Hermann-Föttinger-Institut
für Strömungstechnik
Prof. Dr.-Ing F. Thiele

Numerische Simulation der Störungsausbreitung in Düsenströmungen unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte

Łukasz Panek

TU Berlin

Einleitung

Zur Beschreibung der Schallausbreitung in strömenden Medien werden sogenannte CAA-Verfahren (Computational Aeroacoustics) eingesetzt. Diese Verfahren sind auf die Eigenschaften der Akustik spezialisiert und ermöglichen eine deutlich höhere Effizienz im Vergleich zu den typischen CFD-Methoden bei der Simulation von Schallausbreitung. Für die Ausbreitung von Schall bieten die Euler-Gleichungen ein ausreichend genaues Modell - die Viskosität des Mediums wird vernachlässigt. Eine weitere sehr weit verbreitete Vereinfachung ist die Linearisierung der Gleichungen (LEE - Linearized Euler Equations). Diese in der Praxis sehr nützliche Maßnahme zieht aber die Annahme geringer Amplituden nach sich und schränkt den Einsatzbereich des Modells ein. Bei Verbrennungsproblemen können hohe Amplitudenschwankungen, unabhängig von der Akustik, durch die so genannten Entropiemoden entstehen. Ziel dieser Untersuchung ist der Vergleich des nichtlinearen Modells mit dem bisher im CAA-Verfahren des HFI eingesetzten linearen Modell. Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf der Untersuchung von Tiefpass-Filtern, die das verwendete numerische Verfahren erforderlich macht.

Theorie

Das CAA-Verfahren basiert auf den Euler-Gleichungen der Fluiddynamik. Um akustische Schwankungen, die mehrere Zehnerpotenzen kleiner als die Ruhegrößen sind, exakt simulieren zu können, werden die Grundgleichungen einem Zerlegungsansatz unterworfen. Dieser Ansatz lautet

$$\begin{aligned} \rho &= \varrho_0 + \varrho' \\ \underline{u} &= \underline{u}_0 + \underline{u}' \\ p &= p_0 + p' \end{aligned} \tag{1}$$

und spaltet die physikalischen Größen in einen stationären, räumlich variablen Mittelwert (mit $_0$ indiziert) und einen zeitlich und räumlich veränderlichen Schwankungsanteil (mit $'$ indiziert) auf. Der mittlere Zustand fließt als bekannte Größe in die Gleichungen ein und kann z. B. durch einen CFD-Löser berechnet werden. Die Schwankungen enthalten die gesuchten Größen und lassen sich ihrem Verhalten nach in drei Typen einteilen. Es sind:

- akustische Schwankungen, isentrop, wellenartige Ausbreitung mit Schallgeschwindigkeit relativ zur Strömung
- Entropiestörungen, anisentrop, konvektive Ausbreitung
- Wirbelstärke-Schwankungen, isentrop, konvektive Ausbreitung

Diese Störungsarten werden als Lösungsmoden bezeichnet. Das Einsetzen des Zerlegungsansatzes in die Euler-Gleichungen liefert

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \rho' + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u}' + \rho' \underline{\nabla} \cdot \underline{u}_0 + \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \rho_0 = q_c \tag{2}$$

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \underline{u}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}') + \underline{u}'(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}_0)\frac{\underline{\nabla} p'}{\rho} - \frac{\rho'}{\rho \rho_0}\underline{\nabla} p_0 = q_m \tag{3}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} p' + \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} p_0 + \gamma p \underline{\nabla u'} + \gamma p' \underline{\nabla u_0} = q_p \tag{4}$$

Im Gegensatz zur üblichen Vorgehensweise werden Terme höherer Ordnung (Produkte mehrerer Schwankungsgrößen) in den oberen Gleichungen nicht vernachlässigt, was einer Linearisierung gleichkommen würde. Durch die Berücksichtigung dieser Terme wird die Beschränkung auf kleine Amplituden der Störungen aufgehoben und gleichzeitig die Wechselwirkung der oben erwähnten Lösungsmoden erfaßt. Diese Effekte werden in dieser Arbeit näher untersucht.

