{2}{3}k\delta_{ij}-2\nu_t\tilde{S}_{ij}\right)\left(\frac{2}{3}k\delta_{ij}-2\nu_t\tilde{S}_{ij}\right)\\ &= \frac{4}{3}k^2+4\nu_t^2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}\\ &= \frac{4}{3}k^2+2\nu_t^2S^{*2}\ . \qquad (123)\end{aligned}$$

Ersetzt man die linke Seite durch die aufsummierte Schwartzsche Ungleichung (13),

$$\overline{u_i^2}\ \overline{u_j^2} \geq R_{ij}\ R_{ij}\ ,$$

dann folgt von $\overline{u_i^2}=2k$

$$4k^2 \ \geq\ \frac{4}{3}k^2+2\nu_t^2S^{*2}\ , \qquad (124)$$

unmittelbar eine mögliche Limitierung des zweiten Turbulenzparamters, z.B.

$$\begin{aligned}k-\omega\ \text{Modell}: &\quad \nu_t = \frac{k}{\omega} \quad \rightarrow \omega \geq \frac{\sqrt{3}}{2}S^*\ ,\\ k-\varepsilon\ \text{Modell}: &\quad \nu_t = \frac{c_\mu k^2}{\varepsilon} \quad \rightarrow \varepsilon \geq \frac{\sqrt{3}}{2}c_\mu\ k\ S^* \quad \text{mit} \quad c_\mu = 0.09\ . \qquad (125)\end{aligned}$$

Diese Limitierung ist physikalisch motiviert und sollte anstelle der üblicherweise gewählten unteren Schranke Null eingesetzt werden.

Tabelle 4: Umströmung eines NACA0012 Profils (Re=2 10^6, M=0.15, α=15^o); Einfluss der Limitierung auf die berechneten Kraftbeiwerte.

	C_l	C_d
Datenbank (Shedal et al., 1981)	1.048	———
$k-\omega$	1.168	0.0400
limitiertes $k-\omega$	1.060	0.0488

Einfluss der Schwartzschen Limitierung

Der Einfluss der Schwartzschen Limitierung (125) macht sich vor allem bei der Berechnung strömungsmechanischer Extremzustände bemerkbar. Hierzu zählt die Berechnung hochbelasteter Bauteile, wie z.B. aerodynamische Profile im Bereich des Maximalauftriebs. Für das exemplarisch gewählte Beispiel Re=2 10^6, M=0.15, α=15^o illustrieren Tabelle 4 und Abbildung 14 den Einfluss der Limitierung bei der Berechnung eines NACA0012 Profils auf der Basis des Wilcox $k-\omega$ Modells (1988). Die Limitierung hat einen positiven Einfluss auf die Vorhersagequalität im Bereich der druckinduzierten Hinterkantenablösung. Qualitativ ähnliche Unterschiede ergeben sich im Zusammenhang mit anderen Wirbelzähigkeitsmodellen.
Eine detaillierte Evaluierung aller Konsequenzen der Schwartzschen Limitierung entspricht nicht den Zielen dieser Arbeit. Weiterführende Untersuchungen, wie z.B. die Auswirkungen der Limitierung auf die Berechnung von Strömungstransition, sind von Zheng et al. (1997) durchgeführt worden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird dem Einfluss der Limitierung (125) auf die Berechnung freier Scherschichten mit dem $k-\omega$ Modell besonderes Augenmerk gewidmet. Es zeigt sich, daß die Limitierung allgemein bekannte Defizite dieser Modellbildung entschärft.

Freie Scherschichten bei $k-\omega$ Modellierung

Im Zusammenhang mit ω basierten Modellierungstechniken berichten viele Autoren vom problematischem Einfluss der Freistrom– bzw. Einströmrandbedingungen bei der Berechnung freier Scherschichten (Menter 1992; Wilcox 1993; Cazalbou, Spalart und Bradshaw 1994). Im Unterschied zur $k-\varepsilon$ Simulation ist die $k-\omega$ Simulation sehr empfindlich für die Wahl von Einström- und Fernfeldrandwerten der spezifischen Dissipationsrate ω. Insbesondere bei Unterschreitung eines kritischen Fernfeldwertes werden die charakteristischen Merkmale freier Scherschichten, beispielsweise die Entwicklung der Halbwertsbreite oder das Abklingverhalten der Mittengeschwindigkeit, von der Simulation nicht korrekt wiedergegeben.
Bei der Berechnung von Strömungen in komplexen Geometrien stellt sich zudem oftmals eine unangenehme Wechselwirkung zwischen dem Fernfeldwert von ω und lokal stark veränderlichen Streckungsverhältnissen des Rechengitters ein. Häufig kommt es dabei zur Entwicklung physikalisch unmotivierter Scherschichten fern der Wand.

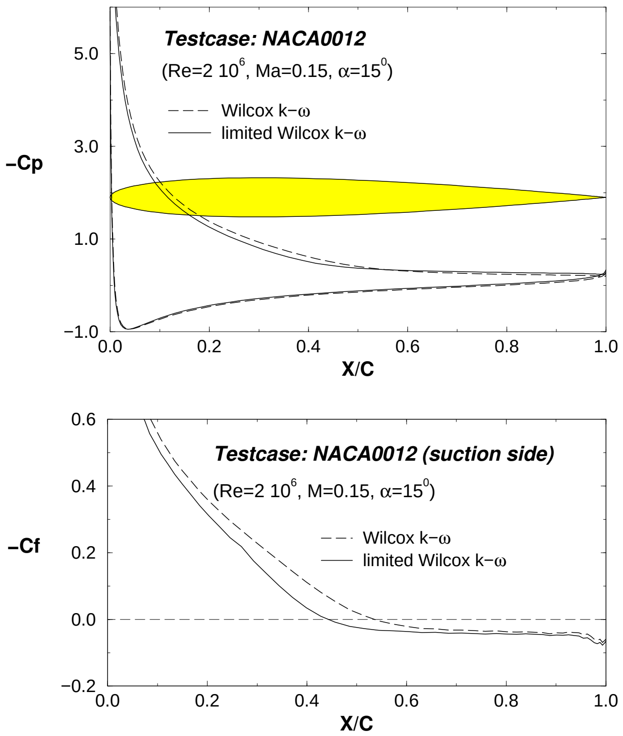


Abbildung 14: Umströmung eines NACA0012 Profils ($Re = 2 \cdot 10^6$, $M = 0.15$, $\alpha = 15^o$); Einfluss der Schwartzschen Limitierung auf den Verlauf der Druck– und Reibungsbeiwerte.

Als illustratives Beispiel dient die Navier–Stokes Simulation des von Gutmark und Wygnanski (1976) vermessenen ebenen Freistrahls. Die mit der Eintrittsgeschwindigkeit U_0 und dem Eintrittsquerschnitt D gebildete Reynoldszahl beträgt Re=30 000. Abbildung 15 veranschaulicht die untersuchte Konfiguration und zeigt einen Ausschnit des verwendeten 110x80 Rechengitters. Das Rechengebiet erstreckte sich über einen Bereich von $X < 200\ D$ bzw. $Y < 50\ D$, wobei die halbe Strahlbreite mit ca. 32 Knoten aufgelöst wurde. Neben den in der Abbildung skizzierten Einström–, Symmetrie– und Wandrandbedingungen wurden an allen übrigen Ränder Druckrandbedingungen (mit $\partial k/\partial n = \partial \omega/\partial n = 0$) verwendet. Die nachstehenden Abbildungen vergleichen die Resultate des $k - \omega$ und $k - \varepsilon$ Modells für zwei verschiedene Einströmwerte der

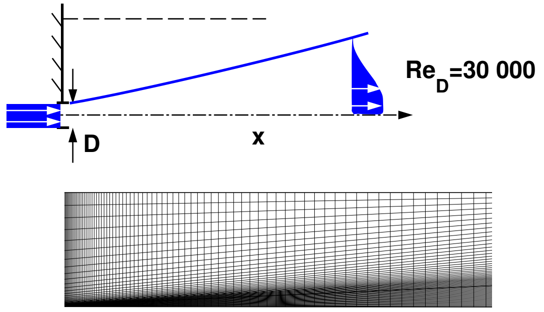


Abbildung 15: Ebener turbulenter Freistrahl (Re$_D$=30 000, Gutmark et al. 1976); Problemskizze und Ausschnitt des Rechengitters (110x80) der symmetrischen Navier–Stokes Simulation.

Dissipationsrate:

(a) $\quad Tu_{in} = 2\%\ , \qquad \varepsilon_{in} = c_\mu (k\omega)_{in} = 1\ , \qquad \nu^+_{t\ in} = 175.0\ ,$

(b) $\quad Tu_{in} = 2\%\ , \qquad \varepsilon_{in} = c_\mu (k\omega)_{in} = 10^3\ , \qquad \nu^+_{t\ in} = 0.175\ .$

Abbildung 16 zeigt deutlich, daß der niedrigere Einströmwert (a) im Zusammenhang mit der $k - \omega$ Simulation mit einer vielfachen Überschätzung der Ausbreitungsrate verbunden ist. Die in Abbildung 17 dargestellten $k - \varepsilon$ Ergebnisse offenbaren demgegenüber keine Abhängigkeit von ε_{in}.

