Wellengruppen, Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

a) Einfache Wellengruppen als Überlagerung von wenigen Sinuswellen

Die Welle ist als Überlagerung

$$p'(x,t) = \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot \cos(\omega_i t - k_i x) \tag{1}$$

gegeben. Die Wellenzahlen k_i werden in einem Intervall $[k_0(1-\varepsilon), k_0(1+\varepsilon)]$ um eine vorgegebene mittlere Wellenzahl k_0 äquidistant verteilt:

$$k_i = k_0 \cdot \left(1 - \varepsilon + i \cdot \frac{2\varepsilon}{N+1}\right) \tag{2}$$

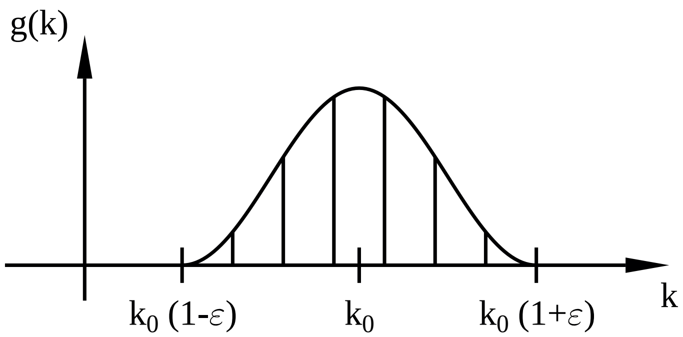
Es wird eine lineare Dispersionsbeziehung mit einer vorgegebenen Gruppengeschwindigkeit c^{gr} als Steigung angenommen. Die Kreisfrequenzen ω_i ergeben sich aus den Wellenzahlen k_i durch:

$$\omega_i = c_0 \cdot k_0 + c^{gr} \cdot (k_i - k_0) \tag{3}$$

Die einzelnen Teilwellen werden mit den Faktoren g_i gewichtet. Sie sind durch

$$g_i = \frac{\bar{g}_i}{G} \qquad \text{mit} \qquad \bar{g}_i = \cos\left(2\pi \, \frac{i+1}{N+1}\right) \qquad \text{und} \qquad G = \sum_{i=1}^{N} \bar{g}_i \tag{4}$$

gegeben. Damit wird eine Gewichtung $g(k)$ der Teilwellen in Abhängigkeit der Wellenzahl wie in der folgenden Abbildung erreicht:



In dem dargestellten Beispiel ist für $N = 6$ die Verteilung der k_i durch vertikale Linien dargestellt. Durch die Definition (4) sind die g_i so normiert, daß immer $\sum_{i=1}^{N} g_i = 1$ gilt.

Für $N = 2$ ergibt sich eine klassische Schwebung. In diesem Fall ist $g_1 = g_2 = \frac{1}{2}$, und zwei gleichstarke Wellen überlagern sich. Werden mehr Wellen beteiligt und N erhöht, so entsteht aus dem Schwebungsmuster immer mehr das typische Bild von separierten Wellenpacketen. Im Grenzfall $N \longrightarrow \infty$ würde man schließlich den Idealfall einer einzelnen Wellengruppe erhalten.

b) Das Java-Applet

In dem Java-Applet können verschiedene Parameter durch Schieberegler und Knöpfe eingestellt werden. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick:

Parameter	Symbol
eps	ε
Wellenlänge	λ
Gruppengeschwindigkeit	c^{gr}
Phasengeschwindigkeit	c_0
Anzahl der Wellen	N

Die Werte für N, ε, c_0 und c^{gr} können direkt eingestellt werden. Die Geschwindigkeiten sind in der Einheit "Pixel pro Sekunde" gegeben. Der Wert für k_0 aus Gleichung (2) wird indirekt über die einstellbare Wellenlänge λ mit

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5}$$

bestimmt.
Die dargestellte Kurve zeigt die Druckverteilung nach Gleichung (1). Dabei liegt $x = 0$ etwa in der Mitte des Fensters. Eine Längeneinheit entspricht einem Pixel. Die Animation wird mit den Knöpfen in der oberen Leiste gesteuert. Durch Anklicken des Startknopfes werden die Wellen in Bewegung gesetzt. Bei ausreichender Rechnerleistung entsprechen die Geschwindigkeiten den eingestellten Werten in Pixel pro Sekunde. D.h., die Wellengruppe beziehungsweise die Wellenfront bewegt sich jede Sekunde die angegebene Anzahl von Pixel. Eine ruckartige oder stockende Darstellung deutet auf zu geringe Rechnerleistung hin. In diesem Fall kann eine Reduzierung der Anzahl der Wellen N die Darstellung verbessern.