Numerisches Verfahren

Das kontinuierliche Gleichungsystem wird räumlich durch finite Differenzen diskretisiert. Es kommt ein für die Wellenausbreitung optimierter zentraler DRP-Differenzenstern [1] mit sieben Punkten und einer Ordnung von vier zum Einsatz. Das Ergebnis dieser Optimierung ist in Abb. 1 zu sehen. Dort ist die numerisch wiedergegebene normierte Wellenzahl $\bar{k}_x \Delta x$ mit der physikalischen Wellenzahl $k_x \Delta x$ für das DRP-Verfahren mit ähnlichen nichtoptimierten Verfahren verglichen. Die diagonal verlaufende Gerade entspricht dem Idealfall in dem die physikalische und numerische Wellenzahl für alle Wellenlängen korrekt berechnet wird.

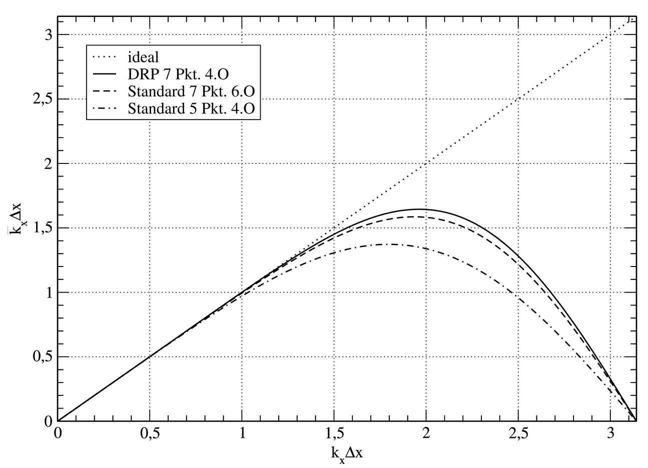

Abb. 1: Vergleich der physikalischen und numerischen Wellenzahl (normiert) für unterschiedliche Finite-Differenzen-Verfahren.

Es ist zu erkennen, dass das DRP-Schema der Idealkurve in einem größeren Bereich folgt als das Standard-Schema 6.Ordnung, das den gleichen Rechenaufwand erfordert. Durch die Optimierung lassen sich für das gleiche Problem gröbere Gitter verwenden, was letztendlich in einer erhöhten Effizienz des Verfahren resultiert.

Die Zeitintegration basiert auf dem ebenfalls für Wellenausbreitung optimierten LDDRK56-Verfahren [2] (Low Dissipation and Dispersion Runge-Kutte method). Das Verfahren verwendet abwechselnd fünf und sechs Stufen für die Approximation des neuen Zeitschritts. Es ist in der Low-Storage-Form implementiert, die es erlaubt nur zwei Variablen pro Freiheitsgrad zu speichern.

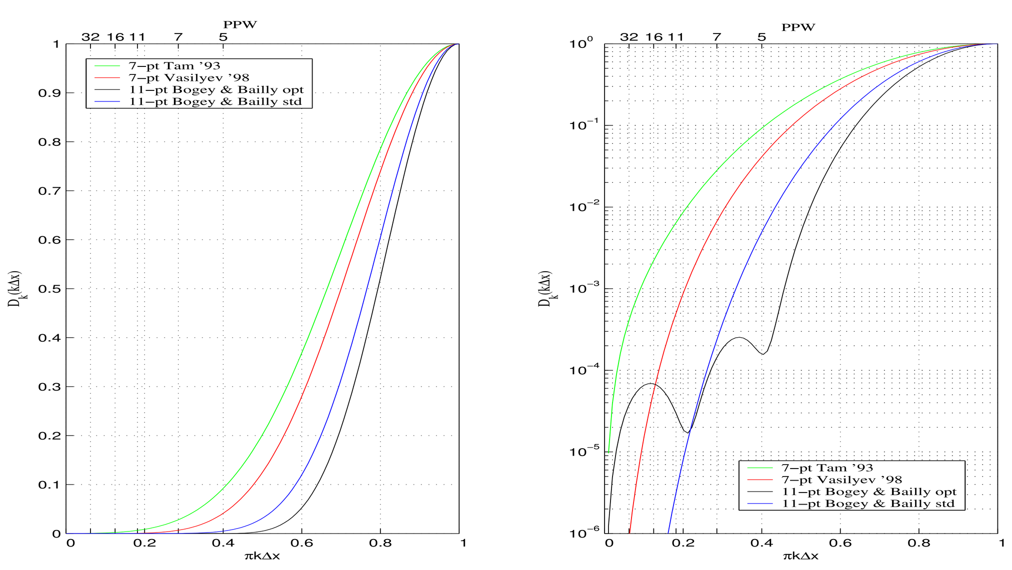

Abb. 2: Kennlinien der untersuchten Filter.