Bei der Analyse der Probleme, welche im Zusammenhang mit der Modellierung freier Scherschichten auftreten, unterscheidet man geeigneterweise zwischen der Qualität der Profilform und der Vorhersagefähigkeit der Ausbreitungscharakteristik in Hauptströmungsrichtung.
Die primäre Ursache der unbefriedigenden Modellbildung ist der strukturelle Unterschied zwischen der Dissipationsratengleichung beider Modelle. Transformiert man die ε–Gleichung des stationären, inkompressiblen $k - \varepsilon$ Modells für ($\sigma_k = \sigma_\varepsilon = \sigma$)

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{1}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] \tag{126}$$

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \varepsilon + \frac{1}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{127}$$

mit Hilfe von $\varepsilon = c_\mu\ k\ \omega$ in eine entsprechende ω Gleichung, dann ergibt sich

$$\left(U_j - \frac{2}{\sigma\,\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = (C_1 - 1)\frac{\omega}{k} P_k - c_\mu (C_2 - 1)\omega^2 + \frac{1}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right]\ . \tag{128}$$

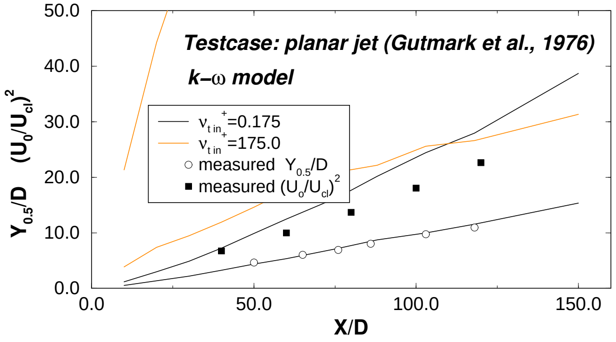


Abbildung 16: Turbulenter Freistrahl (Re=30 000, Gutmark et al. 1976): Abhängigkeit der normierten Halbwertsbreiten- und Mittengeschwindigkeitsentwicklungen von der Einströmbedingung der spezifischen Dissipationsrate (Wilcox $k-\omega$ Modell).

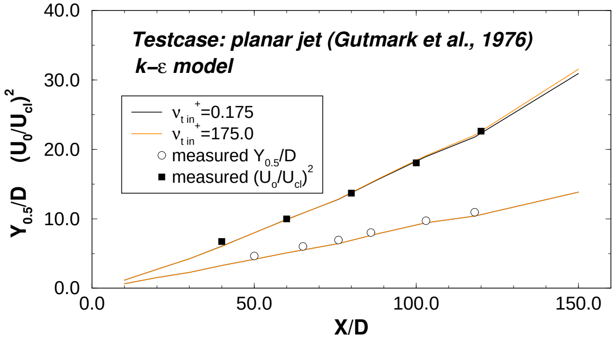


Abbildung 17: Turbulenter Freistrahl (Re_D=30 000, Gutmark et al. 1976): Abhängigkeit der normierten Halbwertsbreiten- und Mittengeschwindigkeitsentwicklungen von der Einströmbedingung der Dissipationsrate ($k-\varepsilon$ Modell).

Die transformierte Gleichung (128) stimmt mit Ausnahme des Kreuzdiffusionsterms, der sich am Scherschichtrand als zusätlicher, negativer Entrainmentbeitrag ($\partial k/\partial y < 0$) interpretieren läßt, mit der klassischen Wilcox ω–Gleichung überein. Durch den zusätzlichen Entrainmentbeitrag setzt sich die Lösung von ω, im Unterschied zur klassischen Wilcox Formulierung, aus der turbulenten Scherschicht in die scherfreie Aussen-

Tabelle 5: Turbulenter Freistrahl (Gutmark et al., 1976, Re=3 10^4); Einfluss der Limitierung auf die Halbwertsbreite und die Mittengeschwindigkeit für die beiden Zuströmbedingungen (a) und (b) (MD: modifizierte Diffusion σ_k=1.0, σ_ω=0.3) .

	Exp.	$k-\varepsilon$	lim. $k-\omega$	lim. $k-\omega$ (MD)
$Y/Y_{0.5}$	0.11	$0.11^{(a,b)}$	$0.11^{(a)}/0.12^{(b)}$	$0.10^{(a)}/0.09^{(b)}$
$(U_{ref}/U_{cl})^2$	0.20	$0.20^{(a,b)}$	$0.21^{(a)}/0.27^{(b)}$	$0.21^{(a)}/0.27^{(b)}$

strömung fort. Da sich die Freistromwerte von ω der Lösung der Differentialgleichung im Scherschichtaussenbereich aufprägen, ist die Gewährleistung physikalisch möglicher, zum Strömungsfeld konsistenter ω–Werte im Aussenbereich sehr wichtig.

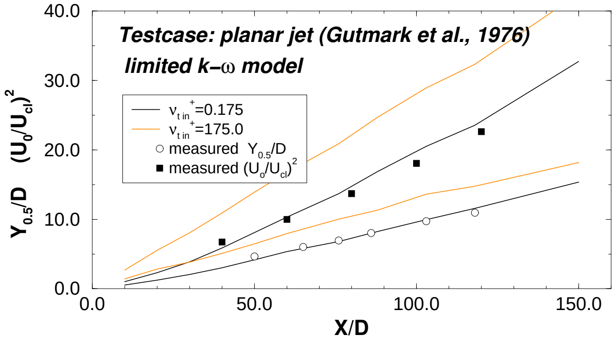


Abbildung 18: Turbulenter Freistrahl (Re_D=30 000, Gutmark et al. 1976): Abhängigkeit der normierten Halbwertsbreiten- und Mittengeschwindigkeitsentwicklungen von der Einströmbedingung der spezifischen Dissipationsrate (Wilcox $k-\omega$ Modell + Schwartzsche Limitierung).

Die Probleme des Wilcox $k-\omega$ Modells sind auf die fehlende Limitierung der Wirbelzähigkeit in scherfreien Strömungsgebieten zurückzuführen. Dies trifft insbesonde-

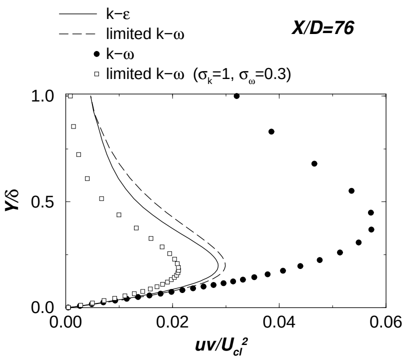


Abbildung 19: Turbulenter Freistrahl: Normierte Schubspannungsprofile im selbstähnlichen Bereich bei geringer Zuströmdissipationsrate.

re auf die Berechnung freier Scherschichten zu, da hier der regulierende (turbulenzdämpfende) Einfluss der Wandrandbedingung entfällt. Die Einström– und Fernfeldrandbedingungen prägen sich der scherfreien Aussenströmung auf, was prinzipiell der Zielsetzung von Randbedingungen entspricht. Die dabei auftretenden Werte sind physikalisch jedoch oftmals inkonsistent, da sie beispielsweise die Beziehung (125) verletzen. Im Falle hoher Freistromwerte der spezifischen Dissipationsrate treten keine Probleme auf. Die Schwartzsche Ungleichung ist erfüllt und die Produktion von Turbulenz wird erst mit dem Eintritt in die Scherschicht angefacht. Schwierigkeiten treten bei extrem geringen Freistromwerten der spezifischen Dissipationsrate auf. Diese werden unter geringer Scherung zunächst kaum modifiziert. Beim Übergang in die Scherschicht kontaminieren die niedrigen Werte der spezifischen Dissipationsrate das Strömungsfeld in Gestalt von großen normierten Scherparametern S. Es kommt zu hohen Wirbelzähigkeitsbeiträgen im Aussenbereich der Scherschicht (Abbildung 19), welche eine starke Turbulenzenergieproduktion und eine Aufdickung der Scherschicht nach sich ziehen. Der Benutzer steht somit vor dem Problem der sorgfältigen Vorgabe physikalisch korrekter Freistrom– und Einströmwerte für ω.

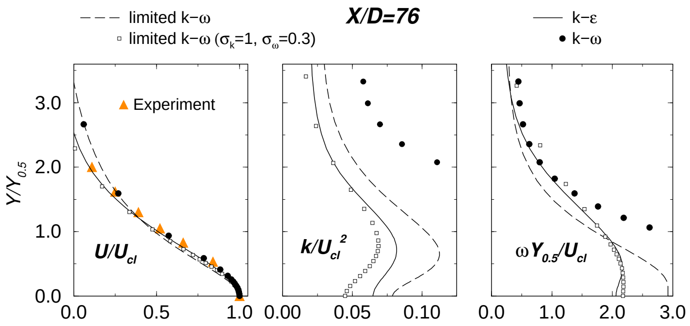


Abbildung 20: Turbulenter Freistrahl (Re_D=30 000, Gutmark et al. 1976): Exemplarische Strömungsprofile im selbstähnlichen Bereich für den Fall (b) (niedriger Einströmwert der Dissipationsrate).

Die Schwartzsche Ungleichung repräsentiert eine physikalisch sinnvolle Limitierung für scherfreie Strömungsgebiete. Abbildung 18 belegt wie die Schwartzsche Limitierung die Sensitivität der $k-\omega$ Ergebnisse reduziert. Tabelle 5 belegt, daß sich bei beiden Einströmbedingungen nahezu der selbe Gradient im selbstähnlichen Bereich ($X/D > 40$) einstellt. Die Ergebnisunterschiede beschränken sich somit primär auf die randnahen Zonen. Die verbleibende Sensitivität ist durchaus gewünscht, da dies dem Sinn der Randbedingung –Äußeres diktiert Inneres– entspricht. Die naheliegendste Erklärung für die Wirkungsweise der Limitierung gewinnt man aus der Betrachtung der maximalen turbulenten Schubspannung für den hier diskutierten einfachen Freistrahl

$$\overline{uv}_{\max} = -\frac{2\,k}{\sqrt{3}}\ . \qquad (129)$$

Die im Aussenbereich wirkende Schubspannung ist primär eine Funktion der Turbulenzenergie. Diese ist mit dem Wert der Stromfunktion im Aussenbereich, und daher der Einmischrate eng verknüpft (vgl. Anhang A).
Abbildung 20 zeigt repräsentative Strömungsprofile im selbstähnlichen Bereich. Trotz der verbesserten Ausbreitungscharakteristik zeigen die Geschwindigkeitsprofile des limitierten $k-\omega$ Modells im Randbereich die selben Abweichungen von den experimentellen Werten wie die Resultate der Originalformulierung. Dies steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der in Anhang A durchgeführten Ähnlichkeitstransformation. Der randnahe Anstieg der Strömungsprofile lautet (Cazalbou et al. 1994)

$$U \sim (Y_\delta - Y)^{1.43}\ , \qquad k \sim (Y_\delta - Y)^{1.43}\ , \qquad \omega \sim (Y_\delta - Y)^{0.43}\ . \qquad (130)$$

Die Ergebnisse des $k-\varepsilon$ Modells stimmen mit den theoretischen Werten, deren Berechnung ebenfalls dem Anhang entnommen werden kann, überein. Im Zusammenhang mit dem Wilcox Modell erkennt man deutlich die erhöhte Turbulenzintensität im Aussenbereich des Freistrahls. Die Schwartzsche Limitierung führt diesbezüglich zu besseren Ergebnissen. Die erhöhten Randwerte der Turbulenzenergie sind nach (165) typisch für die Formulierung. Ändert man zudem, in Anlehnung an die im Anhang gemachten Ausführungen, die Prandtlzahlen

$$\sigma_k = 1\ , \qquad \sigma_\omega = 0.3$$

dann stellen sich dem $k-\epsilon$ Modell ähnliche Profile ein. Eine nicht zonale Änderung der Prandtlzahlen ist aufgrund der damit verbundenen Probleme bei der Berechnung wandgebundener Scherschichten jedoch nicht zu empfehlen. Die Ergebnisse dienen vielmehr als Beleg für die im Anhang angestellten Überlegungen.
Die in den Abbildungen 21–22 gezeigten normierten Geschwindigkeitsprofile belegen nochmals die unterschiedliche, modellspezifische Profilcharakteristik im selbstähnlichen Strömungsbereich.

Produktionslimiter

Von besonderem Interesse ist die Auswirkung unterschiedlicher Limitierungstechniken auf das Verhältnis von Produktion zu Dissipation P/ε. Für homogene, unidirektio-

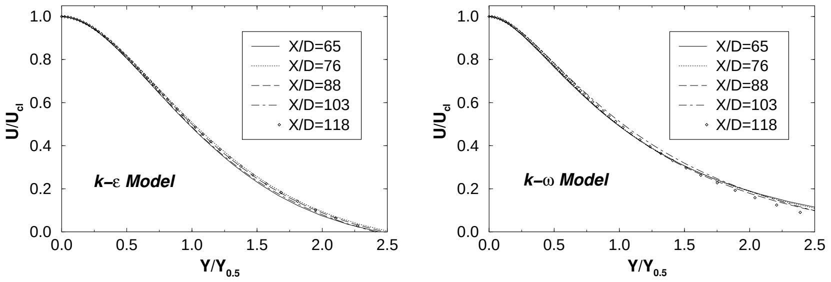


Abbildung 21: Turbulenter Freistrahl (Re_D=30 000, Gutmark et al. 1976): Normierte Geschwindigkeitsprofile zweier Turbulenzmodelle an unterschiedlichen Stationen (ν^+_{tin}=0.175).

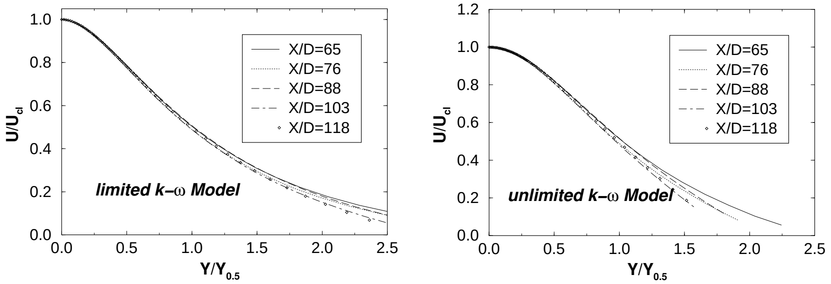


Abbildung 22: Turbulenter Freistrahl (Re_D=30 000, Gutmark et al. 1976): Einfluss der Schwartzschen Limitierung auf die normierten Geschwindigkeitsprofile an unterschiedlichen Stationen (ν^+_{tin}=175.0).

nale Scherungen ($S_{12} = W_{12}$) lassen sich die Limiter, im Zusammenhang mit hohen Scherraten, als inhärente obere Schranke für P/ε deuten.
Im Falle der Schwartzschen Limitierung erhält man eine unmittelbare Schranke für P/ε

$$\text{Schwartzsche Limitierung}: \quad \frac{P}{\varepsilon} \leq \frac{4}{3\,c_\mu} = 14.7\;. \tag{131}$$

Im Unterschied hierzu verändert sich bei Techniken die eine flexible Stress–Strain Beziehung verwenden, im Grenzfall großer dimensionsloser Scherparameter S nur die Proportionalität zwischen P/ε und S. Ausgehend von der quadratischen Beziehung für niedrige Scherparameter $P/\varepsilon \sim S^2$, erhält man für $S >> 1$

$$\begin{aligned} \text{2D}-\text{Realizability}(30): \quad & \frac{P}{\varepsilon} = \frac{2\,S}{3}\;, \\ \text{Menter}-\text{SST}(1994): \quad & \frac{P}{\varepsilon} = 0.31S\;. \end{aligned} \tag{132}$$

Eine absolute Schranke findet sich nicht. Im Falle der analogen Limiterung des zweiten Turbulenzparameters ergäbe sich

$$\begin{aligned} \text{2D}-\text{Realizability}(30): \quad & \frac{P}{\varepsilon} \leq \frac{4}{9\,c_\mu} = 4.94\;, \\ \text{Menter}-\text{SST}(1994): \quad & \frac{P}{\varepsilon} \leq \frac{0.31^2}{c_\mu} = 1.07\;. \end{aligned} \tag{133}$$

Danksagung

Der Autor bedankt sich für die großzügige Unterstützung dieser Arbeit durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (Föderkennzeichen Fe43/38), das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Technologie (Föderkennzeichen 20A9501F und 20A9505H) und die Europäische Gemeinschaft (Förderkennzeichen UNSI-BE-97-4044).

Literatur

[1] Abid, R. und Speziale, C. G. Predicting equlibrium states with Reynolds stress closures in a channel flow and homogeneous shear flow. *Physics of Fluids* A **5**: 1776–1782. 1993.

[2] Baldwin, B. S. und Lomax, H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper* 78–0257, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1978.

[3] Bardina, J., Ferziger, J. H. und Reynolds, W. C. Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. Tech. Rep. TF–19, Stanford University. 1983.

[4] Boussinesq, J. Théorie de l'Écoulement tourbillant. *Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.* **23**: 46–50. 1877.

[5] Bradshaw, P. Effects of streamline curvature on turbulent flow. ARGARDograph, No. 169, NATO, New–York. 1973.

[6] Bradshaw, P. und Ferris, D. H. Application of a general method of calculating turbulent shear layers. *ASME J. Fluids Eng.* **94**: 345. 1972.

[7] Cazalbou, J. B., Spalart, P. R. und Bradshaw, P. On the behaviour of two-equation turbulence models at the edge of a turbulent region. *Phys. Fluids* **6** (5): 1797–1804. 1994.

[8] Cebeci, T. und Smith, A. M. O. *Analysis of turbulent boundary layers*. Academic Press, New–York. 1974.

[9] Durbin, P. Near-wall turbulence closure modelling without damping functions. *Theoretical and Comp. Fluid Dynamics* **3** (1): 1–13. 1991.

[10] Durbin, P. und Speziale, C. G. Local anisotropy in strained turbulence at high Reynolds numbers. *ASME J. Fluids Eng.* **113**: 707–709. 1991.

[11] Gatski, T. B. und Speziale, C. G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **254**: 59–75. 1993.

[12] Girimaji, S. S. A Galilean invariant explicit algebraic Reynolds stress model for curved flows. *Phys. Fluids* **9**: 1067–1077. 1997.

[13] Gutmark, E. und Wygnanski, I. The planar turbulent jet. *J. Fluid Mech.* **73**: 465–495. 1976.

[14] Hinze, J. O. *Turbulence*. McGraw-Hill, New–York. 1959.

[15] Jin, G. und Braza, M. Two-equation turbulence model for unsteady separated flows around airfoils. *AIAA Journal* **32** (11): 2316–2320. 1994.

[16] Johnson, D. A. und King, L. S. A new turbulence closure model for boundary-layer flows with strong adverse pressure gradients and separation. *AIAA Paper* 84–0175, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1984.

[17] Jones, W. P. und Launder, B. E. Prediction of laminarization with a two-equation turbulence model. *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**: 301–314. 1972.

[18] Jongen, T. und Gatski, T. B. General explicit algebraic relations and best approximation for three-dimensional flows. *Int. J. Engineering Science* **36**: 739–763. 1998.

[19] Kato, M. und Launder, B. E. The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders. In *Proc. of 9th Symp. on Turb. Shear Flows*, Kyoto, Japan, 10.4.1–10.4.6. 1993.

[20] Kim, J., Moin, P. und Moser, R. Turbulence statistics of a fully developed channel flow at low reynolds number. *J. Fluid. Mech.* **177**: 133–166. 1987.