Filterung

Das verwendete numerische Verfahren ergibt für kurze Wellenlängen unphysikalische Lösungen (Abb. 1). Die kurzwelligen Artefakte verursachen durch ihre unphysikalische Ausbreitung Gitterschwingungen, welche im instabilen Bereich des Runge-Kutta-Verfahrens liegen und zu aufklingenden Lösungen führen. Es ist daher nötig, Wellenlängen die vom verwendeten DRP-Schema nicht mehr korrekt aufgelöst werden, aus der Lösung zu eliminieren. Das kann z. B. durch die Methode der künstlichen selektiven

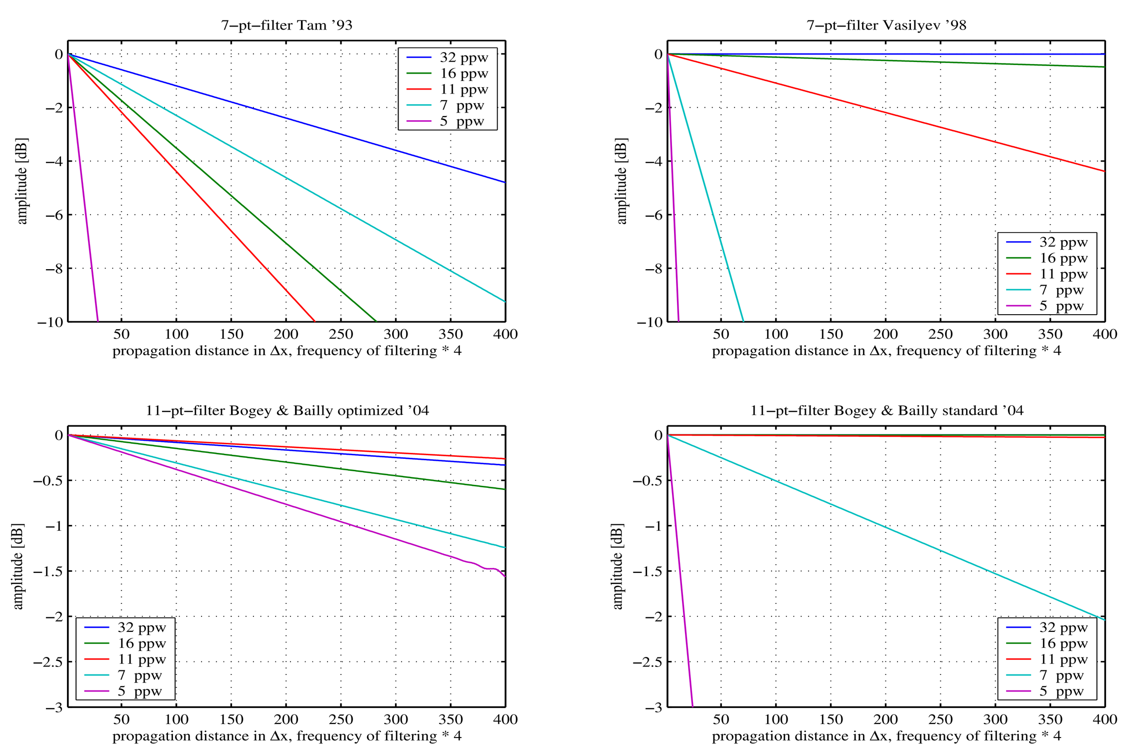

Abb. 3: Abschwächung der Lösung durch Filterund bei unterschiedlichen Frequenzen.

Dämpfung entsprechend der Idee von Tam [3] oder durch eine einfache explizite Tiefpass-Filterung bewerkstelligt werden.

Beide Prinzipien basieren auf einem Koeffizientenschema das zur Aufprägung eines bestimmten Frequenzgangs nötig ist. In Abb. 2 sind Kennlinien unterschiedlicher Filterschemata abgebildet. Der Dämfungsfaktor ist über der normierten Frequenz aufgetragen. Er ist idealerweise Null im Durchlassbereich (0 bis etwa 0.3π) und Eins im Sperrbereich. Abhängig von den Koeffizienten und der Länge des Schemas wird die Vorgabe unterschiedlich gut erfüllt. Der Einfluß der Filter auf die Lösung wurde für unterschiedliche Wellenlängen in einem quantitativen Test untersucht. Die Ergebnisse sind in Abb. 3 zu sehen.

Ergebnisse

Die nichtlinearen Gleichungen wurden an einer Reihe von Testproblemen untersucht und mit dem linearen Modell verglichen. In Abb. 4 ist die nichtlineare Ausbreitung einer anfänglich gaußglockenförmigen ebenen akustischen Welle hoher Amplitude dargestellt. Da Ausbreitungsgeschwindigkeit amplitudenabhängig ist, kommt es zu einer Aufsteilung. Es ist bis auf die Stoßnähe eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung zu beobachten.

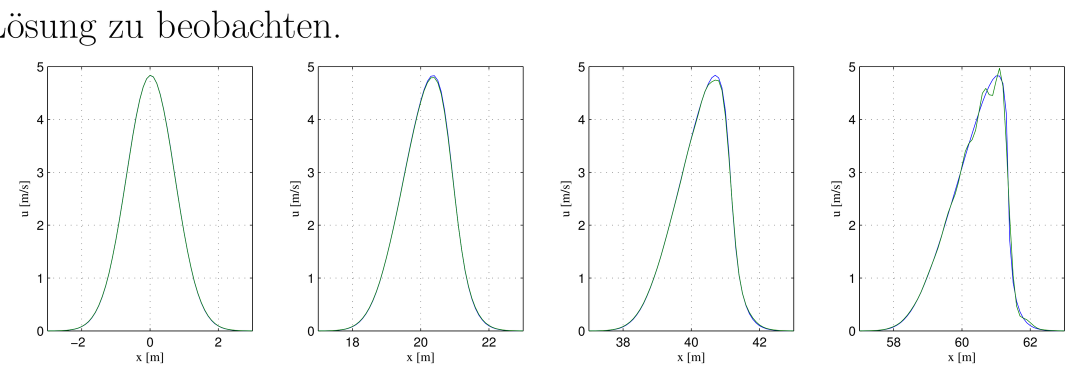

Abb. 4: Aufsteilung eines Pulses durch Nichtlinearität (numerisch, analytisch).

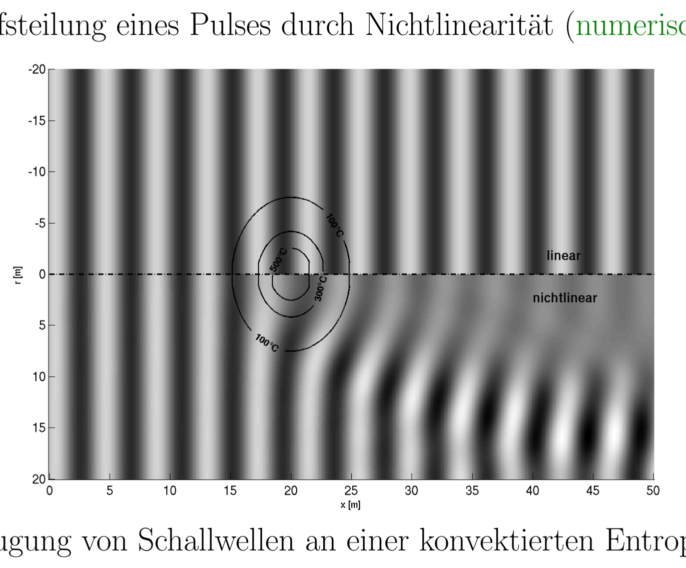

Abb. 5: Beugung von Schallwellen an einer konvektierten Entropiestörung.

Abbildung 5 zeigt die Ausbreitung einer ebenen Schallwelle über eine konvektierte Entropiestörung in einem runden durchströmten Kanal. In der nichtlinearen Rechnung (untere Hälfte) ist eine starke Beugung der Schallwelle an dem 'hot spot' (siehe Temperaturisolinien) zu beobachten. Dieses Phänomen ist von der linearen Rechnung (obere Hälfte) aufgrund der Entkopplung von Lösungsmoden nicht erfaßt. In Abb. 6 ist der Durchgang einer Entropiestörung durch eine Düse zu sehen. Die Bildsequenz (oben) gibt die Dichtstörung wieder, die zur Temperatur des Gases proportional ist. Der beim Durchgang durch die Querschnittsverengung entstehende, als indirekter Verbrennungslärm bezeichnete, akustische Druckpuls ist in den unteren Diagrammen abgebildet.