[21] Kok, J. C. Resolving the Dependence on Free–Stream Values for the $k-\omega$ Turbulence Model. Technical report, National Aerospace Laboratory, NLR. 1999.

[22] Lübcke, H. M. und Rung, T. Grundlagen Expliziter Algebraischen Spannungsmodellierung. Institutsbericht ?–99 (in preparation), Hermann–Föttinger–Institut, Technische Universität Berlin. 1999.

[23] Lumley, J. L. Computational modelling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.* **18**: 123–176. 1978.

[24] Lund, T. S. und Novikov, E. A. Parametrization of subgrid–scale stress by the velocity gradient tensor. *Annual Research Briefs of the Center for Turbulence Research*: 27–43. 1992.

[25] Lyn, D. A., Einav, S., Rodi, W. und Park, J. H. A laser-dopler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder. *J. Fluid. Mech.* **304**: 285–319. 1995.

[26] Menter, F. R. Influence of freestream values on k-ω turbulence model prediction. *AIAA Journal* **30** (6): 1657–1659. 1992.

[27] Menter, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal* **32** (8): 1598–1605. 1994.

[28] Moser, R. D. und Moin, P. The effect of curvature on wall–bounded turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **175**: 479–510. 1987.

[29] Muck, K. C., Hoffmann, P. H. und Bradshaw, P. The effect of concav surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **161**: 371–403. 1985.

[30] Muck, K. C., Hoffmann, P. H. und Bradshaw, P. The effect of convex surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **161**: 347–369. 1985.

[31] Paullay, A. J., Melnik, R. E., Rubel, A., Rudman, S. und Siclari, M. J. Similarity solutions for plane and radial jets using a $k-\varepsilon$ turbulence model. *ASME Journal of Fluids Engineering* **107**: 79–85. 1985.

[32] Peng, S. H., Davidson, L. und Holmberg, S. A modified low-Reynolds number $k-\omega$ model for recirculating flows. *ASME Journal of Fluids Engineering* **119**: 867–875. 1997.

[33] Reynolds, O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society* Ser. A **186-I**: 123–164. 1895, London.

[34] Reynolds, W. C. Fundamentals of turbulence for turbulence modeling and simulation. Lecture Notes for Von Karman Institute, NATO, New–York, ARGARD Lecture Series No. 86. 1987.

[35] Roback, R. und Johnson, B. V. Mass and momentum turbulent transport experiments with confined swirling coaxial jets. NASA Contractor Report 168252, NASA. 1983.

[36] Rogers, M. M. The structure of a passive scalar field with a uniform mean gradient in rapidely sheared homogeneous turbulence. *Phys. Fluids* A **3**: 144–154. 1991.

[37] Rogers, M. M., Moin, P. und Reynolds, W. C. The structure and modelling of hydrodynamic and passive scalar field in homogeneous turbulent shear flow. Tech. Rep. TR TF–25, Thermosciences Division, Dept. Mech. Engineering, Stanford University. 1986.

[38] Rotta, J. C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulence I. *Zeitschrift für Physik* **129**: 547–572. 1951.

[39] Rotta, J. C. *Turbulente Strömungen*, Band 15 der Reihe *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik*. Teubner, Stuttgart. 1972.

[40] Rung, T. und Lübcke, H. M. Entwicklung anisotroper Stress–Strain Beziehungen. Institutsbericht ?–99 (in preparation), Hermann–Föttinger–Institut, Technische Universität Berlin. 1999.

[41] Rung, T., Schatz, M. und F.Thiele. Beeinflussung einer stark gestörten Grenzschicht mit Druckanstieg. Arbeitsbericht zum Forschungsvorhaben Fe 43/38-4,6; DFG–Forschergruppe Beeinflussung und Steuerung turbulenter Scherschichten, Hermann-Föttinger-Institut, Technische Universität Berlin. 1998.

[42] Schumann, U. Realizability of Reynolds stress turbulence models. *Phys. Fluids* **20**: 721–725. 1977.

[43] Shedal, R. E. und Klimas, P. C. Aerodynamic characteristics of seven airfoil sections through 180 degrees angle of attack for use in aerodynamic analysis of vertical axis wind turbines. Technical report, Sandia National Laboratories, Alburquerque, New Mexico. 1981.

[44] Shih, T. H., Liou, W. W., Shabbir, A. A., Yang, Z. und Zhu, J. A new k-ε eddy–viscosity model for high reynolds number turbulent flows. *Computers & Fluids* **24** (3): 227–239. 1995.

[45] Spalart, P. R. und Allmaras, S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper* 92–0439, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1992.

[46] Spalart, P. R. und Speziale, C. G. A note on constraints in turbulence modelling. *J. Fluid Mech.* **391**: 373–376. 1999.

[47] Spencer, A. J. M. Theory of Invariants. *Continuum Physics* **1**: 239–352. 1971, Ed. A.C. Eringen, cademic Press, New–York.

[48] Spencer, A. J. M. und Rivlin, R. S. The Theory of Matrix Polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua. *Arch. for Rational Mechanical Anal.* **2**: 309–336. 1959.

[49] Speziale, C. G. Turbulence modeling in noninertial frames of reference. *Theort. Comput. Fluid Dynamics* **1**: 3–19. 1989.

[50] Speziale, C. G., Abid, R. und Anderson, E. C. Critical evaluation of two-equation models for near–wall turbulence. *AIAA J.* **30** (2): 324–331. 1992.

[51] Speziale, C. G., Abid, R. und Blaisdell, G. A. On the consistency of Reynolds stress turbulence closure with hydrodynamic stability theory. *Phys. Fluids* **8**: 781–788. 1996.

[52] Wilcox, D. C. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal* **26** (11): 1299–1310. 1988.

[53] Wilcox, D. C. *Turbulence Modeling for CFD.* DCW Industries, Inc., La Cañada. 1993.

[54] Yakhot, V., Orzag, S. A., Thangham, S., Gatski, T. B. und Speziale, C. G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys. Fluids* A **4**: 1510–1520. 1992.

[55] Zheng, Q.-S. Theory of representations for tensor functions – A unified invariant approach to constitutive equation. in *Appl. Mech. Rev.* **47** (11): 545–587. 1994.

[56] Zheng, X., Liao, C., Liu, C., Sung, C. H. und Huang, T. T. Multigrid computation of incompressible flows using two-equation turbulence models: Part 1– Numerical method. *ASME J. Fluids Eng.* **119**: 893–899. 1997.

A Ähnlichkeitstransformation des Freistrahles

Zur Analyse des Wilcox $k-\omega$ Turbulenzmodells am Scherschichtaussenrand dient die im Folgenden skizzierte Ähnlichkeitstransformation der Differentialgleichungen des ebenen Freistrahl. Ziel der Untersuchungen ist

- die Formulierung einer ähnlichen Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems für U, k und ω mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation
$$L[\phi(x,y)] \rightarrow \tilde{L}[\Phi(\eta)] \ ,$$
- die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens des gekoppelten Differentialgleichungssystems am Scherschichtrand, wenn an diesem die Hauptströmungsgeschwindigkeit und die Turbulenzgrößen verschwinden ($U = k_\delta = \omega_\delta = 0$).

Die dazu verwendete Technik wurde ursprünglich von Paullay, Melnik, Rubel, Rudman und Siclari (1985) für das $k-\varepsilon$ Modell entwickelt und gleicht der klassischen Stromfunktionstransformation zur Formulierung ähnlicher Lösungen in Wandgrenzschichten (Cebeci und Smith 1974). Eine analoge Untersuchung läßt sich für den runden Freistrahl durchführen. Ausgangspunkt der Transformation sind die parabolisierten inkompressiblen, zweidimensionalen Kontinuitäts– Impuls– und Turbulenzgleichungen. Zur einheitlichen Darstellung unterschiedlicher Ansätze wird die ω–GLeichung um einen zusätzlichen Kreuzdiffusionsterm erweitert, dessen Ursprung bereits bei der Transformation der ε–Gleichung (128) erläutert wurden.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \ , \\
U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{1}{\partial y}\left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial y}\right) \ , \\
U\frac{\partial k}{\partial x} + V\frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{k}{\omega}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 - c_\mu\, k\, \omega + \frac{1}{\partial y}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right) \ , \\
U\frac{\partial \omega}{\partial x} + V\frac{\partial \omega}{\partial y} &= \alpha\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 - \beta\omega^2 + \frac{1}{\partial y}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + \underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\phi}{\sigma_\omega\, \omega}}_{\text{Kreuzdiffusion}} \ .
\end{aligned} \tag{134}$$

die der nachstehend skizzierten Koordinatentransformation unterzogen werden.