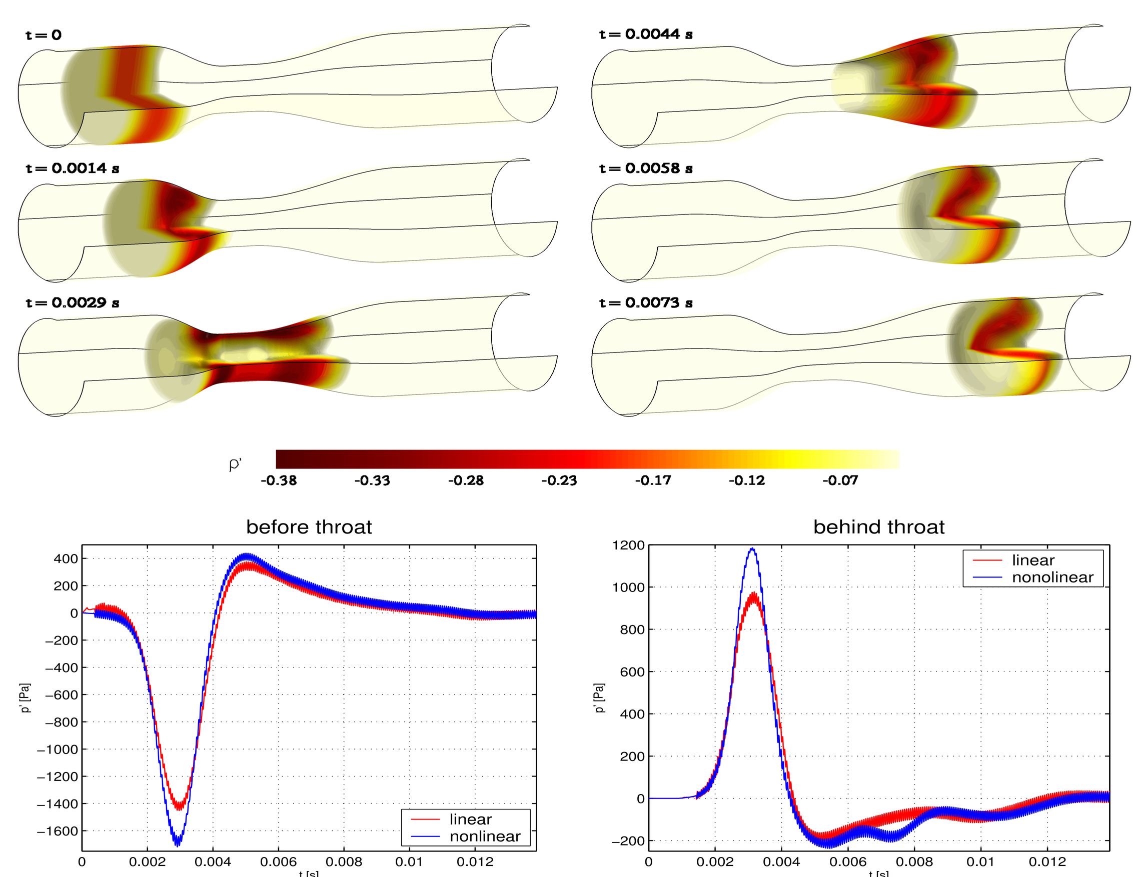

Abb. 6: Durchgang einer Entropiestörung durch eine Düse, Dichteverteilung (oben), Druckverlauf vor Verengung (unten links) und nach Verengung (unten rechts).

Das linke Druckdiagramm gehört zu einem Messpunkt vor der Verengung, das rechte wurde am Austritt aufgenommen. Auch hier sind Unterschiede zwischen dem linearen und nichtlinearen Modell sichtbar.

Zusammenfassung

Das nichtlineare Modell zeigt bei Problemen mit starken Entropiestörungen, sowie Schallquellen hoher Amplitude deutliche Unterschiede zur linearisierten Form. Insbesondere führt die Wechselwirkung der Lösungsmoden, die durch die linearen Gleichungen nicht erfaßt wird, zu anderen Ergebnissen. Bei dem Vergleich von Filterkoeffizienten hat sich der nichtoptimierte 11-Punkte-Filter als guter Kompromis zwischen Durchlassdämpfung und Sperrwirkung erwiesen.

Literatur

[1] C. Tam & J. Webb, "Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics", *J. Comput. Phys.* 107, 1993.

[2] F. Q. Hu, M. Y. Hussani & J. L. Manthey, "Low-Dissipation and -Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics", *J. Comput. Phys.* 124(1), 1996.

[3] C.K.W. Tam, J.C. Webb & Z. Dong, "A study of the short wave components in computational acoustics", *J. Comput. Acoust.* 1, 1993.

[4] Hamilton & Blackstock, *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, 1997.