Koordinatentransformation

Die Untersuchungen basieren auf der Definition zweier unabhängiger Veränderlicher

$$\xi = x \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{y}{x} \ , \qquad \text{mit} \tag{135}$$

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x} \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \ . \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \ , \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \ .$$

Variablentransformation

Mit Hilfe einer Stromfuntionstransformation der Geschwindigkeiten auf der Grundlage einer dimensionslosen Stromfunktion F

$$\Psi = U_0(x)\ x\ F(\eta) \tag{136}$$

$$\leadsto \quad U = U_0(x)\,\frac{\partial F(\eta)}{\partial \eta} = U_0\, F' \ , \qquad V = -\left(0.5\, U_0\, F - U_0\, \eta\, F'\right) \tag{137}$$

läßt sich die Kontinuitätsgleichung in (134) identisch erfüllen. Die Transformationsvorschrift für die Turbulenzvariablen ergibt sich aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung

$$k = U_0^2(x)\ K(\eta) \ , \qquad \omega = \frac{U_0(x)}{x}\ \Omega(\eta) \ , \qquad \nu_t = U_0(x)\ x\ \frac{K(\eta)}{\Omega(\eta)} \ . \tag{138}$$

Die hierin auftretende Transformationgeschwindigkeit U_0 entwicklet man aus der Kontinuität des Impulsintegrals

$$U_0^2 = \frac{1}{x}\left[\frac{J}{2}\left(\int_0^{\eta_\delta} F'^2 d\eta\right)^{-1}\right] \qquad \leadsto \qquad \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{U_0}{2x} \ ,$$

welche sich aus der Integration der konservativen Form der Impulsgleichung über die Querkoordinate ableiten läßt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\delta \left[\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] dy \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta U^2 dy + [UV]_0^\delta - \left[\nu_t \frac{\partial U}{\partial y}\right]_0^\delta \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta U^2 dy \\
\leadsto \quad J : &= 2\int_0^\delta U^2 dy \neq J(x) \ .
\end{aligned} \tag{139}$$

Transformierte Bilanzgleichung

Die Stromfunktions– und Koordinatentransformation reduzieren das partielle Differentialgleichungssystem (134) auf ein System dreier gekoppelter gewöhlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(F'^2 + FF''\right) + \left(\frac{K}{\Omega}F''\right)' &= 0 \ , \\
\left(KF' + \frac{1}{2}FK'\right) + \frac{1}{\sigma_k}\left(\frac{K}{\Omega}K'\right)' + \frac{K}{\Omega}\left(F''\right)^2 - K\Omega c_\mu &= 0 \ , \\
\frac{1}{2}\left(3\Omega F' + F\Omega'\right) + \frac{1}{\sigma_\omega}\left(\frac{K}{\Omega}\Omega'\right)' + \alpha\left(F''\right)^2 - \Omega^2\beta + \frac{\phi}{\sigma_\omega}\frac{K'\Omega'}{\Omega} &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{140}$$

Grenzübergang zum Scherschichtaussenrand

Im Weiteren soll mit Hilfe einer zweiten Transformation

$$\lambda = \eta_\delta - \eta \tag{141}$$

der Grenzübergang von turbulentem und nichttubulentem Bereich ($\lim \lambda \to 0$) genauer betrachtet werden. Hierzu wird von einer scherfreien laminaren Aussenströmung ausgegangen, welche folgenden Ansatz für die transformierten abhängigen Variablen in der Nähe des Grenzschichtaussenrandes motiviert

$$\begin{aligned} F &= F_\delta - A\lambda^a\,, & a > 1 \quad A > 0\,, \\ K &= B\lambda^b\,, & b > 0 \quad B > 0\,, \\ \Omega &= C\lambda^e\,, & e > 0 \quad C > 0\,. \end{aligned} \tag{142}$$

Impulsgleichung

Setzt man die Funktionsverläufe (142) in die erste Gleichung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (140) ein, so ergibt sich

$$\lambda^a \left[A\,(2a-1)\right] - F_\delta\,(a-1) + \lambda^{b-e-1}\left[\frac{2\,B}{C}(a-1)(a+b-e-2)\right] = 0\,. \tag{143}$$

Der erste Term verschwindet wegen $a > 1$ beim Grenzübergang $\lim \lambda \to 0$. Ein Widerspruch läßt sich nur vermeiden, wenn die folgenden beiden Verträglchkeitsbedingungen am Grenzschichtaussenrand erfüllt sind

$$b - e - 1 = 0\,, \qquad F_\delta = \frac{2\,B}{C}(a-1)\,. \tag{144}$$

Die Anpassung der Koeffizienten impliziert insbesondere einen linearen Anstieg der Wirbelzähighkeit am Scherschichtaussenrand

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{K}{\Omega}\right) = \frac{B}{C}\lambda\,. \tag{145}$$

Turbulenzgleichungen

Die Turbulenzenergiegleichung aus (140) notiert sich gemäß (142) zu

$$0 = \underbrace{\left[A\left(a+\frac{b}{2}\right)\right]}_{\text{Konvektion}}\lambda^a + \underbrace{\frac{B\,b}{C}\left[(1-a)+\frac{b}{\sigma_k}\right]}_{\text{Entrainment + Diffusion}} + \lambda^{2a-2-b}\underbrace{\left[\frac{A^2}{C}a^2(a-1)^2\right]}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\lambda^b\,C\,c_\mu}_{\text{Dissipation}}\,. \tag{146}$$

Im Grenzübergang $\lim \lambda \to 0$ existieren formal zwei Möglichkeiten zur Entwicklung führender Terme, die im weiteren Verlauf getrennt diskutiert werden

$$\begin{aligned} &(a) \qquad b = 2a-2\,, \\ &(b) \qquad b < 2a-2\,. \end{aligned} \tag{147}$$

Möglichkeit (a)

Betrachtet man nur die im Grenzübergang führenden Terme der Turbulenzenergiegleichung (146), so ergibt sich ein Konflikt für $\sigma_k \le 2$

$$2B\left(\frac{2}{\sigma_k} - 1\right) + A^2a^2 = 0\,. \tag{148}$$

Im konkreten Falle von $\sigma_k = 2$ wäre ein kontinuierlicher Verlauf der Stromfunktion im Scherschichtaussenrand ausgeschlossen

$$\lim_{\lambda\to 0}(a\,A) = 0 \qquad \text{mit (142)} \rightsquigarrow \quad A = 0\,.$$

Letzteres steht im Widerspruch zu den o.g. Voraussetzungen (142).

Die Gleichung der spezifischen Dissipationsrate ω aus (140) läßt sich gemäß (142) wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} 0 = \; & \underbrace{\frac{3\,a\,A\,C}{2}}_{\text{Konvektion}}\lambda^a + \underbrace{\left[(1-a)(b-1)B\right] + \left[\frac{A\;C\;(b-1)}{2}\right]\lambda^a}_{\text{Entrainment}} + \underbrace{\left[\frac{B(b-1)^2}{\sigma_\omega}\right]}_{\text{Diffusion}} + \\ & \lambda^{2a-2-b}\underbrace{\left[\alpha A^2a^2(a-1)^2\right]}_{\text{Produktion}} - \lambda^b\underbrace{\left[C^2\,\beta\right]}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\left[\frac{Bb(b-1)\phi}{\sigma_\omega}\right]}_{\text{Kreuzdiffusion}}\,. \end{aligned} \tag{149}$$

Im Falle $b = 2(a-1)$ und $A = 0$ ergibt sich, unter Beschränkung auf die im Grenzübergang $\lim \lambda \to 0$ führenden Entrainment- und Diffusionsterme, aus (149)

$$(1-a) + \frac{(2a-3)+2\phi(a-1)}{\sigma_w} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad a = \frac{3-\sigma_w+2\phi}{2-\sigma_w+2\phi}\,. \tag{150}$$

Für das Wilcox-Modell findet man somit wegen $\sigma_w = 2$ und $\phi = 0$ im Fall (a) singuläre Exponentenwerte a, b, e vor. Da Prandtlzahlen $\sigma_k > 2$ ohne praktische Relevanz sind, spielt Möglichkeit (a) faktisch keine Rolle.

Möglichkeit (b)

Die Alternative $b < 2a-2$ führt im Grenzübergang auf eine widerspruchsfreie Kopplungsbeziehung zwischen Entrainment– und Diffusionsbeiträgen der Turbulenzenergiegleichung

$$b = \sigma_k\,(a-1) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\sigma_k < 2}\,. \tag{151}$$

Die Gleichung der spezifischen Dissipationsrate läßt sich analog zu (150) vereinfachen.

$$a - 1 = \frac{b(\phi+1)-1}{\sigma_\omega} \qquad \rightsquigarrow^{(151)} \qquad b = \frac{1}{(1+\phi) - \frac{\sigma_\omega}{\sigma_k}}\,, \tag{152}$$

Zusammangefasst erhält man schließlich die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Exponenten a, b, e der Profilanahme (142)

$$a = \frac{1+\sigma_k(1+\phi)-\sigma_\omega}{\sigma_k(1+\phi)-\sigma_\omega} \qquad b = \frac{\sigma_k}{\sigma_k(1+\phi)-\sigma_\omega} \qquad e = \frac{\sigma_\omega - \sigma_k\,\phi}{\sigma_k(1+\phi)-\sigma_\omega}\ , \tag{153}$$

welche mit theoretischen und experimentellen Ergebnissen verglichen werden können.

$k-\varepsilon$ Modell

Paullay et al. (1985) geben für die analoge Untersuchung des $k-\varepsilon$ Modells mit $\sigma_k = 1$ und $\sigma_\varepsilon = 1.3$

$$\boxed{a = 2.43\ , \qquad b = 1.43\ , \qquad e = 0.43} \tag{154}$$

an. Die Ergebnisse der Paullay–Lösung werden i. Allg. als physikalisch korrekt (Cazalbou et al. 1994) angesehen.

$k-\omega$ Modelle

Im Folgenden sollen verschiedene Varianten von (153) diskutiert werden. Das Wilcox Modell und die Schwartzsche Limitierung unterscheiden sich dabei von dem BSL Modell (Menter 1994) durch den Verzicht auf den zusätzlichen Quellterm ($\phi = 0$). Im Rahmen der Schwartzschen Ungleichung werden zusätzlich nicht verschwindende Werte der Turbulenzenergie am Grenzschichtaussenrand erlaubt.

Wilcox Modell

Die Vorraussetzung (151) zur Gültigkeit der Lösung (b) steht im Widerspruch zu dem üblicherweise verwendeten Koeffizientenwert $\sigma_k = 2$. Ferner erhält man für $\sigma_k = \sigma_\omega$, $a \neq 1$ und $\phi = 0$ einen Widerspruch zwischen (151) und (152), der nach (153) in singuläre Koeffizientenwerte für a, b und e mündet.

Setzt man in Anlehnung an (151) näherungsweise $\sigma_k = 2 - \tilde{\epsilon}$ mit $\tilde{\epsilon} << 1$ und damit von (147b) $b = 2a - 2 - \epsilon$, dann ergeben sich anstelle von (152)

$$(1-a) + \frac{(2a-3-\epsilon)}{\sigma_\omega} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad a = 1 + \frac{1+\epsilon}{2-\sigma_\omega} \tag{155}$$

auch für modifizierte σ_k weiterhin singuläre Exponenten a, b, e.

Vorraussetzung für eine reguläre Lösung ist die Modfikation beider Prandtlzahlen. Für $\sigma_k = 1$ und $\sigma_\omega = 0.3$ erhält man beispielsweise auch ohne zusätzlichen Quellterm die Paullay–Lösung (154). Unglücklicherweise ist die Prandtlzahl der spezifischen Dissipationsrate bereits durch die Konsistenz zum logarithmischen Wandgesetz

$$\sigma_\omega^{-1} = \frac{\sqrt{c_\mu}}{\kappa^2}\left(\frac{\beta}{c_\mu} - \alpha\right)$$

festgelegt, weshalb allenfalls eine zonale Modellbildung, aufgeteilt in Wandnah– und Fernbereich, in Frage kommt. Zusammengefaßt läßt sich sagen, daß sich das Wilcox $k-\omega$ Modell, im Unterschied zum $k-\varepsilon$ Modell, einer sinnvollen Lösung für verschwindende Randwerte von U, k, ω verschließt.

BSL Modifikation

Für $\phi \neq 0$ dominiert der zusätzliche Quellterm die Lösung (153). Man beachte, daß der Term alle Vorteile einer $k-\omega$ Modellierung in Wandgrenzschichten, neutralisiert. Er sollte daher nur im Rahmen eines zonalen Ansatzes verwendet werden. Wilcox (1993) schlägt anstelle des zonale Ansatzes vor, nur positive Kreuzdiffusionsterme zuzulassen

$$\frac{D(\rho\,\omega)}{Dt} = \ \ldots + \left(\frac{\phi\,\rho}{\sigma_\omega\,\omega}\right) \quad \left[\max\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial y}, 0\right)\right]\ . \tag{156}$$

Für anliegende Wandgrenzschichten ist dies sicherlich eine geeignete Strategie, bei komplexeren Strömungsvorgängen sind Zweifel angebracht.

Das von Menter (1994) vorgeschlagene BSL Modell basiert auf einem wandabstandsabhängigen Koeffizientenwert ϕ. Hierbei wird die ω–Gleichung mit zunehmender Entfernung von der Wand durch eine äquivalente ε–Gleichung substituiert. Setzt man die entsprechenden Prandtlzahlen des $k-\varepsilon$ Modells in (153) ein, so ergibt sich wieder die Lösung des $k-\varepsilon$ Modells.

$$\begin{aligned} &\sigma_k = 1\ , \qquad \sigma_\omega = 1.3\ , \qquad \phi = 1\ , \\ \rightsquigarrow \quad &\boxed{a = 2.43\ , \qquad b = 1.43\ , \qquad e = 0.43} \end{aligned} \tag{157}$$

Ein ähnlicher Vorschlag zur Modifikation des $k-\omega$ Modells stammt von Peng et al. (1997). Im Unterschied zum Mentermodell werden die Koeffizienten hierbei nicht zonal variiert. Die Auswertung der Beziehung (153) offenbart jedoch deutliche Abweichungen von der theoretischen Lösung (154)

$$\begin{aligned} &\sigma_k = 0.8\ , \qquad \sigma_\omega = 1.35\ , \qquad \phi = 1.0125\ , \\ \rightsquigarrow \quad &a = 4.84\ , \qquad b = 3.08\ , \qquad e = 2.08\ . \end{aligned} \tag{158}$$

Kok (1999) empfiehlt die Parameterkombination

$$\begin{aligned} &\sigma_k = 1.5\ , \qquad \sigma_\omega = 2.0\ , \qquad \phi = 1.0\ , \\ \rightsquigarrow \quad &a = 2.0\ , \qquad b = 1.5\ , \qquad e = 0.5\ , \end{aligned} \tag{159}$$

im Zusammenhang mit der oben erwähnten Strategie nur positive Kreuzdiffusionsterme zuzulassen.

Für $\sigma_k = \sigma_\omega = \sigma$ erhält man bereits nach leichter Koeffizientenkorrektur befriedigende Lösungen

$$a = \frac{\phi\,\sigma + 1}{\phi\,\sigma}\,, \qquad b = \frac{1}{\phi}\,, \qquad e = \frac{1-\phi}{\phi}\,. \tag{160}$$

Die Kombination $\sigma = 2.0$ und $\phi = 0.7$ führt beispielsweise mit Ausnahme des Impulsprofils (a=1.71) wieder auf die Paullay-Lösung (154).

Schwartzsche Limitierung

Die unerwünschte Abhängigkeit der $k-\omega$ Simulation von den Freistromwerten der spezifischen Dissipationsrate tritt, wie im Nachtrag geschildert, vor allem bei Unterschreiten einer kritischen Grenze von ω im äusseren Bereich geringer Scherung auf. Die der Schwartzschen Ungleichung entnommene Restriktion (125) führt in solchen Fällen unmittelbar auf eine Kopplungsbeziehung zwischen der spezifischen Dissipationsrate und der Stromfunktion

$$\omega = \gamma \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \qquad \rightsquigarrow \qquad \Omega = \gamma \frac{\sqrt{3}}{2}\;|F''| \tag{161}$$

Der Koeffizient γ dient der Illustration der Wirkungsweise der Schwartzschen Limitierung. Die ω–Gleichung spielt im Falle der Limitierung keine Rolle, da sie durch die Kopplungsbeziehung (161) ersetzt wird.
Die Stromfunktions– und Koordinatentransformation reduzieren das partielle Differentialgleichungssystem (134) auf ein System zweier gekoppelter gewöhlicher Differentialgleichungen für die Stromfunktion und die Turbulenzenergie

$$\begin{aligned} \left(F'^2 + FF''\right) + \frac{4}{\gamma\sqrt{3}}\,(-K)' &= 0\,, \\ \left(KF' + \frac{1}{2}FK'\right) + |F''|\;K\left(\frac{2}{\gamma\sqrt{3}} - c_\mu \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{\gamma\,\sigma_k\sqrt{3}}\left(\frac{K\,K'}{|F''|}\right)' &= 0\,, \end{aligned} \tag{162}$$

Für die Verläufe der normierten Turbulenzenergie und die Stromfunktion greift man wieder auf den Ansatz (142) zurück. Hierbei sollen zusätzlich jedoch von Null verschiedene Randwerte der Turbulenzenergie K erlaubt sein

$$\begin{aligned} F &= F_\delta - A\lambda^a\,, \qquad a>1 \quad A>0\,, \\ K &= K_\delta + B\lambda^b\,, \qquad b>0 \quad B>0 \quad K_\delta \geq 0\,. \end{aligned} \tag{163}$$

Für die Analyse der Impulsgleichung spielt die Modifikation des K–Ansatzes keine Rolle. Im Grenzübergang $\lim \lambda \to 0$ erhält man

$$b = a-1 \qquad \text{und} \qquad F_\delta = \frac{4\,B}{\gamma\sqrt{3}\,A\,a}\,. \tag{164}$$

Die Turbulenzenergiegleichung liefert zudem

$$\left(\frac{\sigma_k - 1}{\sigma_k}\right) F_\delta^2\,\frac{\sqrt{3}}{8} = K_\delta\left(\frac{2}{\gamma^2\sqrt{3}} - c_\mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,, \tag{165}$$

Eine Kopplungsbeziehung zwischen dem Turbulenzenergiewert am Grenzschichtaussenrand und dem Massenstrom des Freistrahlprofils. Gleichung (165) ist für $K_\delta = 0$ unverträglich mit $\sigma_k = 2$. Die Profile weisen folglich im Vergleich zu alternativen Formulierungen im Aussenbereich ein erhöhtes Maß an Turbulenzenergie auf. Dies ist durch die mit der Schwartzschen Ungleichung verbundene Limitierung der Reynoldsschen Schubspannung weniger problematisch. Für $\sigma_k = 1$ erhält man im Zusammenhang mit $\sigma_\omega = 0.3$ wieder die o.a. Paullay–Lösung, die für wandgebundene Scherschichten nicht empfehlenswert ist.

Anwendung auf eine Plattengrenzschicht

Die oben skizzierten Überlegungen sollen zum Abschluß dieses Anhangs an einer ebenen, inkompressiblen Grenzschichtströmung bei Re_L=2.5 10^6 und ν_t/ν=0.01 überprüft werden. Um den Einfluß der Fenfeldrandbedingungen deutlich herauszuarbeiten wurden für die Turbulenzgrößen folgende Fernfeldrandbedingungen gewählt

$$k_\delta = 10^{-13}\,U_\delta^2\,, \qquad \text{und} \qquad \omega_\delta = 10^{-11}\,\frac{U_\delta^2}{\nu}\,.$$

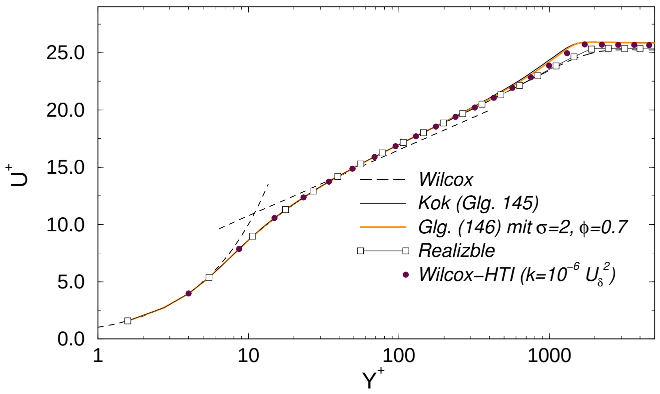


Abbildung 23: Ebene turbulente Plattengrenzschicht (Re$_L$=2.5 10^6, ν_t/ν=0.01, k_δ=10^{-13} U_δ^2); Einfluss der Kreuzdiffusion auf den Verlauf des mittleren Geschwindigkeitsprofils.

Der Kreuzdiffusionsterm wurde, in Anlehnung an Gleichung (156), nur im Falle positiver Beiträge berücksichtigt. Die Abbildungen 23 und 24 geben Aufschluß über den

Einfluss der Kreuzdiffusion am Beispiel des mittleren Geschwindigkeitsprofils, der turbulenten Schubspannung und des Reibungsbeiwertes. Die Abbildungen vergleichen die Vorschläge von Kok (159), den Ansatz (160) (mit $\sigma_k = \sigma_\omega = 2$ und $\phi = 0.7$) und die Lösung nach Schwartscher Limitierung mit den Ergebnissen des unmodifizierten Wilcox Modells. Zur besseren Beurteilung sind die Resultate des Wilcox Modells bei unterkritischen Fernfeldrandbedingungen (Wilcox–HTI; ν_t/ν=0.01 und k_δ=10^{-6} U_δ^2) ergänzend beigefügt.

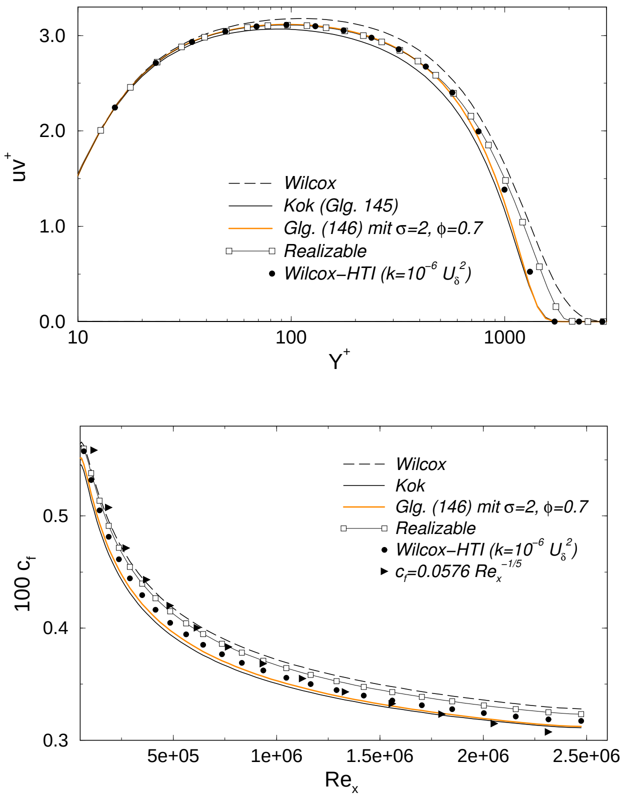


Abbildung 24: Ebene turbulente Plattengrenzschicht (Re_L=2.5 10^6, ν_t/ν=0.01, k_δ=10^{-13} U_δ^2); Einfluss der Kreuzdiffusion auf den Verlauf der vorhergesagten Reynoldsschen Schubspannung (oben) und des prognostizierten Reibungsbeiwertes (unten).

Anhand von Abbildung 23 erkennt man, daß die Verwendung des Kreuzdiffusionsterms –trotz der Nichtberücksichtigung negativer Beiträge– im Allgemeinen mit einer leichten Verringerung von κ verbunden ist. Der Eintritt des Profils in den Nachlaufbereich ist jedoch auch im Grenzübergang $\lim(k/U_\infty^2) \to 0$ noch deutlich zu erkennen, was auf eine geringe Ausdehnung des turbulenten/nichtturbulenten Übergangs schließen läßt.

Der Übergangsbereich weitet sich ohne die Verwendung des Kreuzdiffusionsterms merklich auf (Abbildung 23), wobei die dem Realizability–Prinzip genügende Lösung der Wilcox Lösung qualitativ überlegen ist. Letzteres verdeutlicht sich anhand der in Abbildung 24 (oben) dargestellten Reynoldsschen Schubspannungen. Die Schubspannung der Wilcox Lösung weicht im gesamten logarithmischen Bereich von den HTI–Resultaten ab. Demgegenüber beschränkt sich der Einfluß der Randbedingung bei der dem Realizability–Prinzip genügenden Simulation auf den Aussenbereich.

Ferner erkennt man, daß der Ansatz (160) den Schubspannungsverlauf der unterkritischen HTI–Randbedingungen reproduzieren kann, wohingegen die Koksche Lösung (159) aufgrund der leicht modifizierten Prandtlzahl σ_k im gesamten high–Re Bereich leicht darunter liegt. Die in Abbildung 24 (unten) gezeigten Reibungsbeiwerte bestätigen die oben gemachten Aussagen.

Die von vielen Autoren, beispielsweise Menter (1992) oder Cazalbou, Spalart und Bradshaw (1994), favorisierte Unempfindlichkeit eines Turbulenzmodells für Einström– und Fernfeldrandbedingungen kann durch die Verwendung des Kreuzdiffusionsterms auch für die $k - \omega$ Formulierung gewährleistet werden. Die oben diskutierten Ergebnisse belegen, daß sich Fernfeldstörungen durch den Einfluss des Kreuzdiffusionsterms nicht in den Innenbereich ausbreiten können. Diese Strategie kann möglicherweise zu Problemen bei der Berechnung von Strömungen unter dem Einfluss stark gestörter Aussenturbulenz führen (Rung et al. 1998), da eine Interaktion zwischen Freistromturbulenz und Grenzschichtturbulenz möglicherweise unterbunden wird.

B Caley–Hamilton Theorem

Die allgemein bekannte Form des Caley–Hamilton Theorems zur Reduktion höherer Vielfacher von Tensoren lautet

$$A_{ij}^3 = A_{kk}\, A_{ij}^2 - 0.5(A_{kk}A_{ll} - A_{kk}^2)A_{ij} + (\det[A_{ij}])\,\delta_{ij}\ . \qquad (166)$$

Eine für drei unterschiedliche Tensoren generalisierte Variante ergibt sich aus

$$\begin{aligned} & A_{il}B_{lk}C_{kj} + A_{il}C_{lk}B_{kj} + B_{il}C_{lk}A_{kj} + B_{il}A_{lk}C_{kj} + C_{il}B_{lk}A_{kj} + C_{il}A_{lk}B_{kj} = \\ & A_{ij}(B_{lk}C_{kl}) + B_{ij}(A_{lk}C_{kl}) + C_{ij}(A_{lk}B_{kl}) + \delta_{ij}(A_{lm}B_{mk}C_{kl} + C_{lm}B_{mk}A_{kl}) + \\ & (A_{ik}B_{kj} + B_{ik}A_{kj})C_{ll} + (A_{ik}C_{kj} + C_{ik}A_{kj})B_{ll} + (B_{ik}C_{kj} + C_{ik}B_{kj})A_{ll} - \\ & A_{ij}(B_{ll}C_{kk}) - B_{ij}(A_{ll}C_{kk}) - C_{ij}(A_{ll}B_{kk}) \quad , \qquad (167) \end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Zeilen für spurfreie Tensoren ($\phi_{ii} = 0$) verschwinden. Beide Beziehungen lassen sich in analoger Weise unmittelbar aus den Rechenregeln für Determinaten ableiten (Lübcke und Rung 1999). Für die in Kapitel 4 benutzten Umformungen sind vor allem folgende symbolische Zusammenhänge für zwei spurfreie Tensoren, von denen einer symmetrisch und einer antimetrisch sei, von Bedeutung

$$\underline{\underline{A}}^3 \;=\; 0.5\,\{\underline{\underline{A}}^2\}\,\underline{\underline{A}} + \frac{1}{3}\,\{\underline{\underline{A}}^3\}\,\underline{\underline{E}} \qquad (168)$$

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}\ + \underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}\ + \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}^2 \;=\; 0.5\,\{\underline{\underline{A}}^2\}\,\underline{\underline{B}}\ + \{\underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}\}\,\underline{\underline{E}}\,, \qquad (169)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}^2\cdot\underline{\underline{A}}\ + \underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}^2\ + \underline{\underline{B}}^2\cdot\underline{\underline{A}}^2 \;&=\; \{\underline{\underline{B}}^2\}\,\underline{\underline{A}}^2 + \{\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}^2\}\,\underline{\underline{A}} + 0.5\,\{\underline{\underline{A}}^2\}\,\underline{\underline{B}}^2 \\ &+\; \Big(\{\underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}^2\} - 0.5\,\{\underline{\underline{A}}^2\}\,\{\underline{\underline{B}}^2\}\Big)\,\underline{\underline{E}}\,, \qquad (170) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}^2 = -0.5\{\underline{\underline{A}}^2\}\,\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}\ \ -\ \ (\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}})\ \ \det(\underline{\underline{A}})\ \ + \{\underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}\}\,\underline{\underline{A}}^2\,. \qquad (171)$$

Hierbei wird die Spurbildung (Kontraktion der freien Indices) durch geschweifte Klammern gekennzeichnet (z.B. $\{\underline{\underline{A}}^2\} = A_{ii}^2 = A_{ik}A_{ki}$).

Caley–Hamilton Theorem im R^2

Viele Strömungssituationen sind zumindest näherungsweise durch den analogen einfachen Rangabfall des Scherraten– und Wirbeltensors gekennzeichnet. In diesem Fall genügen beide Tensoren einer zweidimensionalen Form

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad (172)$$

welche teilweise einer vorhergehenden Hauptachsentransformation bedarf. Für 3×3 Matrizen vom Rang 2 kann eine restriktivere Form des Caley–Hamilton Theorems formuliert werden mit dem sich Tensoren zweiten Grades auf lineare Terme zurückführen lassen. Die mit einem Rangabfall verbundene Verringerung des Grades erkennt man deutlich anhand von Gleichung (166); für verschwindende Determinanten ($\det A_{ij}$) läßt sich die klassische Caley–Hamilton Beziehung zu einer quadratischen Gleichung kürzen.

Die allgemeine Herleitung der zweidimensionalen Caley–Hamilton Gleichung geschieht analog zur Entwicklung des oben skizzierten Theorems für quadratische Matrizen vom Rang 3. Sie verknüpft aufgrund des geringeren Ranges jedoch nur noch zwei Matrizen A_{ij} und B_{ij}. Die Indizes der 2×2 Matrizen A_{ij} und B_{ij} können nur zwei veschiedene Werte $(1, 2)$ annehmen, die gilt auch für eine entsprechend definierte Einheitsmatrix $\underline{\underline{\delta}}^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} \delta_{ip}^{(2)} & \delta_{iq}^{(2)} & \delta_{ir}^{(2)} \\ \delta_{jp}^{(2)} & \delta_{jq}^{(2)} & \delta_{jr}^{(2)} \\ \delta_{kp}^{(2)} & \delta_{kq}^{(2)} & \delta_{kr}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \delta_{ijk}^{pqr(2)} = \begin{vmatrix} \delta_{ip}^{(2)} & \delta_{iq}^{(2)} & \delta_{ir}^{(2)} \\ \delta_{jp}^{(2)} & \delta_{jq}^{(2)} & \delta_{jr}^{(2)} \\ \delta_{kp}^{(2)} & \delta_{kq}^{(2)} & \delta_{kr}^{(2)} \end{vmatrix} = 0\ , \qquad (173)$$

weswegen die Determinante $\delta_{ijk}^{pqr(2)}$ in (173) verschwindet. Multipliziert man hierin die erste Zeile mit A_{pi} und die zweite Zeile mit B_{qj}, dann ergibt sich

$$\begin{vmatrix} A_{pp} & A_{pq} & A_{pr} \\ B_{qp} & B_{qq} & B_{qr} \\ \delta_{kp}^{(2)} & \delta_{kq}^{(2)} & \delta_{kr}^{(2)} \end{vmatrix} = 0\ . \qquad (174)$$

Löst man die zuletzt notierte Determinante nach der dritten Zeile auf, dann ergibt sich die gesuchte Caley–Hamilton Beziehung des R^2

$$A_{ik}B_{kj} + B_{ik}A_{kj} = A_{ij}B_{kk} + B_{ij}A_{kk} - \delta_{ij}^{(2)}\,(A_{kk}B_{kk} - A_{ik}B_{ki})\ . \qquad (175)$$

Hieraus läßt sich mit Hilfe von $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$ das Pendant zur Gleichung (166) gewinnen

$$A_{ij}^2 = A_{ij}\,(A_{kk}) - 0.5\,\delta_{ij}^{(2)}\,\Big(A_{kk}A_{ll} - A_{kk}^2\Big)\ . \qquad (176)$$

Multipliziert man (175) mit $\underline{\underline{B}}$ dann ergibt sich mittels (176)

$$B_{ik}\,A_{kl}\,B_{lj} = 0.5\,\Big[A_{ij} - \delta_{ij}^{(2)}\,A_{ll}\Big]\Big(B_{kk} - B_{kk}^2\Big)\ . \qquad (177)$$

Für spurfreie Tensoren $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$, von denen einer symmetrisch und einer antimetrisch ist, findet man die besonders einfachen Zusammenhänge in synbolischer Schreibweise

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} \;=\; -\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}\,, \qquad (178)$$

$$\underline{\underline{A}}^2 \;=\; 0.5\ tr\{\underline{\underline{A}}^2\}\ \underline{\underline{\delta}}^{(2)}\,, \qquad (179)$$

$$\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} \;=\; -0.5\ tr\{\underline{\underline{B}}^2\}\ \underline{\underline{A}}\,. \qquad (180)$$

Mit der selben Technik lassen sich analoge Beziehungen zur Reduktion der N–ten Potenzen von N Matrizen des R^N aus

$$\delta^{ijk\ldots N+1(N)}_{pqr\ldots N+1(N)} = 0$$

entwickeln.

Reduktion der dreidimensionalen Funktionsbasis im R^2

Mit Hilfe der oben zusammengetragenen zweidimensionalen Caley–Hamilton Formeln, hier insbesondere der Gleichung (179), lassen sich die zehn Generatoren der dreidimensionalen Funktionsbasis (72) auf die ersten drei Genratoren reduzieren

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{T}}^{(1)} &= \underline{\underline{s}} \, , \qquad (181)\\
\underline{\underline{T}}^{(2)} &= \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{w}} - \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{s}} \, ,\\
\underline{\underline{T}}^{(3)} &= \underline{\underline{s}}^2 - \frac{1}{3}\, tr\{\underline{\underline{s}}^2\}\, \underline{\underline{\delta}} = 0.5\; tr\{\underline{\underline{s}}^2\}\; \underline{\underline{\delta}}^{(2)} - \frac{1}{3}\, tr\{\underline{\underline{s}}^2\}\, \underline{\underline{\delta}} = 0.5\, \eta_1 \left(\underline{\underline{\delta}}^{(2)} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\delta}}\right) \, ,\\
\underline{\underline{T}}^{(4)} &= \underline{\underline{w}}^2 - \frac{1}{3}\, tr\{\underline{\underline{w}}^2\}\, \underline{\underline{\delta}} = 0.5\; tr\{\underline{\underline{w}}^2\}\; \underline{\underline{\delta}}^{(2)} - \frac{1}{3}\, tr\{\underline{\underline{w}}^2\}\, \underline{\underline{\delta}} = \frac{\eta_2}{\eta_1}\, \underline{\underline{T}}^{(3)} \, ,\\
\underline{\underline{T}}^{(5)} &= \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{s}}^2 - \underline{\underline{s}}^2 \cdot \underline{\underline{w}} = 0.5\; tr\{\underline{\underline{s}}^2\}\; \left(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{w}}\right) = \underline{\underline{0}} \, ,\\
\underline{\underline{T}}^{(6)} &= \underline{\underline{w}}^2 \cdot \underline{\underline{s}} + \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{\omega}}^2 - \frac{2}{3}\, tr\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{w}}^2\}\underline{\underline{\delta}} = \eta_2\, \underline{\underline{s}} = \eta_2\, \underline{\underline{T}}^{(1)} \, ,\\
\underline{\underline{T}}^{(7)} &= \underline{\underline{w}}^2 \cdot \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{w}} - \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{w}}^2 = 0.5\, \eta_2\, \underline{\underline{T}}^{(2)} \, ,\\
\underline{\underline{T}}^{(8)} &= \underline{\underline{s}}^2 \cdot \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{s}} - \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{s}}^2 = -0.5\, \eta_1\, \underline{\underline{T}}^{(2)} \, ,\\
\underline{\underline{T}}^{(9)} &= \underline{\underline{s}}^2 \cdot \underline{\underline{w}}^2 + \underline{\underline{w}}^2 \cdot \underline{\underline{s}}^2 - \frac{2}{3}\, tr\{\underline{\underline{s}}^2 \cdot \underline{\underline{w}}^2\}\; \underline{\underline{\delta}} = 0.5\, \eta_1\eta_2\; \underline{\underline{\delta}}^{(2)} - \frac{1}{3}\eta_1\eta_2\; \underline{\underline{\delta}}^{(2)} = \eta_2\, \underline{\underline{T}}^{(3)} \, ,\\
\underline{\underline{T}}^{(10)} &= \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{s}}^2 \cdot \underline{\underline{w}}^2 - \underline{\underline{w}}^2 \cdot \underline{\underline{s}}^2 \cdot \underline{\underline{w}} = 0.25\, \eta_1\eta_2 \left(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{w}}\right) = \underline{\underline{0}} \, .
\end{aligned}$$

In der selben Weise vereinfachen sich die Invarianten (73) im R^2 zu

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= s_{kk} = 0 \, , \qquad (182)\\
\eta_1 &= s^2_{kk} \, ,\\
\eta_2 &= w^2_{kk} \, ,\\
\eta_3 &= s^3_{kk} = 0.5\, \eta_1\, s_{kk} = 0 \, ,\\
\eta_4 &= s_{kl} w^2_{lk} = 0.5\, \eta_2\, s_{kk} = 0 \, ,\\
\eta_5 &= s^2_{kl} w^2_{lk} = 0.5\, \eta_1\, \eta_2 \, .
\end{aligned}$$

In zweidimensionalen mittleren Strömungsfeldern verbleiben daher nur zwei Invarianten (η_1, η_2) und drei Generatoren. Als dritter Generator kann wahlweise die zweidimensionale Einheitsmatrix $\underline{\underline{\delta}}^{(2)}$ oder $\underline{\underline{s}}^2$ verwendet werden, weswegen die Integritätsbasis ein Element weniger als die Funktionsbasis besitzt.